МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТОРГОВЕЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВІННИЦЬКИЙ ТОРГОВЕЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА: ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Вінниця 2018

УДК 517:519.2(075.8)

Рекомендовано Вченою радою Вінницького торговельно-економічного інституту КНТЕУ (протокол №3 від 20 квітня 2018)
як навчальний посібник для закладів вищої освіти

Рецензенти:

Працьовитий М.В. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики, декан фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова

Денисюк О.М. – доктор економічних наук, професор кафедри обліку та оподаткування Вінницького торговельно-економічного інституту Київського національного торговельно-економічного університету

Шевчук О.Ф. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, фізики та комп'ютерних технологій Вінницького національного аграрного університету

Г 94 Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М.
ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА: ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ: навчальний посібник. Вінниця: Видавничо-редакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.

ISBN 978-966-629-865-5

Навчальний посібник містить загальні теоретичні положення основних розділів теорії ймовірностей. Виклад теоретичного матеріалу насичений прикладами розв'язування задач економічного змісту та матеріалами з історії розвитку окремих понять, розділів науки тощо. У посібнику запропоновано методичний супровід використання сучасних інформаційних технологій під час розв'язування окремих задач з теорії ймовірностей, застосування яких надає можливість звільнитися від рутинних операцій та зосередити увагу на конкретних проблемах, які є основними складовими глибоких математичних теорій. Для студентів економічних спеціальностей закладів вищої освіти.

ISBN 978-966-629-865-5

ПЕРЕДМОВА

Немає майже жодної природничої науки, в якій так чи інакше не застосовувалися б ймовірнісні методи.

І. Вентцель

На думку Б.В. Гнеденка, теорія ймовірностей є здобутком Нового часу, яка тривалий період вважалася суто дослідною наукою і «не зовсім математикою». Її строге обґрунтування було розроблено тільки в 1929 році. У наші дні теорія ймовірностей займає одне з перших місць у прикладних науках за широтою своєї області застосування. Зокрема, протягом останніх десятиліть теорія і практика економічної сфери все частіше спирається на кількісні математичні методи. Це зумовлено тим, що економічна інформація зазвичай має випадковий характер, а економічні процеси моделюються і досліджуються за допомогою ймовірнісних методів.

Сьогодні теорія ймовірностей є складовою частиною дисципліни «Вища та прикладна математика» і відіграє важливу роль у підготовці фінансистів.

Метою навчального посібника є ознайомлення майбутніх фахівців з основними поняттями та методами теорії ймовірностей, формуванні у них сучасного економічного мислення та професійних компетентностей, здатності застосовувати отримані знання на практиці.

Запропонований посібник складається з трьох розділів: випадкові події; випадкові величини та їх економічна інтерпретація; використання інформаційних технологій під час розв’язування задач з теорії ймовірностей.

Матеріал всіх навчальних тем подано за єдиною схемою. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується прикладами розв’язування задач та містить запитання для контролю знань, що спрямовані на усвідомлення основних теоретичних положень, необхідних для розв’язування задач. Тестові завдання до кожної теми акцентують увагу студентів на базових поняттях.

Посібник наповнений задачами економічного змісту, що підкреслює його прикладне спрямування, та сприяє використанню набутих знань у подальшій професійній діяльності. Окремі задачі тренувальних вправ кожної теми потрібно виконати з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, за методикою запропонованою у третьому розділі.

З метою підвищення рівня навчально-пізнавальної діяльності студентів, до змісту посібника включено матеріали з історії розвитку окремих понять, розділів науки тощо.

У посібнику запропоновано методичний супровід використання сучасних інформаційних технологій під час розв'язування окремих задач з теорії ймовірностей, що надає можливість звільнитися від рутинних операцій та зосередити увагу на конкретних проблемах, що складають зміст глибоких математичних теорій. Використання Gran 1, MS Excel, Geogebra під час розв'язування окремих задач надасть можливість сформувати у студентів уміння комплексного застосування сучасних інформаційних технологій у різних сферах управління економічними об'єктами.

Практична реалізація завдань сприятиме розвитку ініціативи та самостійності, вмінню аналізувати та на основі аналізу приймати правильні управлінські рішення, прогнозувати ситуацію, використовуючи апарат теорії ймовірностей та інформаційні технології.

У посібнику виокремлено опорні факти, глосарій основних понять та методів теорії ймовірностей, що допоможе студентам швидше зорієнтуватись в матеріалі як під час аудиторних занять, так і під час самостійної роботи, опрацюванні лекційного матеріалу та підготовці до практичних занять. У додатках наведено таблиці, необхідні для розв'язування задач.

ЗМІСТ

Розділ І ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Основні поняття теорії ймовірностей……………………………………. 8

1.1.1. Простір елементарних подій……………………………………. 8

1.1.2. Операції над подіями……………………………………………..... 13

1.1.3. Елементи комбінаторики………………………………………….. 18

1.1.4. Класичне та геометричне означення ймовірності події………… 25

1.2. Основні теореми теорії ймовірностей та наслідки з них

1.2.1. Теореми додавання ймовірностей несумісних подій……………. 40

1.2.2. Теореми суми ймовірностей сумісних подій…………………..... 42

1.2.3. Теореми множення ймовірностей………………………………. 43

1.2.4. Формула повної ймовірності випадкової події…………………... 50

1.2.5. Формула Байєса………………………………………………… 52

1.3. Повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі

1.3.1. Послідовності незалежних випробувань………………………. 60

1.3.2. Формула Бернуллі……………………………………………… 61

1.3.3. Локальна теорема Муавра-Лапласа……………………………. 63

1.3.4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа…………………………. 65

1.3.5. Теорема Пуассона……………………………………………… 66

1.3.6. Найімовірніше число появ випадкової події…………………….. 67

Розділ ІІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

2.1. Дискретні випадкові величини……………………………………… 74

2.1.1. Поняття випадкової величини. Види випадкових величин……... 74

2.1.2. Закон розподілу дискретної випадкової величини та способи його задання………………………………………………………………. 76

2.1.3. Числові характеристики ДВВ…………………………………... 79

2.2. Неперервні випадкові величини... 93

2.2.1. Інтегральна функція розподілу ймовірностей…………………… 93

2.2.2. Диференціальна функція розподілу ймовірностей……………… 95

2.2.3. Числові характеристики НВВ………………………………………... 96
2.3. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин…….. 102
2.3.1. Закони розподілу дискретної випадкової величини…………….... 102
2.3.2. Закони розподілу неперервної випадкової величини…………… 108
2.4. Граничні теореми теорії ймовірностей…………………………….... 119
2.4.1. Поняття про граничні теореми теорії ймовірностей…………….. 119
2.4.2. Закон великих чисел……………………………………………….. 121
2.4.3. Центральна гранична теорема.…………………………………… 124
РОЗДІЛ III ВПРОВАДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕС НАВЧАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
3.1. Розв’язування задач теорії ймовірностей з використанням MS Excel……………………………………………………………………... 132
3.2. Використання GRAN1 під час вивчення розподілів випадкових величин………………………………………………………………………. 158
3.3. Віртуальний експеримент з випадковими величинами та його візуалізація засобами Geogebra…………………………………………….. 172
Опорні факти……………………………………………………………… 184
Глосарій…………………………………………………………………… 193
Список рекомендованої літератури……………………………………… 201
Додатки……………………………………………………………………. 203

Розділ І ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

У цьому розділі викладено основні поняття і методи, які пов’язані з випадковими подіями, а саме:

- простір елементарних подій, види подій та операції над ними;
- класичне та геометричне означення ймовірності події;
- основні теореми теорії ймовірностей та наслідки з них;
- формула повної ймовірності випадкової події та формула Байєса;
- повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі;
- локальна теорема Муавра-Лапласа, інтегральна теорема Муавра-Лапласа, теорема Пуассона, найімовірніше число появ випадкової події.

Сторінки історії

Перші роботи, в яких виникли основні поняття теорії імовірностей, з'явились у XV–XVI століттях як спроба побудови теорії азартних ігор і належать таким видатним ученим як Б. Спіноза, Дж. Кардано, Галілео Галілей.

Наступний етап (кінець XVII–XVIII ст.) розвитку теорії імовірностей пов'язаний з роботами Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, К. Гаусса, Я. Бернуллі та Н. Бернуллі, С. Пуассона, А. Муавра, П. Лапласа, Т. Байєса.

Я. Бернуллі зробив перші теоретичні обґрунтування накопичених раніше фактів.

В XIX сторіччі теорію імовірностей почали успішно застосовувати у страховій справі, артилерії, статистиці.

Лише наприкінці XIX сторіччя П.Л. Чебишов та його учні А.А. Марков та А.М. Ляпунов перетворили теорію імовірностей у математичну науку.

Подальшим розвитком теорії імовірностей та випадкових процесів зобов’язані таким математикам як С.Н. Берштейн, А.М. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, А.В. Скороход, В.С. Королюк, Ю. Нейман, І.І. Гіхман, І.М. Коваленко.

1.1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1.1. Простір елементарних подій

Щоденний досвід переконує нас в тому, що у буденному житті, а також в наукових дослідженнях постійно доводиться стикатися з випадковими явищами, які зовні схожі, але за різних умов можуть якісно відрізнятися.

Наведемо декілька **прикладів.**

1. Кількість викликів, які надходять на станцію швидкої допомоги за добу.

2. Кількість виробів, придатних до використання, виготовлених в одних умовах і з однакових матеріалів.

3. Відхилення точки попадання снаряду від центру цілі.

Однієї констатації факту належності випадковості для впевненого використання явищ природи чи управління технологічними процесами зовсім недостатньо, необхідно навчитися кількісно оцінювати випадкові процеси чи події, їх властивості та прогнозувати їх протікання.

Означення 1. *Послідовність операцій, виконуваних з додержанням певного комплексу умов, називають експериментом (випробуванням, спостереженням).*

Означення 2. *Подією в теорії ймовірності називають довільний наслідок або результат будь-якого випробування, спостереження, стохастичного експерименту (який можна повторити будь-яку кількість раз), який може наступити (відбутись, здійснюватися), або не наступити, тобто результат випробування не можна напевне передбачити.*

Події поділяються на ***достовірні, неможливі*** та ***випадкові.***

Означення 3. *Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається достовірною.*

Приклади достовірних подій:

1. У земних умовах вода, нагріта до температури 100 С, набуває стану кипіння.

2. Якщо в урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10, то кулька, навмання взята із цієї урни, має номер, що міститься в межах від 1 до 10.

Означення 4. *Подія називається неможливою, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи.*

Приклади неможливих подій:

1. В урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10. Навмання береться одна кулька. Поява кульки з номером 12 буде подією неможливою.

2. Якщо на дослідній ділянці посіяти 100 зернин ячменю, то подія, яка полягає в тому, що на момент збирання врожаю на цій ділянці з'явиться колосок пшениці, є неможливою.

Означення 5. *Подія називається випадковою, якщо за певного комплексу умов у результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних дрібних факторів, урахувати які дослідник не в змозі.*

Події позначають літерами $A, B, C, \ldots$ або $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Приклади випадкових подій:

1. Монету підкидають один раз. (Тут і далі припускаємо, що падає монета на рівну і тверду підлогу.) Поява герба (цифри) – подія випадкова.

2. Якщо на дослідній ділянці в лабораторних умовах посіяно 100 зернин ячменю, то не можна передбачити наперед, скільки зернин проросте. Отже, подія, яка полягає в тому, що проросте від 1 до 100 зернин, є випадковою.

Означення 6. *Дві або декілька випадкових подій називаються рівноможливими, якщо умови їх появи однакові і вони мають однакові шанси відбутися.*

Теорія ймовірностей як один із розділів математики досліджує певний вид математичних моделей - моделі випадкових подій, а не самі такі події.

Немає принципів, є події; немає законів, є обставини; людина високого польоту сама пристосовується до подій і обставин, щоб керувати ними.

Оноре де Бальзак

Математичні моделі, як відомо, відбивають найістотніші властивості досліджуваних об'єктів, абстрагуючись від неістотних.

Для математичного опису випадкових подій - наслідків експерименту - застосовують такі точні поняття: *прості (елементарні)* та *складені випадкові події*, *простір елементарних подій*.

Означення 7. *Подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту), називається простою (елементарною) випадковою подією.*

Елементарні події позначаються ω_i (i = 1, 2, 3,…) і в теорії ймовірностей, так само як, скажімо, точка в геометрії, не поділяються на простіші складові.

Приклад 1. Монету підкидають один раз. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Можливі такі елементарні випадкові події:

ω_1 = г (монета випаде гербом);

ω_2 = ц (монета випаде цифрою).

Приклад 2. Монету підкидають тричі. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Триразове підкидання монети – це одна спроба. Елементарними випадковими подіями будуть:

ω_1 = ггг (тричі випаде герб);

ω_2 = ццц (тричі випаде цифра);

ω_3 = ггц (герб випаде двічі);

ω_4 = гцг (герб випаде двічі);

ω_5 = цгг (герб випаде двічі);

ω_6 = гцц (цифра випаде двічі);

ω_7 = цгц (герб випаде один раз);

ω_8 = ццг (цифра випаде двічі).

Отже, цьому експерименту відповідають вісім елементарних подій.

Приклад 3. Задано дві множини цілих чисел $\Omega_1=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\Omega_2=\{1, 2, 3, 4\}$. Із кожної множини навмання беруть по одному числу. Визначити елементарні події цього експерименту - появу пари чисел.

Розв'язання. Елементарними випадковими подіями будуть:

ω_1 = 1; 1; ω_5 = 2; 1; ω_9 = 3; 1;

ω_2 = 1; 2; ω_6 = 2; 2; ω_{10} = 3; 2;

ω_3 = 1; 3; ω_7 = 2; 3; ω_{11} = 3; 3;

ω_4 = 1; 4; ω_8 = 2; 4; ω_{12} = 3; 4.

Отже, цьому експерименту відповідають дванадцять елементарних подій.

Означення 8. *Випадкова подія називається складеною, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події.*

Складені випадкові події також позначають великими латинськими літерами.

Приклад 4. Задано множину чисел Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Навмання із цієї множини беруть одне число. Побудувати такі випадкові події: 1) з'явиться число, кратне 2; 2) число кратне 3; 3) число, кратне 5.

Розв'язання. Ці випадкові події будуть складеними. Позначимо їх відповідно A, B, C. Тоді A={2, 4, 6, 8, 10, 12}; B={3, 6, 9, 12}; C={5,10}.

Означення 9. *Елементарні випадкові події $\omega_i \in A$, $\omega_j \in B$, $\omega_k \in C$, які належать відповідно складеним випадковим подіям A, B, C, тобто є елементами цих множин, називають елементарними подіями, які сприяють появі кожної із зазначених подій внаслідок проведення експерименту (ω_i сприяють появі події A, ω_j - події B, ω_k - події C).*

Кожному експерименту (спробі) з випадковими результатами (наслідками) відповідає певна множина Ω елементарних подій ω_i, кожна з яких може відбутися (настати) внаслідок його проведення: $\omega_i \in \Omega$. Цю множину називають *простором елементарних подій*.

Приклад 5. Гральний кубик, кожна грань якого позначена певною цифрою від 1 до 6, підкидають один раз. При цьому на грані випадає одна із зазначених цифр. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту (множину Ω) і такі випадкові події: 1) A - випаде число, кратне 2; 2) B - випаде число, кратне 3.

Розв'язання. Оскільки кубик має шість граней, то в результаті експерименту може випасти одна із цифр від 1 до 6.

Отже, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; 1) A = {2, 4, 6}; 2) B = {3, 6}.

Приклад 6. Монету підкидають чотири рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події:

1) A - герб випаде двічі; 2) B - герб випаде не менш як тричі.

Розв'язання. Шуканий простір елементарних подій:

Ω = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, ццгг, ггцц, гццг, гцгц, цгцг, ццгг, цггц, гццц, цгцц, ццгц, цццг, цццц};

1) A = {ггцц, ццгг, гцгц, цгцг, гццг, цггц};

2) B = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг).

Простір елементарних подій може бути як дискретним, так і неперервним, обмеженим і необмеженим.

У розглянутих раніше прикладах простори елементарних подій були дискретними.

Приклади неперервних (недискретних) просторів елементарних подій дістанемо, розглянувши:

- розміри однотипних деталей (діаметр, довжина), які виготовляє робітник або верстат-автомат;
- покази приладів, що вимірюють масу, силу струму, напругу, опір і т. ін.

Отже, поняття елементарної події, простору елементарних подій є основними в теорії ймовірностей. Сама природа елементарних подій у теорії ймовірностей при цьому неістотна.

Простір елементарних подій є математичною моделлю певного ідеалізованого експерименту в тому розумінні, що будь-який можливий його наслідок описується однією і лише однією елементарною подією - наслідком експерименту.

Мовою теорії множин випадкова подія A означується як довільна непорожня підмножина множини Ω ($A \subset \Omega$).

Знаменна річ, що наука (теорія ймовірності), яка почалася з вивчення ігор, піднеслася до найважливіших об'єктів людського пізнання.

П. Лаплас

1.1.2. Операції над подіями

Операції над подіями – це операції над підмножинами, тому звичайні властивості операцій над множинами переносяться на операції над подіями.

Запис $A \subset B$ (читається: A підмножина B) означає, що кожен елемент множини A належить множині B.

Означення 10. *Множини A і B називаються рівними (A=B), якщо* $A \subset B$ *і* $B \subset A$.

Означення 11. *Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою Ø.*

Означення 12. *Сума (об'єднання)* $A \cup B$ *множин A і B є множина тих, і тільки тих елементів, які належать принаймні одній з множин A і B.*

Означення 13. *Добуток (переріз)* $A \cap B$ *множин A і B є множина тих, і тільки тих елементів, які належать A і B.*

Означення 14. *Різниця A\B множин A і B є множина тих, і тільки тих елементів, які належать A і не належать B.*

Означення 15. *Доповнення* $\overline{A}$ *до множини A є множина тих, і тільки тих елементів множини* Ω*, які не належать A (* $\overline{A} = \Omega / A$*).*

Означення 16. *Симетрична різниця* $A \Delta B$ *множин A і B є множина* $(A/B) \cup (B/A)$.

Множини A і B не перетинаються, якщо $A \cap B = Ø$.

Для геометричної ілюстрації операцій над подіями зручно користуватися *діаграмами Ейлера* – плоскими фігурами (круги, прямокутники, еліпси тощо), які інтегруються як події та множини подій. Для цього множину Ω будемо зображати у вигляді прямокутника, а події, породжені реалізацією певної сукупності умов S – кругами або еліпсами в цьому прямокутнику. Результат виконання операцій над подіями на діаграмах Ейлера будемо відображати затінюванням відповідних фігур або штрихуванням.

Означення 17. *Сумою або об'єднанням подій A та B називається така подія C, яка полягає у настанні події A, або події B, або подій A та B одночасно.*

Отже, якщо $\Omega_A, \Omega_B, \Omega$ відповідно множини окремих реалізацій події *A, B* та суми цих подій, то $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$. Суму подій *A* та *B* будемо позначати: $C=A+B$, або $C=A \cup B$.

Означення 18. *Сумою або об'єднанням будь-якого числа подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ називається подія C, яка полягає в настанні хоч би однієї з цих подій і записується так:* $C = \sum_{i=1}^{n} A_i$ *або* $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Означення 19. *Добутком подій A та B називається така подія C, яка полягає в одночасному виконанні події A і події B відповідно.*

Отже, якщо $\Omega_A, \Omega_B, \Omega$ відповідно множини окремих реалізацій подій *A, B* та добутку цих подій, то $\Omega = \Omega_A \cap \Omega_B$. Добуток подій *A* та *B* будемо позначати $C=A \cdot B=A \times B$.

Означення 20. *Добуток подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ полягає в одночасному настанні всіх n подій і записується так:* $C = \prod_{i=1}^{n} A_i$ *або* $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Означення 21. *Різницею подій A і B називається подія C, яка полягає в тому, що подія A відбувається, а подія B – ні.*

Означення 22. *Симетрична різниця –* $C=A \Delta B$ *є такою подією, в яку входять ті елементарні події, які входять в A чи B, але не входять в їх перетин* $A \cap B$*. Отже, симетрична різниця може бути представлена таким чином:* $C=A \Delta B=(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Отже, діаграми Ейлера введених операцій над подіями такі:

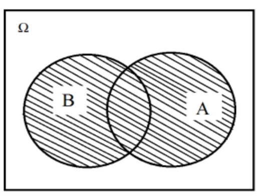


Рис.1.1.1. $C=A+B$

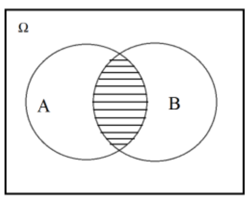


Рис. 1.1.2. $C=A \times B$

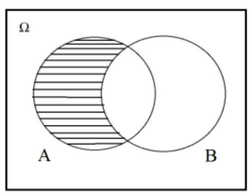


Рис. 1.1.3. $C=A \backslash B$

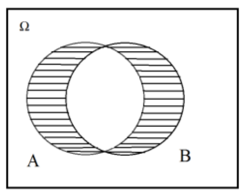


Рис. 1.1.4. $C=A \Delta B$

Приклад 7. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати випадкові події: 1) *A* - узяте число кратне 2; 2) *B* - кратне 3. Визначити $A \cup B$; $A \cap B$; $A \backslash B$.

Розв'язання. 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Звідси дістаємо:

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$;

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{6, 12\}$;

$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \setminus \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$.

Означення 23. *Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають сумісними.*

Означення 24. *Якщо $A \cap B = \varnothing$, то такі випадкові події A і B називають несумісними.*

Означення 25. *Якщо $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ldots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, то такі випадкові події утворюють повну групу, а саме: внаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.*

Приклад 8. При одноразовому підкиданні грального кубика обов'язково з'явиться одна із цифр, що є на його гранях, а саме: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 4$, $A_5 = 5$, $A_6 = 6$. Отже, випадкові події $A_i(i = \overline{1,6})$ утворюють повну групу:

$\bigcup\limits_{i=1}^{6} A_i = \Omega = = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Означення 26. *Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають протилежними.*

Кожній випадковій події *A* можна поставити у відповідність іншу випадкову подію, яку будемо називати протилежною до неї, доповненням до події *A*, запереченням цієї події.

Означення 27. *Протилежною подією до події A називається така подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що подія A не відбувається.*

Протилежні події у просторі елементарних подій ілюструє рис. 1.1.5. Він унаочнює також співвідношення:

$A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

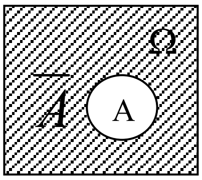


Рис. 1.1.5.

Випадкові події A, B, C ($A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$, $C\subset\Omega$), для яких визначено операції додавання, множення та віднімання, підлягають таким законам:

1. $\overline{\overline{A}} = A$

2. $A+B=B+A$

3. $AB=BA$

комутативний (переставний) додавання і множення

4. $(A+B)+C=A+(B+C)$

5. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

асоціативний (сполучний) додавання і множення

6. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ 1-й дистрибутивний

7. $A\cdot B+C=(A+C)\cdot(B+C)$ 2-й дистрибутивний

8. $A+A=A$

9. $A\cdot A=A$

10. $A+\overline{A}=U$

11. $A\cdot\overline{A}=V$

12. $A\cdot U=A$

13. $A+V=A$

14. $A+U=U$

15. $A\cdot V=V$

U – достовірна подія; V – неможлива подія.

16. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

17. $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

закони двоїстості

Аналогічно безпосередньо з означень суми і добутку подій для будь-яких подій A і B випливають співвідношення :

1). $AB\subset A$, $AB\subset B$;

2). $A\subset A+B$, $B\subset A+B$;

3). якщо $A\subset C$ і $B\subset C$, то і $A+B\subset C$;

4). якщо $C\subset A$ і $C\subset B$, то $C\subset AB$.

Звідси отримуємо ще два співвідношення:

5). якщо $A \subset B$, то $A+B=B$;

6). якщо АВ, то $AB=A$.

Елементарні випадкові події задовольняють такі твердження: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: усі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.

Для дискретного простору Ω перші два твердження можна записати так:

1) $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, $i \neq j$; 2) $\bigcup_{i=1} \omega_i = \Omega$.

Для кількісного вимірювання появи випадкових подій і їх комбінацій вводиться поняття ймовірності події, що є числом такої ж природи, як і відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

Сторінки історії

Комбінаторика, як наука, бере своє коріння ще зі школи піфагорійців (IV–III ст. до н.е.). Системні дослідження з питань комбінаторики містяться у роботах Леві ен Герсона (XVIII ст.), він отримував рекурентну формулу для обчислення числа розміщень з *n* об'єктів по *p*. Слово «**комбінаторика**» вперше зустрічається в роботі Лейбніца (1666 р.) «Міркування про комбінаторне мистецтво», яке містило ряд теорем про сполучення та перестановки. Автор проголошував широке застосування комбінаторики як самостійної науки до військового мистецтва, граматики, логіки, юриспруденції, медицини і богослов'я. Лейбніц обмірковував задум, що комбінаторика повинна займатися однаковим і різним, схожим і несхожим, абсолютним і відносним місцем розташування.

Доктор фізико-математичних наук, професор К.О. Рибніков поділив розвиток комбінаторного аналізу на три періоди:

1)до XVI ст. включно – накопичення комбінаторних фактів;

2)з XVIIст. до середини XIX ст. – від оформлення комбінаторики до створення комбінаторної школи (формування теорії сполук для вирішення загальних проблем теорії чисел, музики та ін., становлення комбінаторного числення);

3)з середини XIX ст. – розвиток сучасного комбінаторного аналізу.

Дослідження становлення фундаментального розділу комбінаторного аналізу – теорії сполук – повністю підтверджує обґрунтованість цих тимчасових кордонів трьох періодів.

1.1.3. Елементи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, що вивчає способи підрахунку числа можливих вибірок із деякої скінченої множини згідно із заданими правилами вибору.

Кожне таке правило визначає спосіб, як із елементів даної множини побудувати деяку підмножину, яку називають комбінаторною конструкцією. Тому можна сказати, що метою комбінаторики є вивчення комбінаторних конфігурацій та числа їх можливих реалізацій.

Основне завдання комбінаторики – це задача розміщення об'єктів відповідно до спеціальних правил і знаходження числа способів, яким це розміщення може бути виконано.

Елементарну теорію комбінаторики можна побудувати на основі аналізу ряду основних схем вибору предметів за якоюсь ознакою із даної групи предметів. У свою чергу, методика аналізу таких схем будується на міркуваннях, які зручно формулюються у вигляді двох основних комбінаторних правил.

Правило суми. Якщо предмет A може бути вибраним m способами, а предмет B іншими n способами (тобто ці вибори взаємовиключні), та вибір одного з предметів або A, або B може бути виконаним $m+n$ способами.

Узагальнене правило суми. Якщо предмет A_1 може бути вибраним m_1 способами, предмет A_2 іншими m_2 способами,…, предмет A_r іншим m_r способами, то вибір одного з предметів або A_1, або A_2 …, або A_r може бути виконаним $\sum_{i=1}^{r} m_i$ способами.

Правило добутку. Якщо предмет A може бути вибраним m способами і після кожного такого вибору предмет B може бути вибраним n способами (незалежно від того, який предмет A обрано), то сумісний вибір A і B, тобто впорядкована пара *(A,B)* може бути виконано $n \times m$ способами.

Узагальнене правило добутку. Якщо предмет A_1 можна вибрати m_1 способами, предмет A_2 – m_2 способами,…, предмет A_r - m_r способами, причому вибір кожного з них не впливає на вибір іншого, то вибір впорядкованої системи предметів *(A_1, A_2,…, A_r)* може бути виконаний $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r$ способами.

При розв’язуванні задач з теорії ймовірностей побудувати простір елементарних подій (множину Ω) можна не завжди.

Для більшості прикладних задач така побудова пов’язана з виконанням великого обсягу робіт, а нерідко й взагалі неможлива. Щоб обчислити ймовірність тієї чи іншої випадкової події для певного класу задач із дискретним і обмеженим простором елементарних подій, необхідно вміти обчислити кількість n усіх елементарних подій (елементів множини Ω) і число m елементарних подій, які сприяють появі випадкової події.

Існує клас задач, в яких для обчислення n і m використовуються елементи комбінаторики: переставлення, розміщення та комбінації. У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів.

Говорячи про множини і підмножини, на порядок розміщення їх елементів не зважають. Крім таких (невпорядкованих) множин розглядають і впорядковані множини.

Означення 28. *Під операцією впорядкування n-елементної множини розуміють операцію присвоєння кожному елементу одного із n різних номерів, наприклад, із сукупності {1,2,…,n}. Іншими словами: множина називається впорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлено відповідно номер елемента від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа.*

В протилежному випадку множина називається *невпорядкованою.*

Кожну скінчену множину можна перетворити у впорядковану, якщо переписати всі елементи множини у деякий список, а потім поставити у відповідність кожному елементу номер місця, на якому він стоїть у списку.

Означення 29. *Перестановка з n елементів – це впорядкована множина, утворена з усіх даних елементів.*

Означення 30. *Перестановкою із n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення.*

Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots (n-1)\, n\,, \qquad (1.1.1.)$$

де n набуває лише цілих невід'ємних значень.

Оскільки $n! = n\,(n-1)!$, то при $n = 1$ маємо

$$1! = 0!$$

Отже, 0! = 1.

Приклад 9. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер

Я, І, Р, Е, О, Т.

Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово

Т	Е	О	Р	І	Я

?

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій (елементів множини Ω)

$$n = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ, m=1. Позначивши розглядувану подію через B, дістанемо:

$$P\,(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}\,.$$

Приклад 10. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Її елементи навмання розставляють у рядок. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

A - розставлені в ряд числа утворюють зростаючу послідовність;

B - спадну послідовність;

C - цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 - на останньому;

D - цифри утворять парне п'ятицифрове число.

Розв'язання. Простір елементарних подій для цього експерименту міститиме $n = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ несумісних, рівноймовірних елементарних подій.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі A, дорівнює одиниці ($m_1=1$).

Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, дорівнює одиниці ($m_2=1$).

Для випадкової події C: $m_3 = 3!$

Для випадкової події D: $m_4 = 4! \cdot 2 = 48$.

Обчислюємо: $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{120}$; $P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{1}{120}$;

$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{3!}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$; $\quad \mathrm{P}(\mathrm{D}) = \frac{m_4}{n} = \frac{4! \cdot 2}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{15}$.

Означення 31. *Розміщенням із n елементів по m ($0 \le m \le n$) називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів.*

Кількість таких множин обчислюється за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1) \text{ або } \mathrm{A}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (1.1.2.)$$

Наприклад, $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Приклад 11. Маємо дев'ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо

1	9	7	3

?

Розв'язання. Кількість елементарних подій множини Ω буде $n = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі 1, 9, 7, 3, дорівнює одиниці ($m = 1$). Позначимо цю випадкову подію через B. Тоді

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{1}{A_9^4}=\frac{1}{3024}.$$

Приклад 12. У кімнаті перебувають 10 студентів. Яка ймовірність того, що два і більше студента не мають спільного дня народження?

Розв'язання. Вважаємо, що рік має 365 днів. Для кожного студента в загальному випадку існує 365, а для 10 студентів - 365^{10} можливих днів народження. Отже, маємо $n = 365^{10}$ елементарних подій множини Ω. Позначимо через *B* випадкову подію, яка полягає в тому, що дні народження студентів не збігаються. Кількість елементарних подій, що сприяють появі *B*, $m = A_{365}^{10}$.

Остаточно маємо: $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{A_{365}^{10}}{(365)^{10}}$.

Означення 32. *Комбінаціями з n елементів по* $m(0 \le m \le n)$ *називаються невпорядковані множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом.*

Кількість таких множин

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n!}{m!(n-m)}. \qquad (1.1.3.)$$

При цьому за означенням вважають, що 0!=1.

Розглянемо найважливіші властивості чисел:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$;

3) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

У цьому зв'язку числа виду C_n^k називають *біноміальними коефіцієнтами.*

Приклад 13. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в працездатному стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

Розв’язання. Оскільки кожен верстат-автомат може перебувати у двох несумісних станах - працездатному або непрацездатному, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію - із ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A, буде

$$m = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 120 .$$

Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{2^{10}} = \frac{120}{2^{10}} .$$

Приклад 14. В шафі міститься 10 однотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта бракованими. Навмання із шафи беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

A - усі чотири деталі виявляться стандартними;

B - усі чотири деталі виявляться бракованими;

D - із чотирьох деталей виявляться дві стандартними і дві бракованими.

Розв’язання. Кількість усіх елементарних подій множини Ω

$$n = C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 3\cdot 6} = 210 ;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події A:

$$m_1 = C_6^4 = \frac{6!}{2!\,4!} = 15 ;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі B:

$$m_2 = C_4^4 = \frac{4!}{4!\,0!} = 1 ;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі D:

$$m_3 = C_6^2\ C_4^2 = 15\cdot 6 = 90 .$$

Обчислимо ймовірності цих подій:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{630} = \frac{3}{112} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14} ;$$

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210} ;$$

$$P(D) = \frac{m_3}{n} = \frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} .$$

Сторінки історії

Введення класичного визначення ймовірності відбулося не в результаті одноразової дії, а зайняло тривалий проміжок часу, протягом якого відбувалося безперервне вдосконалення формулювання, перехід від часткових задач до загального випадку. Ще в книзі Гюйгенса «Про розрахунки в азартних іграх» (1657 р.) немає поняття ймовірності як числа, встановленого між 0 і 1 і рівного відношенню числа подій, що сприяють появі заданої події до числа всіх можливих. А в трактаті Я. Бернуллі «Мистецтво припущень» (1713 р.) це поняття запроваджено, хоча й у недосконалій формі. Бернуллі дав таке визначення ймовірності: «Ймовірність є ступінь достовірності і відрізняється від неї, як частина від цілого. Класичне визначення ймовірності Я. Бернуллі описує як відношення кількості «щасливих» випадків до кількості усіх можливих.

А. Муавр прийняв класичне визначення ймовірності, дане Бернуллі, і ймовірність події визначив в точності так, як це робимо ми тепер. Він писав: «Отже, ми будуємо дріб, чисельник якого буде число випадків появи події, а знаменник число всіх випадків, за яких вона може настане або не настане, такий дріб буде висловлювати дійсну ймовірність її появи». Муавр, як і Бернуллі не загострював увагу на тому, що шанси мають бути рівноймовірними. Це зауваження вперше було введено у визначення класичної ймовірності лише П. Лапласом в його «Аналітичній теорії ймовірностей».

Магістр філософії Зигизмунт Ревковський в 1829–1830 р.р. уперше в Росії став читати курс теорії ймовірностей. Ймовірність він називав мірою надії, величиною надії і давав їй класичне означення.

Наступний важливий крок зробив англійський математик Томас Сімпсон, який у процесі занять чисельним аналізом у книзі «Природа і закони випадку» (1740 р.) фактично використовував третє (поряд з класичним і статистичним) визначення ймовірності – геометричне, придатне для дослідження неперервних випадкових величин з нескінченним числом значень. У задачі Сімпсон знайшов ймовірність того, що навмання кинутий на площину паралелепіпед зупиниться на своїй грані. В основу цього покладено принципи розвідки геометричних ймовірностей: вводиться міра безлічі сприятливих події випадків і береться її відношення до міри множини всіх можливих випадків.

Підхід Сімпсона розвинув Бюффон, який двічі публікував роботи, присвячені геометричним ймовірностям.

Перша публікація відноситься до 1733 р., коли він зробив у Паризькій академії наук доповідь, надруковану під назвою «Мемуар про гру під назвою франк-карі». Мета, яку ставив перед собою Бюффон, полягала в тому, щоб показати, що «геометрія може бути використана в якості аналітичного інструменту в галузі теорії ймовірностей». У 1777 році Бюффон навів класичний приклад завдання на геометричну ймовірність. Це була так звана «задача Бюффона»: площина розграфлена «в лінію», на яку навмання кидається голка, потрібно знайти ймовірність того, що голка перетне лінію.

Після Бюффона завдання на геометричні ймовірності стали систематично включатися в трактати і підручники з теорії ймовірностей. У прекрасному для свого часу підручнику «Підстави математичної теорії ймовірностей» (1846 р.) В.Я. Буняковського є великий розділ, присвячений геометричній ймовірності.

Серйозний крок у розвитку геометричних ймовірностей пов'язаний з іменами Ламі, Барб'є, D. Сильвестра, М. Крофтона, які не просто поставили нові завдання, а й залучили до їх розв'язання поняття міри множини. На основі їх поглядів пізніше виникла нова гілка геометрії, що отримала назву інтегральна геометрія.

1.1.4. Класичне та геометричне означення ймовірності події

Існує декілька означень ймовірності. Ознайомимось з ними.

Означення 33. *Для порівняння випадкових подій за степенем їх можливості треба кожну подію пов'язати з певним числом, яке повинно бути тим більше, чим більш можлива подія. Таке число р називають імовірністю події.*

Означення 34. *Імовірність події є чисельна міра степеня об'єктивної можливості цієї події.*

Означення 35 (класичне). *Імовірністю випадкової події A називається невід'ємне число P(A), що дорівнює відношенню числа елементарних подій m (0 ≤m≤n), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:*

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1.4.}$$

Зауваження. Класичне означення ймовірності має місце лише тоді, коли m та n скінчені, усі елементарні наслідки рівноможливі (саме таке становище у більшості азартних ігор, що здійснюються без шахрайства).

Якщо множина елементарних наслідків нескінчена або елементарні наслідки не рівноможливі, то формулою (1.1.4.) користуватись не можна.

Приклад 15. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта - стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Розв'язання. Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту:

$$n = 15.$$

Нехай A - подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти ($m = 9$). Згідно з (1.1.4.) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Приклад 16. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що на грані кубика з'явиться число, кратне 3?

Розв'язання. Число всіх елементарних подій для цього експерименту $n = 6$. Нехай B - поява на грані числа, кратного 3. Число елементарних подій, що сприяють появі B, дорівнює двом ($m = 2$).

Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Імовірність – ступінь вірогідності і відрізняється від неї, як частина від цілого.

Я. Бернуллі

Приклад 17. Два гральні кубики підкидають по одному разу. Побудувати простір елементарних подій - множину Ω і такі випадкові події:

A - сума цифр виявиться кратною 4;

B - сума цифр виявиться кратною 3.

Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання. Простір елементарних подій - множину Ω запишемо у вигляді таблиці:

Кубик 2-й	Кубик 1-й					
	1	2	3	4	5	6
1	1,1	**1,2**	**1,3**	1,4	**1,5**	1,6
2	**2,1**	**2,2**	2,3	**2,4**	2,5	**2,6**
3	**3,1**	3,2	**3,3**	3,4	**3,5**	**3,6**
4	4,1	**4,2**	4,3	**4,4**	**4,5**	4,6
5	**5,1**	5,2	**5,3**	**5,4**	5,5	5,6
6	6,1	**6,2**	**6,3**	6,4	6,5	**6,6**

Отже, простір елементарних подій Ω містить $n = 36$ пар чисел.

Події *A* і *B* визначимо з допомогою побудованої таблиці наступним чином: елементарні події, які сприяють появі *A* (сума цифр кратна 4), заштриховані вертикальними лініями, а для *B* (сума кратна 3) - горизонтальними лініями. Звідси маємо: число елементарних подій, що сприяють появі *A*, дорівнює дев'яти (m_1=9), а число елементарних подій, що сприяють появі *B*, - дванадцяти (m_2=12), число елементарних подій, що сприяють появі події $A \cap B$, дорівнює одиниці (m_3=1).

Остаточно дістаємо:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}; \quad P(A \cap B) = \frac{m_3}{n} = \frac{1}{36}.$$

Приклад 18. У кожній із трьох урн містяться червоні та сині кульки. Із кожної урни навмання беруть по одній кульці. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту - множину Ω і такі випадкові події:

A - серед трьох навмання взятих кульок дві виявляться червоного кольору;

B - серед трьох кульок дві виявляються синього кольору.

Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання. Позначимо появу кульки червоного кольору як Ч, а синього кольору як С. Тоді простір елементарних подій буде такий: Ω= {ЧЧЧ, ЧЧС, ЧСЧ, СЧЧ, ЧСС, СЧС, ССЧ, ССС}, $n = 8$. Події: A = {ЧЧС, ЧСЧ, СЧЧ}, $m_1 = 3$; B = {ССЧ, СЧС, ЧСС}, $m_2 = 3$. Події A і B є несумісними ($A \cap B = \varnothing$).

Обчислюємо: $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{3}{8}$; $P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{3}{8}$; $P(A \cap B) = 0$.

Приклад 19. В електричну мережу увімкнено чотири електролампочки. При проходженні електричного струму в мережі кожна електролампочка із певною ймовірністю може перегоріти або не перегоріти. Побудувати простір елементарних подій (множину Ω) - числа електролампочок, які не перегорять, і такі випадкові події:

A - із чотирьох електролампочок перегорять не більш як дві;

B - не менш як три.

Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання. Нехай A_i ($i = \overline{1,4}$) відповідно першу, другу, третю та четверту електролампочку, що не перегорять, а $\overline{A_i}$ - що перегорять. Тоді простір елементарних подій буде:

$\Omega = \{A_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}, A_1 A_2 \overline{A_3} A_4,\ A_1 \overline{A_2} A_3 A_4,\ \overline{A_1} A_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 \overline{A_3}\, \overline{A_4},$ $\overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3 A_4,\ \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4,\ A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4},\ A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3} A_4,\ \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4},\ A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3}\, \overline{A_4},\ \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}\, \overline{A_4},$ $\overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3 \overline{A_4},\ \overline{A_1}\, \overline{A_2}\, \overline{A_3} A_4,\ \overline{A_1}\, \overline{A_2}\, \overline{A_3}\, \overline{A_4}\},\quad n = 16.$

Випадкові події:

$A = \{A_1 A_2 \overline{A_3}\, \overline{A_4},\ \overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3 A_4,\ A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4},\ \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4,\ A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3} A_4,\ \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4},$ $\overline{A_1} A_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A_2} A_3 A_4, A_1 A_2 \overline{A_3} A_4, A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}, A_1 A_2 A_3 A_4\}$, $m_1 = 11$.

$B = \{\ A_1 A_2 \overline{A_3}\, \overline{A_4},\ \overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3 A_4,\ A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4},\ \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4,\ A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3} A_4,\ \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4},$ $A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3}\, \overline{A_4},\ \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}\, \overline{A_4},\ \overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3 \overline{A_4},\ \overline{A_1}\, \overline{A_2}\, \overline{A_3} A_4,\ \overline{A_1}\, \overline{A_2}\, \overline{A_3}\, \overline{A_4}\}$, $m_2 = 11$.

$A \cap B = \{\ A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2\ \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4\ \}$, $m_3 = 6$.

Обчислюємо: $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{11}{16}$; $P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{11}{16}$; $P(A \cap B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Властивості ймовірності:

1. Ймовірність кожної події є відповідним числом з інтервалу [0;1], тобто

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (1.1.5.)$$

Дійсно, сприятливих подій для кожної події не більше, ніж всіх подій у відповідній повній сукупності подій, тобто $0 \le k \le n$.

2. Ймовірності еквівалентних подій рівні, тобто, якщо $A=B$, *то* $P(A)=P(B)$.

3. Ймовірність достовірної події рівна одиниці, тобто $P(\Omega) = 1$.

Дійсно, для достовірної події сприятливими є всі події відповідної повної сукупності подій, тобто $m = n$.

4. Ймовірність неможливої події рівна нулю, тобто $P(\varnothing) = 0$.

Це випливає з того, що для неможливої події немає сприятливих подій, тобто $m=0$.

5. Ймовірності події A та протилежної події $\overline{A}$ задовольняють співвідношення:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (1.1.6.)$$

Якщо відповідна повна сукупність подій містить n подій і k з них сприятливі для події A, то для протилежної події $\overline{A}$ сприятливими є $n - k$ тих подій, які не є сприятливими для події A. Тому $P(\overline{A}) = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P(A)$.

На практиці обчислити ймовірності випадкових подій можна лише для обмеженого класу задач як для дискретних, так і для неперервних просторів елементарних подій (множини Ω). Для більшості задач, особливо економічних, обчислити ймовірності практично неможливо. У цьому разі використовується статистична ймовірність.

Насамперед введемо поняття відносної частоти випадкової події $W(A)$.

Означення 36. *Відносною частотою випадкової події A називають відношення кількості експериментів m, при яких подія A спостерігалася, до загальної кількості n проведених експериментів.*

Відносну частоту події A позначають $W(A)$. Отже,

$$W(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1.7.}$$

Властивості відносної частоти**:**

1. Відносна частота знаходиться в межах $0 \le W(A) \le 1$.
2. Відносна частота достовірної події дорівнює 1: $W(\Omega)=1$.
3. Відносна частота неможливої події дорівнює 0: $W(\varnothing)=0$.
4. Відносна частота $W(\overline{A})=1-W(A)$.
5. Якщо A і B несумісні, то $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$.
6. У загальному випадку $W(A \cup B)= W(A) + W(B) - W(A \cap B)$.
7. Якщо $A \subseteq B$, то $W(A) \le W(B)$.

Багаторазові спостереження показали, якщо в однакових умовах проводити випробування, в кожному з яких число експериментів достатньо велике, то відносна частота виявляє *властивості стійкості.* Ця властивість полягає в тому, що в різних випробуваннях відносна частота події змінюється мало (тим менше, чим більше проведено випробувань), коливаючись біля деякого постійного числа.

Теорія ймовірностей використовується для опису тільки таких експериментів, для яких виконується таке припущення: *для будь-якої події A відносна частота здійснення цієї події у будь-якій нескінченній серії випробувань має один і той самий ліміт (границю), який називається ймовірністю здійснення події A.* Тому, якщо розглядати ймовірність здійснення довільної події, то треба розуміти під цим таке: це відносна частота здійснення події в нескінченній (досить довгій) серії випробувань.

Теорія ймовірностей вивчає лише такі випадкові події, в яких спостерігається стабільність відносних частот, а саме: у разі проведення k серій експериментів існує така константа $P(A)$, навколо якої групуватимуться відносні частоти досліджуваної випадкової події A, тобто $W_i(A)$. І це групування буде тим ближчим до цієї константи, чим більшим буде число n експериментів.

На рис. 1.1.6. показано, як $W_i(A)$ змінюється зі збільшенням n експериментів.

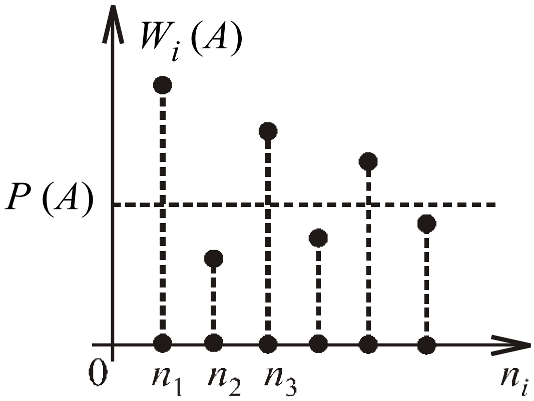


Рис. 1.1.6.

Ймовірність випадкової події визначається так: упевнившись, що існує стабільність відносних частот випадкової події $W_i\,(A)$, задаємось малим додатним числом ε і проводимо серії експериментів, збільшуючи їх число n. Якщо на якомусь кроці серії експериментів виконуватиметься нерівність $|W_i - W_{i-1}| < \varepsilon$, то за ймовірність випадкової події береться одне з чисел W_i або W_{i-1}. Ця ймовірність називається *статистичною*.

Означення 37. *Статистична ймовірність – це відносна частота або число близьке до неї.*

Класичне означення ймовірності придатне лише для експериментів з обмеженим числом рівномірних елементарних подій, тобто коли множина Ω (простір елементарних подій) обмежена.

Якщо множина Ω є неперервною, то для обчислення ймовірності A ($A \subset \Omega$) використовується геометрична ймовірність.

Означення 38 (геометричне). *Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню міри A до міри Ω:*

$$P\,(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}\,. \tag{1.1.8.}$$

Якщо множина вимірюється в лінійних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню довжини, якщо Ω вимірюється у квадратних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню площ, і т. ін.

Приклад 20. По трубопроводу між пунктами A і B перекачують нафту. Яка ймовірність того, що пошкодження через певний час роботи трубопроводу станеться на ділянці довжиною 100 м.

Розв'язання. Простір елементарних подій $\Omega=\{0 \le l \le 2\,км\}$, тоді $A=\{0 \le l \le 0{,}1\text{ км}\}$ $(A \subset \Omega)$.

Згідно з (1.1.8.) маємо:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{l_1}{l} = \frac{0{,}1}{2} = \frac{1}{20}.$$

Приклад 21. Задана множина $\Omega = (0 \le x \le e,\ 0 \le y \le 1)$. Яка ймовірність того, що навмання взяті два числа $(x,\ y)$ утворять координати точки, яка влучить в область $A = (1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln x)$?

Розв'язання. Множини Ω і A зображені на рис. 1.1.7.

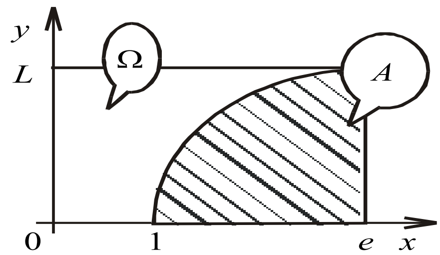


Рис. 1.1.7.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_1^e \ln x dx}{e} = \frac{x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx}{e} = \frac{x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e}{e} = \frac{e - e + 1}{e} = \frac{1}{e}.$$

Загалом функції дійсних змінних бувають визначеними не на всій множині дійсних чисел, а лише на певній її підмножині, яку називають областю визначення функції.

Імовірність також не завжди можна визначити для будь-яких підмножин множини Ω (простору елементарних подій). Тому доводиться обмежуватися певним класом підмножин, до якого висуваються вимоги замкненості відносно операцій додавання, множення та віднімання.

Якщо A і B є несумісними ($A \cap B = \varnothing$), то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (1.1.9.)$$

Приклад 22. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, \ldots, 30\}$. Навмання з цієї множини беруть одне число. Яка ймовірність того, що воно виявиться кратним 5 або 7?

Розв'язання. Простір Ω містить $n = 30$ елементарних подій.

Позначимо через A подію, що полягає в появі числа, кратного 5, а через B – кратного 7. Тоді дістанемо:

$$A = (5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30),\ \ m_1 = 6;$$

$$B = (7,\ 14,\ 21,\ 28),\ \ m_2 = 4;$$

$$A \cap B = \varnothing.$$

Згідно з (1.1.9.) маємо:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{6}{30} + \frac{4}{30} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 23. Садівник восени посадив 10 саджанців яблуні. Кожний із саджанців може прийнятись або не прийнятись із певною ймовірністю. Яка ймовірність того, що з 10 саджанців навесні наступного року приймуться 6 або 2?

Розв'язання. Множина Ω містить $n=2^{10}$ елементарних подій. Нехай A - випадкова подія, яка полягає в тому, що число саджанців, котрі проросли, дорівнює 6; B - число саджанців, що проросли, дорівнює 2.

Кількість елементарних подій, які сприяють появі A:

$$m_1 = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = 210.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі B:

$$m_2 = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

Оскільки $A \cap B = \varnothing$, маємо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{210}{2^{10}} + \frac{45}{2^{10}} = \frac{255}{2^{10}}.$$

Приклад 24. У ящику міститься 13 однакових деталей, серед яких 5 є бракованими, а решта - стандартними. Навмання з ящика беруть чотири деталі. Яка ймовірність того, що всі чотири деталі виявляться стандартними або бракованими?

Розв'язання. Множина Ω містить $n = C_{13}^4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 715$ елементарних подій. Позначимо через A появу чотирьох стандартних деталей. Кількість елементарних подій, що сприяють появі A: $m_1 = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$. Позначимо через B появу чотирьох бракованих деталей. Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, $m_2 = C_5^4 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$.

Згідно з (1.1.9.) дістанемо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{C_8^4}{C_{13}^4} + \frac{C_5^4}{C_{13}^4} = \frac{70}{715} + \frac{5}{715} = \frac{75}{715} = \frac{15}{143}.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається достовірною, неможливою подією? Навести приклади.

2. Яка подія називається випадковою? Навести приклади.

3. Яка подія називається елементарною; складеною випадковою подією? Навести приклади.

4. Які події називаються рівноможливими?

5. Що називається простором елементарних подій? Навести приклади.

6. Що називається сумою двох випадкових подій A і B?

7. Що називається добутком двох випадкових подій A і B?

8. Що називається різницею двох випадкових подій A і B?

9. Дати класичне означення ймовірності випадкової події.

10. Що називається перестановкою із n елементів, розміщенням із n елементів по m, комбінацією із n елементів по m?

11. Відомо, що $A \cap B \neq \emptyset$. Чому дорівнює $P(A \cup B)$? Довести.

12. Відомо, що випадкові події *A, B, C* є попарно сумісними і сумісними в сукупності. Довести, що $P(A \cup B \cup C) =$ ...

13. Відомо, що випадкові події *A, B, C, D* є попарно і в сукупності сумісними. Довести, що $P(A \cup B \cup C \cup D) =$ ...

14. Що називається відносною частотою випадкової події?

15. Що називається геометричною ймовірністю?

16. Що таке статистична ймовірність?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. У графіку руху на дільниці є 120 колій для вантажних потягів. На станцію з цієї дільниці прибувають 80 потягів для розбірки. Яка ймовірність прибуття потягу по одній колії (подія *A*)? *Відповідь.* $P(A) = \frac{2}{3}$.

2. У філії банку працює 6 співробітників, які займають всі свої робочі місця. Скільки існує різних способів пересадити співробітників? *Відповідь.* 719.

3. Лічильна комісія складається з голови, його заступника і ще трьох членів. Скількома способами вони можуть розподілити між собою обов’язки? *Відповідь.* 20.

4. До відділу магазину надійшло 15 виробів, серед яких 10 вищого ґатунку. Для контролю навмання відібрали 3 вироби без повернення. Знайти ймовірність того, що всі виробити виявляться вищого ґатунку. *Відповідь.* $P(A) = \frac{24}{91}$.

5. Адміністративно-управлінський персонал підприємства складається з 7 осіб. Скільки можна скласти варіантів обрання з їх числа трьох керівників – директора, фінансового та креативного директорів? *Відповідь.* 210.

6. Працівник безпеки фірми виявив 6 харчових пакетів з закінченим терміном придатності серед випадково відібраних 100 однакових харчових пакетів. Знайти відносну частоту появи харчових пакетів з закінченим терміном придатності. *Відповідь.* 0,06.

7. В дозвільному центрі працює 5 консультантів та 7 фахівців з надання адміністративних послуг. Скількома способами можна відібрати 2 консультанти та 3 фахівці, якщо всі вони вважаються рівноцінними? *Відповідь.* 350.

8. Торговельна мережа одержала 50 телефонів, з яких 5 бракованих. Навмання для перевірки взяли 3. Яка ймовірність того, що серед взятих телефонів будуть один бракований та два стандартних? *Відповідь.* $P(A)=\frac{99}{392}$.

9. Для проходження практики 30 студентам виділено 15 місць на першій фірмі, 8 місць – на другій та 7 місць – на третій фірмі. Визначити кількома способами можна розподілити студентів по фірмах так, щоб 3 певних студенти попали на одну фірму, вважаючи розподіл рівномірним. *Відповідь.* 546.

10. В ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі ввійшли три ремонтники. Кожний з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що ремонтники вийдуть на різних поверхах. *Відповідь.* $P(A)=\frac{5}{54}$.

11. Запропонуйте розв'язування однієї із задач 1-10 із використанням інформаційних технологій, використовуючи методику описану у розділі 3.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Розглянемо сім'ї, які мають по двоє дітей. Експеримент полягає в тому, що навмання вибирають сім'ю і фіксують стать дитини. Елементарний результат ХД означає, що старша дитина – хлопчик, молодша – дівчинка. Описати простір елементарних подій експерименту.

Варіанти відповідей:

a. $\Omega=\{XX, ДД\}$;

b. $\Omega=\{ХД, ДХ\}$;

c. $\Omega=\{XX, ДД, ХД, ДХ\}$;

d. $\Omega=\{XX, ДД\}$.

2. Податкова адміністрація перевірила три навмання вибраних фірми та наявність у них порушень нормативних актів про сплату податків і результати перевірки відзначила знаком «+» - фірми, в яких є порушення, знаком «-» - в яких немає порушення. Опишіть подію A – принаймні дві фірми мають порушення.

Варіанти відповідей:

a. $A = \{+++, ++-, +-+, -++\}$;

b. $A = \{++-, +-+, -++\}$;

c. $A = \{---, ++-, +-+, -++\}$;

d. $A = \{+--, ++-, +-+, -++\}$.

3. Податкова адміністрація перевірила три навмання вибраних фірми та наявність у них порушень нормативних актів про сплату податків і результати перевірки відзначила знаком «+» - фірми, в яких є порушення, знаком «-» - в яких немає порушення. Опишіть подію A – не більше, ніж дві фірми мають порушення.

Варіанти відповідей:

a. $A = \{+-+, +--, +-+, -++\}$;

b. $A = \{+--, +-+, -++\}$;

c. $A = \{---, ++-, +-+, -++\}$;

d. $A = \{+--, -+-, --+, --+, -+-, ++-, ---\}$.

4. Податкова адміністрація перевірила три навмання вибраних фірми та наявність у них порушень нормативних актів про сплату податків і результати перевірки відзначила знаком «+» - фірми, в яких є порушення, знаком «-» - в яких немає порушення. Опишіть подію A – більше ніж дві фірми мають порушення.

Варіанти відповідей:

a. $A = \{+++\}$;

b. $A = \{++-\}$;

c. $A = \{---\}$;

d. $A = \{+--, ++-, +-+, -++\}$.

5. Група туристів проходить на кордоні митний контроль. Із 30 туристів 6 не задекларували валюту, яку вони перевозять. Митна група навмання (для контролю) вибирає певну групу туристів. Знайти імовірність того, що вибраний навмання турист не задекларував валюту.

Варіанти відповідей:

a. 0,3;

b. 0,2;

c. 0,1;

d. -0,1.

6. Група туристів проходить на кордоні митний контроль. Із 30 туристів 6 не задекларували валюту, яку вони перевозять. Митна група навмання (для контролю) вибирає певну групу туристів. Знайти імовірність того, що вибраний навмання турист задекларував валюту.

Варіанти відповідей:

a. 1,8;

b. 0,3;

c. 0,8;

d. 0,9.

7. Статистичний звіт підприємства може прийняти один із чотирьох експертів статуправління. Імовірність того, що звіт прийме перший експерт дорівнює 0,15, другий – 0,35, третій – 0,2. Знайти імовірність того, що звіт прийме четвертий експерт.

Варіанти відповідей:

a. 0,5;

b. 0,3;

c. 0,0105;

d. 0, 35.

8. Статистичний звіт підприємства може прийняти один із чотирьох експертів статуправління. Імовірність того, що звіт прийме перший експерт дорівнює 0,15, другий – 0,35, третій – 0,2. Знайти імовірність того, що звіт прийме другий або четвертий експерт.

Варіанти відповідей:

a. 0,105;

b. 1,05;

c. 0,65;

d. 0, 25.

9. В адвокатській фірмі працює три адвокати. Особа звернулась до фірми з проханням захищати її на судовому засіданні. Імовірність того, що справу захищатиме перший адвокат 0,3, другий адвокат – 0,45. Знайти імовірність того, що справу захищатиме третій адвокат.

Варіанти відповідей:

a. 0,25;

b. 0,7;

c. 0,55;

d. 0,3.

10. В адвокатській фірмі працює три адвокати. Особа звернулась до фірми з проханням захищати її на судовому засіданні. Імовірність того, що справу захищатиме перший адвокат 0,3, другий адвокат – 0,45. Знайти імовірність того, що справу захищатиме перший або другий адвокат?

Варіанти відповідей:

a. 0,135;

b. 0,75;

c. 0,25;

d. 0,35.

Сторінки історії

Перше чітке і остаточне формулювання теореми додавання ймовірностей подано в роботі Т. Байєса (1763 р.), що носить назву «Досвід розв'язання задач з теорії ймовірностей шановного містера Байєса, члена Королівського товариства». У цій роботі міститься визначення несумісних подій. Байєс вживає інший термін «нещільні події». За Байєсом «кілька подій є нещільними, якщо настання однієї з них виключає настання інших». Байєс сформулював теорему додавання в наступному вигляді: «Якщо кілька подій є «неплотними» несумісними, то ймовірність того, що настане якась з них, дорівнює сумі ймовірностей кожного з них».

1.2. Основні теореми теорії ймовірностей та наслідки з них

1.2.1. Теореми додавання ймовірностей несумісних подій

Теорема 1. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій A і B, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1.2.1.)$$

Приклад 1. Виймання однієї кульки з урни, якій знаходяться тільки червоні, сині і білі кульки.

Розв'язання. Нехай подія A – це поява червоної кульки; подія B – це поява синьої кульки (несумісність подій A та B означає відсутність червоно-синіх кульок); тоді подія C – це поява кольорової кульки (байдуже, червоної або синьої). При n-ому повторенні випробування кількість вийнятих кольорових кульок дорівнює сумі вийнятих червоних і синіх кульок. Тому і ймовірність події C дорівнює сумі ймовірностей подій A і B: $P(C)=P(A)+P(B)$.

Теорема 2. Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій $A_1,A_2,\ldots,A_n$, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (1.2.2.)$$

Приклад 2. Проводиться стрільба по деякій області D мішені, яка містить три зони, які не перетинаються між собою. Ймовірність попадання в зону I:

$P(A_1)=\dfrac{5}{100}$, в зону II: $P(A_2)=\dfrac{10}{100}$, в зону III: $P(A_3)=\dfrac{17}{100}$. Яка ймовірність попадання в область D?

Розв'язання. Подія A - попадання в область D. За формулою (1.2.2.) маємо:

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{17}{100}=\frac{32}{100}.$$

Означення 1. *Випадкові події утворюють повну групу, якщо при кожному повторенні випробування повинна відбутися хоча б одна з них.*

Приклад 3. Нехай X – число очок, які випадають на верхній грані гральної кістки. Утворюють повну групу:

а) події $X=1, X=2, X=3, X=4, X=5, X=6$;

б) події X – парне, X – непарне;

в) події $X=1;\ 1<X<6,\ X=6$.

Наслідок 1. Сума ймовірностей повної групи випадкових подій дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \qquad (1.2.3.)$$

Приклад 4. На фірму з трьома складами прибуває група товарів на один з них. Ймовірність призначення товарів для першого складу $p_1=0,4$, а для другого $p_2=0,35$. Визначити ймовірність p_3 того, що ці товари призначені для третього складу.

Розв'язання. Розглянуті події єдиноможливі і несумісні. Тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці: $p_1+p_2+p_3=0,4+0,35+p_3=1$, звідки

$$p_3=1-0,4-0,35=0,25.$$

Означення 2. *Протилежними називають дві єдиноможливі події, що утворюють повну групу. Якщо одну з протилежних подій позначити через A, то другу подію позначають як* $\bar{A}$.

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \qquad (1.2.4.)$$

Зауваження. Якщо ймовірність однієї з двох протилежних подій позначити через p, а ймовірність іншої через q, то за наслідком 2 отримаємо:

$$p+q=1. \tag{1.2.5.}$$

Звідси $p=1-q$, $q=p-1$.

Зокрема, якщо обидві протилежні події мають однакову ймовірність, то вона дорівнює 0,5.

Приклад 5. Якщо ймовірність продажу виробу $p=0,8$, то ймовірність не продажу його $q=0,2$.

1.2.2. Теореми суми ймовірностей сумісних подій

Теорема 3. Ймовірність суми двох подій рівна сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку, тобто, для довільних подій A та B:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.2.6.}$$

Приклад 6. Пасажир може доїхати до своєї станції потягами двох призначень. Ймовірність наявності в касі квитків на потяг першого призначення $P(A)=0,5$, а на потяг другого призначення $P(B)=0,7$. Знайти ймовірність того, що пасажир купив квиток.

Розв'язання. Подія A – наявність квитків на потяг одного призначення та подія B - наявність квитків на потяг іншого призначення є сумісні і тому ймовірність того, що хоча б одна з них відбудеться, за формулою додавання ймовірностей сумісних подій дорівнює:

$$P(A+B)=0,5+0,7-0,5\cdot 0,7=0,85.$$

Теорема 3 може бути узагальнена на будь-яке скінчене число сумісних подій.

Наприклад, для трьох сумісних подій маємо:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Сторінки історії

Чітке формулювання теореми множення було здійснено Муавром у 1718 р. У вступі до «Доктрина шансів» він визначив важливе поняття незалежності випадкових подій: «Ми скажемо, що дві події незалежні, коли кожна з них не має ніякого відношення до іншої, а поява однієї з них не робить ніякого впливу на появу іншої». Він також досить точно дав визначення залежних подій: «дві події залежні, коли вони пов'язані одна з одною і коли ймовірність появи однієї з них змінюється при появі іншої». Теорему множення Муавр сформулював так: «...ймовірність появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірності появи однієї з них на ймовірність того, що інша має з'явитися, якщо перша вже з'явилася. Це правило може бути узагальнене на випадок кількох подій».

Про ймовірність спільного настання кількох подій Муавр писав наступне «...треба позначити одну з них як першу, іншу як другу і т.д. Тоді ймовірність появи першої повинна розглядатися як незалежна від інших, друга – в припущенні, що перша відбулася, третя – в припущенні настання першої і другої і т.д. Отже, ймовірність настання всіх подій дорівнює добутку всіх щойно зазначених ймовірностей». Муавр зазначив, що знаходження умовних ймовірностей, як правило, є досить складним заняттям.

1.2.3. Теореми множення ймовірностей

Означення 3. *Випадкові події A та B називають залежними, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи другої події.*

Приклад 7. В урні міститься 10 однакових кульок, із них 6 чорних і 4 білих. З урни навмання беруть дві кульки по одній без повернення. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша кулька виявиться чорною і друга також.

Розв'язання. Позначимо через A появу чорної кульки при першому вийманні, а через B - при другому. Випадкові події A і B будуть залежними, оскільки поява чорної кульки при першому її вийманні з урни (випадкова подія A) впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (випадкова подія B) при другому вийманні.

Означення 4. *Дві події називаються незалежними, якщо ймовірність появи однієї з них не впливає на ймовірність настання чи не настання іншої події.*

Приклад 8. З урни, де шість білих і чотири чорні кульки, вийняли дві кульки по одній, при цьому перша кулька в урну повертається. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша виявиться чорною, друга також.

Розв'язання. Нехай A - поява чорної кульки при першому вийманні, а B - при другому. Поява чорної кульки при першому вийманні (здійснилась подія A) не впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (подія B) при другому вийманні, оскільки співвідношення між чорними та білими кульками в цьому разі не змінюється.

Теорема 4. Ймовірність одночасної появи двох незалежних випадкових подій A та B дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (1.2.7.)$$

Наслідок 1. Ймовірність скінченної кількості незалежних випадкових подій обчислюється за формулою

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n) \qquad (1.2.8.)$$

Приклад 9. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3, а на монеті герб?

Розв'язання. Нехай поява числа, кратного трьом - подія A, а поява герба - подія B. Випадкові події A і B є між собою незалежними. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ P(B) = \frac{1}{2}; \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 10. Три студенти складають на сесії екзамен з математики. Ймовірність того, що перший складе екзамен, дорівнює 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,7.

Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) A - три студенти складуть екзамен;

2) B - три студенти не складуть екзамен;

3) C - два студенти складуть екзамен.

Розв'язання. Позначимо A_1, A_2, A_3 - випадкові події, які полягають у тому, що перший, другий і третій студенти складуть екзамен з математики. Тоді $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ - відповідно не складуть. За умовою задачі маємо:

$$P(A_1) = 0{,}9,\ \ P(A_2) = 0{,}8,\ \ P(A_3) = 0{,}7.$$

Тоді ймовірності протилежних подій такі:

$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$

$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$

$P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$

Позначимо події: $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$,

$$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cup A_3).$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A_i}$ (i = 1, 2, 3) є між собою незалежними, то

$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504;$

$P(B) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)\, P(\overline{A}_2)\, P(\overline{A}_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006;$

$$P(C) = P\left((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)\right) =$$

$$= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) + P\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) =$$

$$= P(A_1)\, P(A_2)\, P(\overline{A}_3) + P(A_1)\, P(\overline{A}_2)\, P(A_3) + P(\overline{A}_1)\, P(A_2)\, P(A_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}056 = 0{,}398.$$

Означення 5. *Якщо ймовірність випадкової події А обчислюється за умови, що подія В відбулася, то така ймовірність називається умовною.* Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} / \mathrm{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \qquad (1.2.9.)$$

Аналогічно

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0. \qquad (1.2.10.)$$

Зауваження.

1. $P(A / B) = 0$, якщо $A \cap B = \varnothing$.

2. $P(A / B) = 1$, якщо $A \cap B = B$.

3. У решті випадків $0 < P(A / B) < 1$.

Приклад 11. Задана множина цілих чисел. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Розв'язання. Нехай подія A - поява числа кратного 3, B - кратного 2.

Тоді $A = (3, 6, 9, 12)$, $m_1 = 4$;

$B = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$, $m_2 = 6$;

$A \cap B = (6, 12)$, $m_3 = 2$.

Звідси $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{m_3}{n} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$;

$$P(A / B) = P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $P(A) \neq P(A / B)$, то події A і B є залежними.

Умовну ймовірність $P(A/B)$ для цієї задачі можна обчислити й інакше. За умовою задачі відомо, що взяте навмання число, є непарним, тобто в цьому разі ми дістали додаткову інформацію: із множини Ω беруться лише непарні числа. Отже, простір елементарних подій тепер має вигляд

$$\Omega = \{1, 2, 5, 7, 9, 11\},\ n = 6.$$

Елементарні події, що сприяють появі A – появі числа, кратного 3, утворюють множину $A = \{3, 9\}$, $m = 2$.

Отже, $\mathrm{P}(\mathrm{A} / \mathrm{B}) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Приклад 12. Відомі значення: $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4$; $P(\overline{A \cap B}) = 0{,}9$.

З'ясувати, чи є залежними випадкові події A і B.

Розв'язання.

$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$;

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$;

$P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$;

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\,(A\cap B)}{P\,(B)}=\frac{0{,}1}{0{,}5}=\frac{1}{5}=0{,}2;$$

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\,(A\cap B)}{P\,(A)}=\frac{0{,}1}{0{,}4}=\frac{1}{4}=0{,}25\,.$$

Оскільки $P(A/B)\neq P(A),\ P(B)\neq P(B/A),$ то випадкові події A і B є залежними.

Теорема 5. Ймовірність сумісної появи двох подій рівна добутку ймовірності однієї з них на умовну імовірність іншої події обчислену в припущенні, що перша подія вже відбулася:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B). \qquad (1.2.11.)$$

Співвідношення (1.2.11.) називають *формулою множення ймовірностей залежних випадкових подій.*

Наслідок 1. Ймовірність скінченної кількості n залежних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ обчислюється за формулою

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\,(A_1)\,P(A_2\,/\,A_1)\,P(A_3\,/\,A_1A_2)\,\ldots\,P(A_n/\,A_1A_2\,\ldots\,A_{n-1}) \qquad (1.2.12.)$$

Приклад 13. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта - браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) A - три деталі виявляться стандартними;

2) B - усі три деталі виявляться бракованими;

3) C - дві деталі стандартні й одна бракована.

Розв'язання. Нехай A_i - поява стандартної, $\overline{A_i}$ - поява бракованої деталі при i-му вийманні.

Подія $A=A_1\cap A_2\cap A_3$, $B=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$,

$$C=(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})\cup(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3)\,.$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A_i}$ є залежними, то:

$$P(A) = P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2\,/\,A_1)\,P(A_3\,/\,A_1A_2) = \frac{9}{15}\frac{8}{14}\frac{7}{13}=\frac{12}{65}\,;$$

$$P(B)=P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})=P(\overline{A_1})\ P(\overline{A_2}/\overline{A_1})\ P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\ \overline{A_2})=\frac{6}{15}\ \frac{5}{14}\ \frac{4}{13}=\frac{6}{91}.$$

$$P\ (C)=P\ \Big((A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})\cup(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3)\Big)=$$

$$=P\ (A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})+P\ (A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)+P\ (\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3)=$$

$$=P\ (A_1)\ P\ (A_2\ /\ A_1)\ P\ (\overline{A_3}\ /\ A_1A_2)+P\ (A_1)\ P\ (\overline{A_2}\ /\ A_1)\ P\ (A_3\ /\ A_1\overline{A_2})+$$

$$+P\ (\overline{A_1})\ P\ (A_2\ /\ \overline{A_1})\ P\ (A_3\ /\ \overline{A_1}A_2)=\frac{9}{15}\ \frac{8}{14}\ \frac{6}{13}+\frac{9}{15}\ \frac{6}{14}\ \frac{8}{13}+\frac{6}{15}\ \frac{9}{14}\ \frac{8}{13}=\frac{216}{455}.$$

Приклад 14. Із множини чисел $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ навмання беруть одне число, а далі з решти - друге. Яка ймовірність того, що здобуте двоцифрове число буде парним?

Розв’язання. Позначимо через A_1 - поява непарної цифри при першому вийманні, через B_1 - поява парної цифри при першому, а через B_2 - появу парної цифри при другому вийманні.

Нехай C - випадкова подія: поява парного двоцифрового числа.

Тоді $C=(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)$.

Оскільки випадкові події A_1, B_1, B_2 є залежними, то

$$P\ (C)=P\ (A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)=P(A_1\cap B_2)+P\ (B_1\cap B_2)=$$

$$=P\ (A_1)\ P\ (B_2\ /\ A_1)+P\ (B_1)\ P\ (B_2\ /\ B_1)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{32}{72}=\frac{4}{9}.$$

Нехай події $A_1, A_2, \ldots A_n$ незалежні у сукупності з імовірностями $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2, \ldots, P(A_n)=p_n$; нехай в результаті випробувань можуть відбутися всі події, або частина з них, або жодна з них.

Теорема 6. Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних у сукупності подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots\overline{A}_n$:

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n). \tag{1.2.13.}$$

Якщо ймовірність протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots\overline{A}_n$ позначити $P(\overline{A}_1)=q_1, P(\overline{A}_2)=q_2, \ldots P(\overline{A}_n)=q_n$, то формула (1.2.13.) матиме вигляд

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n. \tag{1.2.14.}$$

Наслідок 1. Якщо всі n подій мають однакову ймовірність p, то формула (1.2.14.) має вигляд

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (1.2.15.)$$

Приклад 15. Прилад складається з чотирьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,95. Для другого, третього і четвертого елементів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,9; 0,85; 0,8. Яка ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу не вийде хоча б один елемент?

Розв'язання. Нехай p_1 = 0,95 - ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого, третього та четвертого елементів ця ймовірність становитиме відповідно p_2 = 0,9; p_3 = 0,85; p_4 = 0,8. Ймовірність того, що ці елементи вийдуть із ладу, дорівнюватиме відповідно:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15;$$

$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

На підставі (1.2.14.) маємо:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}00015 = 0{,}99985.$$

Приклад 16. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з'явиться при цьому хоча б один раз?

Розв'язання. Ймовірність того, що при одному підкиданні з'явиться цифра 3, дорівнює $\frac{1}{6}$. Тоді $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Згідно з (1.2.15.) дістанемо:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

Сторінки історії

Лаплас у своїй роботі «Досвід філософії теорії ймовірностей» сформулював принцип, який відноситься до ймовірності гіпотез, або ймовірності причин. Він словесно сформулював відоме «правило Байєса». Більше того, його принцип містить і формулу повної ймовірності, якою з початку XVIII ст. широко користуються в своїх роботах відомі математики, котрі працювали в області теорії ймовірностей.

Однак, Лаплас на цьому не зупинився і дав формулювання власної формули повної ймовірності, але також лише словесну: «Ймовірність майбутньої події є сума добутків ймовірності кожної причини, виведеної зі спостережуваної події, на ймовірність того, що при існуванні цієї причини майбутня подія буде мати місце».

1.2.4. Формула повної ймовірності випадкової події

Теорема 7. Якщо випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну групу несумісних подій, то ймовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)\cdot P(A/B_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A/B_i), \qquad (1.2.16.)$$

яка називається *формулою повної ймовірності*.

Означення 6. *Випадкові події $B_1, B_2, \ldots B_n$ називають гіпотезами.*

Приклад 17. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45% усіх деталей, від другого - 35% і від третього - 20%. Перший цех допускає в середньому 6% браку, другий - 2% і третій - 8%. Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

Розв'язання. Позначимо через A появу стандартної деталі, B_1 - деталь надійде від першого цеху, B_2 - від другого, B_3 - від третього. За умовою задачі:

$$P(B_1) = 0{,}45, \quad P(A / B_1) = 0{,}94;$$

$$P(B_2) = 0{,}35, \quad P(A / B_2) = 0{,}98;$$

$$P(B_3) = 0{,}2, \quad P(A / B_3) = 0{,}92.$$

Згідно з (1.2.16.) маємо:

$$P(A) = P(B_1)\, P(A / B_1) + P(B_2)\, P(A / B_2) + P(B_3)\, P(A / B_3) =$$

$$= 0{,}45 \cdot 0{,}94 + 0{,}35 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}92 = 0{,}423 + 0{,}343 + 0{,}184 = 0{,}95.$$

Приклад 18. У ящику міститься 11 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта браковані. Із ящика навмання беруть три деталі, не повертаючи їх назад. Яка ймовірність після цього вийняти навмання з ящика стандартну деталь?

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що з ящика вийнято навмання одну стандартну деталь після того, як з нього було взято три. Розглянемо такі події: B_1 - було взято три стандартні деталі;

B_2 - дві стандартні і одну браковану;

B_3 - одну стандартну і дві браковані;

B_4 - три браковані.

Обчислимо ймовірності гіпотез, а також відповідні їм умовні ймовірності $P(A / B_i)$ (i = 1, 2, 3, 4).

$$P(B_1) = \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{35}{165}, \quad P(A / B_1) = \frac{4}{8};$$

$$P(B_2) = \frac{C_7^2 C_4^1}{C_{11}^3} = \frac{84}{165}, \quad P(A / B_2) = \frac{5}{8};$$

$$P(B_3) = \frac{C_7^1 C_4^2}{C_{11}^3} = \frac{42}{165}, \quad P(A / B_3) = \frac{6}{8};$$

$$P(B_4) = \frac{C_7^0 C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{165}, \quad P(A / B_4) = \frac{7}{8}.$$

Згідно з (1.2.16.) дістанемо:

$$P(A) = P(B_1)\, P(A / B_1) + P(B_2)\, P(A / B_2) + P(B_3)\, P(A / B_3) + P(B_4)\, P(A / B_4) =$$

$$= \frac{35}{165}\,\frac{4}{8} + \frac{84}{165}\,\frac{5}{8} + \frac{42}{165}\,\frac{6}{8} + \frac{4}{165}\,\frac{7}{8} = \frac{840}{1320} = \frac{7}{11}.$$

Сторінки історії

Формулювання теореми множення у Байєса така ж, як у Муавра. Єдине, в чому Байєс пішов далі Муавра це у обчисленні ймовірності $P_B(A)$ за ймовірностями $P(AB)$ і $P(A)$. Цей підхід надав підстави приписувати Байєсу формули, які носять його ім'я. Насправді у нього їх немає, оскільки він не знав формули повної ймовірності.

1.2.5. Формула Байєса

Застосовуючи формулу множення ймовірностей для залежних випадкових подій A, B_i ($i=\overline{1,\ n}$), дістаємо

$$P(A)\ P(B_i\ /\ A) = P\ (B_i)\ P(A\ /\ B_i).$$

Звідси,

$$P\left(B_i / A\right) = \frac{P\ (B_i)\, P\ (A\ /\ B_i)}{P\ (A)} = \frac{P\ (B_i)\ P\ (A\ /\ B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\ (B_i)\ P\ (A\ /\ B_i)}. \qquad (1.2.17.)$$

Залежність (1.2.17.) називається *формулою Байєса*.

Її використовують для переоцінювання ймовірностей гіпотез B_i за умови, що випадкова подія A відбудеться.

Після переоцінювання всіх гіпотез B_i маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i\ /\ A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P(B_i)\, P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Згідно з формулою Байєса можна прийняти рішення, провівши експеримент. Але для цього необхідно, аби вибір тієї чи іншої гіпотези мав ґрунтовні підстави, тобто щоб внаслідок проведення експерименту ймовірність $P(B_i/A)$ була близька до одиниці.

Приклад 19. Маємо три групи ящиків. До першої групи належить 5 ящиків, у кожному з яких 7 стандартних і 3 браковані однотипні вироби, до другої групи - 9 ящиків, у кожному з яких 5 стандартних і 5 бракованих виробів, а до третьої - 3 ящики, у кожному з яких 3 стандартні й 7 бракованих виробів. Із довільно вибраного ящика три навмання взяті вироби виявилися стандартними. Яка ймовірність того, що вони були взяті з ящика, який належить третій групі?

Розв'язання. Позначимо B_1, B_2, B_3 гіпотези про те, що навмання вибраний ящик належить відповідно першій, другій або третій групі. Обчислимо ймовірності цих гіпотез. Оскільки всього за умовою задачі 17 ящиків, то

$$P\left(B_1\right)=\frac{5}{17};\ P\left(B_2\right)=\frac{9}{17};\ P\left(B_3\right)=\frac{3}{17}.$$

Позначимо через A появу трьох стандартних виробів. Тоді відповідні умовні ймовірності:

$$P\left(A/B_1\right)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{21}{120};$$

$$P\left(A/B_2\right)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{10}{120};$$

$$P\left(A/B_3\right)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}.$$

За умовою задачі необхідно переоцінити ймовірність гіпотези B_3. Використовуючи формулу (1.2.17.), маємо:

$$P\left(B_3/A\right)=\frac{P(B_3)\ P(A/B_3)}{P(B_1)\ P(A/B_1)+P(B_2)\ P(A/B_2)+P(B_3)\ P(A/B_3)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{17}\ \frac{1}{120}}{\frac{5}{17}\ \frac{21}{120}+\frac{9}{17}\ \frac{10}{120}+\frac{3}{17}\ \frac{1}{120}}=\frac{3}{105+90+3}=\frac{3}{198}=\frac{1}{66}.$$

Приклад 20. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% - із заводу №1, 25% - із заводу №2; 40% - із заводу №3 і 20% - із заводу №4. Під час контролю продукції, яка надходить на склад, установлено, що в середньому брак становить для заводу №1 - 3%, заводу №2 -5%, заводу №3 - 8% і заводу №4 - 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод №1?

Розв'язання. Позначимо через B_1 гіпотезу проте, що виріб був виготовлений заводом № 1, B_2 - заводом № 2, B_3 - заводом № 3 і B_4 - заводом № 4. Ці гіпотези єдиноможливі і несумісні. Нехай A - випадкова подія, що полягає в появі бракованого виробу.

За умовою задачі маємо:

$P(B_1) = 0{,}15$, $P(B_2) = 0{,}25$, $P(B_3) = 0{,}4$, $P(B_4) = 0{,}2$, $P(A/B_1) = 0{,}03$, $P(A/B_2) = 0{,}05$, $P(A/B_3) = 0{,}08$, $P(A/B_4) = 0{,}01$.

За формулою Байєса (1.2.17.) переоцінюємо першу гіпотезу B_1:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\,P(A/B_1)}{P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) + P(B_3)\,P(A/B_3) + P(B_4)\,P(A/B_4)} =$$

$$= \frac{0{,}15 \cdot 0{,}03}{0{,}15 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}4 \cdot 0{,}08 + 0{,}2 \cdot 0{,}01} = \frac{0{,}0045}{0{,}051} = \frac{45}{510} = \frac{3}{34}.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте теореми додавання ймовірностей сумісних та несумісних подій?

2. Вкажіть різницю між формулами додавання ймовірностей сумісних та несумісних подій?

3. Які випадкові події називають незалежними?

4. Як визначають умовну ймовірність?

5. За якою формулою обчислюється умовна імовірність?

6. В якому випадку $P(A/B) = 0$?

7. В якому випадку $P(A/B) = 1$?

8. Сформулюйте теореми множення ймовірностей залежних та незалежних випадкових подій?

9. Охарактеризуйте формули множення ймовірностей для двох залежних та незалежних випадкових подій?

10. Чому дорівнює $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$, якщо випадкові події A_i є залежними?

11. Чому дорівнює $P(A \cap B)$, якщо A і B є незалежними?

12. В якому випадку $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$?

13. Чому дорівнює $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$, якщо випадкові події A і B є незалежними?

14. За якою формулою можна обчислити появу випадкової події хоча б один раз при n незалежних експериментах?

15. Що таке гіпотези у формулі повної ймовірності та які їх властивості?

16. Який вигляд має формула повної ймовірності випадкової події A за наявності n гіпотез B_i?

17. За яких умов використовують формулу Байєса?

18. Який вигляд має формула Байєса для переоцінювання ймовірності гіпотези?

19. Чому дорівнює $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$, де B_i є гіпотези у формулі повної ймовірності?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. В магазин надійшла партія взуття одного фасону і розміру, але різного кольору. Партія містить 40 пар чорного кольору, 26 – коричневого, 22 – червоного і 12 пар синього. Коробки із взуттям виявились невідсортовані за кольором. Яка ймовірність того, що навмання взята коробка виявиться із взуттям червоного або синього кольору? *Відповідь.* 0,34.

2. У банку працює 10 співробітників, 8 з яких є консультантами. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних двох співробітників, хоча б один буде консультантом. *Відповідь.* $P(A) = \frac{37}{45}$.

3. В компанії працює 10 менеджерів, серед яких двоє – родичі. Жеребкуванням вибирають трьох. Знайдіть ймовірність того, що серед вибраних фахівців буде принаймні один із родичів. *Відповідь.* $P(A) = \frac{8}{15}$.

4. До мінімаркету з п'ятьма відділами прибував товар до одного з них. Ймовірність призначення товару для першого відділу $p_1=0,15$, для другого $p_2=0,25$, для третього $p_3=0,2$, а для четвертого $p_4=0,1$. Знайти ймовірність p_5 того, що цей товар призначений для п'ятого відділу. *Відповідь.* $p_5=0,3$.

5. У графіку руху потягів на дільниці є 120 колій для вантажних потягів. З цієї дільниці на станцію прибувають за розбіркою 80 потягів. Знайти ймовірність прибуття двох розбіркових потягів по двох сусідніх коліях. *Відповідь.* ≈0,442.

6. Ймовірність виготовлення стандартного виробу даним станком дорівнює 0,9. Ймовірність появи виробу першого ґатунку серед стандартних виробів становить 0,8. Визначити ймовірність виготовлення виробу першого ґатунку даним станком. *Відповідь.* 0,72.

7. В групі з 10 студентів, які прийшли на екзамен, 3 підготовлені відмінно, 4 – добре, 2 – посередньо і 1 – погано. В екзаменаційних білетах є 20 питань. Студент, який підготовлений відмінно може відповісти на всі 20 питань, який підготовлений добре – на 16, посередньо – на 10, погано – на 5. Визваний навмання студент відповів на три довільно заданих питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений: а) відмінно; б) погано. *Відповідь.* а) ≈0,58; б) ≈0,002.

8. На трьох автоматизованих лініях виготовляють однакові деталі, причому 40% - на першій лінії, 30% - на другій та 30% - на третій. Ймовірність виготовлення стандартної деталі для цих ліній становить відповідно 0,9, 0,95 та 0,95. Виготовлені деталі надходять на склад. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь стандартна? *Відповідь.* 0,93.

9. У лікарню поступають (в середньому) 40% хворих на пневмонію, 30% - на перитоніт та 30% хворих на ангіну. Ймовірність повного одужання від пневмонії – 0,8; від перитоніту – 0,7 та ангіни – 0,85. Виписано хворого, який повністю одужав. Яка ймовірність того, що він був хворий на перитоніт? *Відповідь.* ≈0,268.

10. 30% приладів збирає фахівець високої кваліфікації і 70% середньої. Надійність роботи приладу, зібраного фахівцем високої кваліфікації 0,9, надійність приладу, зібраного фахівцем середньої кваліфікації 0,8. Взятий прилад виявився надійним. Визначити ймовірність того, що він зібраний фахівцем високої кваліфікації. *Відповідь.* 0,675.

11. Запропонуйте розв'язування однієї із задач 1-10 із використанням інформаційних технологій, використовуючи методику описану у розділі 3.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Серед 10 пар взуття, які розміщені на полиці магазину – 6 пар 41 розміру. З полиці беруть двічі навмання по одній парі взуття, не повертаючи їх назад. Нехай подія *A* – перша пара взуття 41 розміру, *B* – друга пара взуття 41 розміру. З’ясуйте сумісність і незалежність подій *A* і *B*:

Варіанти відповідей:

a. Несумісні і незалежні;

b. Сумісні і незалежні;

c. Несумісні і незалежні;

d. Сумісні і залежні.

2. Серед 10 пар взуття, які розміщені на полиці магазину – 6 пар 41 розміру. З полиці беруть двічі навмання по одній парі взуття, не повертаючи їх назад. Нехай подія *A* – перша пара взуття 41 розміру, *B* – друга пара взуття 41 розміру. Обчисліть ймовірність події *B*.

Варіанти відповідей:

a. 0,6;

b. 0,56;

c. 0,5;

d. 0,7.

3. Теоретична частина предмета складається з трьох розділів, у кожному з яких по 10 питань. Студент знає 5 питань з першого розділу, 6 питань – із другого, 8 питань – із третього. Викладач задає студентові навмання по одному питанню з кожного розділу. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі питання.

Варіанти відповідей:

a. 0,24;

b. 0,23;

c. 0,18;

d. 0,19.

4. Теоретична частина предмета складається з трьох розділів, у кожному з яких по 10 питань. Студент знає 5 питань з першого розділу, 6 питань – із другого, 8 питань – із третього. Викладач задає студентові навмання по одному питанню з кожного розділу. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на питання другого і третього розділів.

Варіанти відповідей:

a. 0,21;

b. 0,24;

c. 0,42;

d. 0,43.

5. Ймовірність того, що перший студент розв'яже задачу дорівнює 0,75, а другий – 0,8. Знайти ймовірність того, що задача буде розв'язана, якщо обидва студенти будуть розв'язувати її незалежно один від одного.

Варіанти відповідей:

a. 0,06;

b. 0,6;

c. 0,26;

d. 0,66.

6. Для отримання кредиту підприємець звертається до двох банків. Ймовірність того, що перший банк не відмовить йому в наданні кредиту, становить 0,7, другий - 0,85. Знайти ймовірність того, що перший або другий банк дасть згоду.

Варіанти відповідей:

a. 1,55;

b. 0,955;

c. 0,595;

d. 0,95.

7. Для отримання кредиту підприємець звертається до двох банків. Ймовірність того, що перший банк не відмовить йому в наданні кредиту, становить 0,7, другий - 0,85. Знайти ймовірність того, що обидва банки відмовляться надавати кредит.

Варіанти відповідей:

a. 0,045;

b. 0,105;

c. 0,255;

d. 0,55.

8. Ймовірність того, що в річній декларації про сукупний оподатковуваний дохід подано не всі джерела доходів, становить 0,2. Яка ймовірність того, що серед вибраних навмання п'яти декларацій хоча б в одній подано не всі джерела доходів?

Варіанти відповідей:

a. 0,32768;

b. 0,67232;

c. 0,00032;

d. 0,0073.

9. Потрібний товар можна знайти у двох фірмових магазинах. Ймовірність того, що в першому магазині товар якісний, становить 0,9, у другому – 0,8. Знайти ймовірність того, що придбаний навмання товар у будь-якому з магазинів якісний.

Варіанти відповідей:

a. 0,85;

b. 0,98;

c. 0,72;

d. 0,75.

10. Фінансовий звіт фірми складається з 20 таблиць, які готували два економісти. Перший підготував – 12 таблиць, другий – 8 таблиць. Ймовірність помилки при складанні таблиць із боку першого економіста 0,1, з боку другого – 0,2. У вибраній навмання таблиці допущено помилку. Яка ймовірність того, що цю таблицю готував другий економіст?

Варіанти відповідей:

a. 0,43;

b. 0,14;

c. 0,57;

d. 0,65.

Сторінки історії

Я. Бернуллі вперше висловив і реалізував думку, що розглядати можна не тільки точні розв'язки задач теорії ймовірностей, але і їх асимптотичні постановки при необмеженому збільшенні деякого параметра. Він дав формулювання своєї теореми у відмінному від прийнятого тепер вигляді, використовував для позначення випробувань, при яких подія яка нас цікавить відбувається, слова «плідний», «фертильний», а для протилежних результатів слово «стерильний».

Книга «Мистецтво пропозицій» Я. Бернуллі ретельно вивчена його племінником Н. Бернуллі. У його роботі «Про застосування мистецтва припущень в питаннях прав», виходячи з таблиць Граунта, він вивчав питання про ймовірність доживання до певного віку. На підставі багаторічних реєстрацій народжень він відзначив той факт, що хлопчиків народжується більше, ніж дівчат. При цьому відношення числа народжень хлопчиків до числа народжень дівчат виявляється, як він вважав, рівним 18:17.

У точності цей приклад розглянуто Лапласом у роботі «Аналітична теорія ймовірностей».

1.3. Повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі

1.3.1. Послідовності незалежних випробувань

Нехай при однакових умовах проводяться послідовні випробування, при кожному з яких може відбутися або певна подія A, або $\overline{A}$. Оскільки ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результату інших випробувань, то такі випробування називають *незалежними.*

Наприклад, випробування «кинуто 50 однакових монет» можна розглядати як послідовність 50 більш простих випробувань - «кинута одна монета». При киданні 50 монет ймовірність появи герба або напису на одній монеті не залежить від того, що з'явиться на інших монетах. Тому можна казати, що у цьому випадку випробування повторюються 50 разів незалежним чином.

Якщо в кожному незалежному випробуванні ймовірність настання події A одна й та сама і дорівнює $p\left(0<p<1\right)$, тобто $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q=1-p$ і не залежить від номера випробування, то такі випробування називаються *схемою незалежних випробувань, схемою Бернуллі.*

1.3.2. Формула Бернуллі

Теорема 1. Ймовірність того, що в n повторних незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи випадкової події A рівна p $(0 < p < 1)$, дана подія відбудеться рівно m разів знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (1.3.1.)$$

де $q = 1 - p$ − ймовірність не появи події A в кожному випробуванні.

Приклад 1. Якою повинна бути ймовірність влучення при одному пострілі, щоб при чотирьох пострілах $P(x=0) = P(x=1)$?

Розв'язання. Використовуючи формулу Бернуллі (1.3.1.), маємо $P_4(k=0) = P_4(k=1)^4$ або $C_4^0 P^0 (1-p) = C_4^1 P^1 (1-p)^3$. Звідси $1 - p = 4p$. Отже, $p = 0{,}2$.

Зауваження 1. Ймовірність появи події A в n випробуваннях схеми Бернуллі менше m разів знаходять за формулою

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1).$$

Ймовірність появи події A не менше m разів можна знайти за формулою

$$P_n(k \ge m) = P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n).$$

або за формулою $\quad P_n(k \ge m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k).$

Ймовірність появи події A хоча б один раз у n випробуваннях доцільно знаходити за формулою

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n.$$

Приклад 2. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовлять не менше двох блоків.

Розв'язання. Позначимо за подію *A* відмову блока. Тоді ймовірність події *A* за умовою буде

$$P(A)=p=1-0{,}8=0{,}2, \text{ тому } q=1-p=1-0{,}2=0{,}8.$$

Згідно з умовою задачі n=10. Використовуючи формулу Бернуллі та зауваження 1, одержимо

а) $P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 p^8 = C_{10}^2 (0{,}2)^2 (0{,}8)^8 = 0{,}202;$

б) $P_{10}(1\langle m \le 10) = 1 - P_{10}(0) = 1 - C_{10}^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^{10} = 0{,}8926;$

в) $P_{10}(2\langle m \le 10) = 1 - (P_{10}(0) + P_{10}(1)) = 1 - (C_{10}^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^{10} + C_{10}^1 (0{,}2)^1 (0{,}8)^9) = 0{,}6244.$

Набір чисел $P_n(m)$ $(m = 0,1,\dots n)$, називають *біноміальним розподілом*, оскільки права частина формули (1.3.1.) є загальним членом розкладу біному Ньютона:

$$\begin{aligned}(q+p)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} &= C_n^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + \\ &+ \dots C_n^m p^m q^{n-m} + \dots C_n^{n-2} p^{n-2} q + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^n p^n\end{aligned} \qquad (1.3.2.)$$

Звідси випливає, що сума всіх біномних ймовірностей рівна 1:

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^n p^n q^{n-m} = (q+p)^n = 1^n = 1\,. \qquad (1.3.3.)$$

Зауваження 2. Якщо імовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з імовірністю P можна було стверджувати, що подія *A* з'явиться хоча б один раз, знаходять за формулою

$$n \ge \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \qquad (1.3.4.)$$

Приклад 3. За одну годину автомат виготовляє 20 деталей. За скільки годин імовірність виготовлення хоча б однієї бракованої деталі буде не менше 0,952, якщо імовірність браку будь-якої деталі дорівнює 0,01?

Розв'язання. Застосовуючи формулу (1.3.4.), знайдемо спочатку таку кількість виготовлених деталей, щоб з ймовірністю *p=0,952* можна було стверджувати про наявність хоча б однієї бракованої деталі, якщо ймовірність браку за умовою *p=0,01:*

$$n \geq \frac{\ln(1-0{,}952)}{\ln(1-0{,}01)} = \frac{\ln 0{,}048}{\ln 0{,}99} \approx 300.$$

Отже, за час $t = \frac{300}{20} = 15$ (годин автомат) з ймовірністю 0,952 виготовить хоча б одну браковану деталь.

Сторінки історії

У двох останніх виданнях книги Муавра «Доктрина шансів» був поміщений переклад його статті. За словами самого автора «Я розміщую тут переклад моєї роботи, написаної 12 листопада 1733 і повідомленої деяким друзям, але ніколи не публікувався». У короткому вступі Муавр зазначив, що для розв'язування ряду задач теорії ймовірностей необхідно підраховувати суми членів біноміального розподілу і що обчислення стають громіздкими при великих значеннях кількості випробувань. У результаті перед Муавром виникло питання про пошук асимптотичної формули, яке він вирішив. Тоді Стірлінг вивів формулу для наближеного обчислення факторіала в разі великих чисел. Використавши знайдену формулу «Стірлінга», Муавр довів локальну теорему, названу його ім'ям. Далі Муавр отримав локальну теорему в прийнятому тепер вигляді.

1.3.3. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо число випробувань n достатньо велике і ймовірність появи A в кожному випробуванні не мала $p \in (0,1)$, а число $npq>10$, то використовують теореми Муавра-Лапласа, які дають добре наближення при $n>40$. Коли треба більш висока точність, то дані теореми використовують для $n \geq 100$.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно m разів, приблизно дорівнює значенню функції

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m) \qquad (1.3.5.)$$

де $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$ - це функція Гауса, значення якої занесені в таблиці (дод. А) і вона має такі властивості:

а) $\varphi(x)$ - визначена на всій числовій осі; б) $\varphi(x)$ - парна, $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

в) $\varphi(x)$ - спадає при $x>0$; г) $\varphi(x)$=0,0001 при $x \geq 4$.

Приклад 4. Ймовірність виготовлення деталі вищого ґатунку на даному верстаті дорівнює 0,4. Знайти наближено ймовірність того, що серед навмання взятих 26 деталей половина виявиться вищого ґатунку.

Розв'язання. З умови маємо $p=0,4$; $q=1-0,4=0,6$; $n=26$; $m=13$. Тоді

$$np=26 \cdot 0,4=10,4; \; npq=10,4 \cdot 0,6=6,24;$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{6,24} \approx 2,5; \; m\text{-}np=13\text{-}10,4=2,6.$$

Тому $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{2,6}{2,5} = 1,04.$

Значення $\varphi(x)$ при $x=1,04$ знаходимо з таблиці $\varphi(x) = \varphi(1,04) = 0,2323.$

Тоді за формулою (1.3.5.) отримаємо

$$P_{26}(13) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,2323}{2,5} = 0,093.$$

Приклад 5. На одному з телеканалів у кожній з передач ймовірність появи реклами кави дорівнює 0,2. Знайти ймовірність появи восьми разів реклами кави у 100 передачах.

Розв'язання. З умови маємо $n=100$; $p=0,2$; $m=8$; $q=1-0,2=0,8$. Тому, оскільки $npq=100 \cdot 0,2 \cdot 0,8=16>9$ і p та q немалі ($p>0,1$ і $q>0,1$), то скористаємось формулою (1.3.5.)

$$P_{100}(8) = \frac{1}{\sqrt{16}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{4} \cdot \varphi(x).$$

Обчислимо значення $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 100 \cdot 0,2}{4} = -3.$

Оскільки функція $\varphi(x)$ є парною, то $\varphi(-3)=\varphi(3)$ і за таблицею (дод. А) знаходимо $\varphi(-3)=\varphi(3)=0{,}0044.$ Тому $P_{100}(8)=\frac{1}{\sqrt{16}}\cdot 0{,}0044=0{,}0011.$

Сторінки історії

Маючи в руках локальну теорему, Муавр без ускладнень сформулював і інтегральну, правда, тільки для симетричних меж.

Муавр зазначив, що інтегральну теорему можна використовувати і для оцінки невідомої ймовірності, тобто для розв'язання задачі математичної статистики.

1.3.4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Теорема 2. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то ймовірність $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від m_1 до m_2 разів, приблизно рівна визначеному інтегралу

$$\mathrm{P}_n\left(m_1 \le m \le m_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \Phi(x_2)-\Phi(x_1), \qquad (1.3.6.)$$

де $x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функція Лапласа, значення якої занесені в таблиці (дод. В) і має такі властивості:

а) $\Phi(x)$ визначена на всій числовій осі;

б) $\Phi(x)$ – непарна – $\Phi(-x)= -\Phi(x)$;

в) $\varphi(x)$ зростає при $x>0$ до 0,5 і спадає при $x<0$ до -0,5;

г) для $x>5$ $\Phi(x)\approx 0{,}5$; для $x<-5$ $\Phi(x)\approx -0{,}5$.

Приклад 6. В радіоапаратурі, що містить 300 ламп, застосовуються лампи з ймовірністю придатності 80%. Знайти ймовірність того, що 400 таких ламп достатньо для того, щоб повністю укомплектувати цю радіоапаратуру.

Розв'язання. За умовою p=0,8, q=0,20, n=400. Необхідно обчислити ймовірність події, яка полягає в тому, що з 400 ламп придатними виявиться тільки від 300 до 400 ламп. Згідно інтегральної формули Лапласа (1.3.6.) маємо:

$$P_{400}(300 \le m \le 400) = \Phi\left(\frac{400 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$=\Phi(10)+\Phi(2{,}5)=0{,}5+0{,}4938=0{,}9938.$$

Приклад 7. При звичайному технологічному процесі фабрика випускає в середньому 70 відсотків продукції першого ґатунку. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 1000 виробів число виробів першого ґатунку міститься між 625 і 760 ?

Розв'язання. За умовою маємо n=1000, p=0,7, q=1-0,7=0,3, m_1=652, m_2=760, тому $\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{652 - 700}{\sqrt{210}} = -\frac{48}{\sqrt{210}} = -3{,}3124,$

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{760 - 1000 \cdot 0{,}7}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = \frac{60}{\sqrt{210}} = 4{,}1405.$$

За таблицею (дод. В) для функції $\Phi(x)$ знаходимо, що

$$\Phi(4{,}1405)=0{,}4999,\ \Phi(-3{,}3124)=-\Phi(3{,}3124)=-0{,}4954,$$

Отже, $P_{1000}(652 \le m \le 760) = \Phi(4{,}1405) - \Phi(-3{,}3124) = 0{,}4999 + 0{,}4954 = 0{,}9953.$

1.3.5. Теорема Пуассона

Якщо n достатньо велике, а ймовірність події настільки мала, що число np невелике (звичайно $p \le 0{,}1$; $npq \le 10$), тобто для подій, що рідко трапляються, використовують асимптотичну формулу Пуассона.

Теорема 3. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні при необмеженому збільшенні числа випробувань n змінюється таким чином, що при $np=\lambda$, λ=const, то ймовірність того, що деяка подія A з'явиться m разів в n випробуваннях обчислюється за формулою

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \qquad (1.3.7.)$$

Для використання формули Пуассона немає необхідності знати окремо числа n і p, а лише їх добуток $\lambda=np$.

Приклад 8. На факультеті 730 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня є днем народження одночасно трьох студентів?

Розв'язання. Ймовірність того, що днем народження окремого студента є 1 вересня дорівнює p = 1/365. Застосовуючи формулу (1.3.7.), де n = 730, p=1/365, m = 3, $\lambda = np$ = 730 · 1/365 = 2, дістаємо

$$P_{730}(3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0{,}18045.$$

Таким чином, в середньому у 18 випадках із 100 на 1 вересня припадає день народження 3 студентів факультету.

Приклад 9. Ймовірність попадання в ціль при кожному пострілі рівна 0,001. Знайти ймовірність попадання в ціль двох і більше куль, якщо число пострілів рівне 5000.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у попаданні в ціль двох і більше куль: $k \geq 2$. Протилежною подією $\overline{A}$ до даної є $k \leq 1$. Отже, $P_n(k\geq 2)+P_n(k\leq 1)=1$.

Звідси $P(A)=P_n(k\geq 2)=1- P_n(k\leq 1)=1-[P_n(k=0)+ P_n(k=1)]$.

Оскільки n=5000 велике, а p=0,001<0,2- мала, і $\lambda=np=5000\cdot 0{,}001=5<10$, кожну ймовірність $P_n(k=0)$ і $P_n(k=1)$ обчислимо за формулою Пуассона:

$$P_{5000}(0)=\frac{5^0}{0!}e^{-5}=e^{-5}, \quad P_{5000}(1)=\frac{5^1}{1!}e^{-5}=5e^{-5}.$$

Отже, $P(A)=1-(e^{-5}+5e^{-5})=1-6e^{-5}=0{,}9590.$

1.3.6. Найімовірніше число появ випадкової події

Означення 4. *Число m_0, при якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність $P_n(m_0)$, називається найімовірнішим числом появи події A.*

Найімовірніше число m_0 задовольняє системі нерівностей:

$$np-q \leq m_0 \leq np+p \text{ або } (n+1)p-1 \leq m_0 \leq (n+1)p \qquad (1.3.8.)$$

якщо $np-q$ - неціле, то є одне значення m_0, якщо $np-q$ - ціле, то таких значень є два, які будуть відрізнятися між собою на 1:

$$m_1 = (n+1)p - 1 \text{ та } m_2 = (n+1)p.$$

Приклад 10. Частка виробів вищого ґатунку на даному підприємстві складає 26%. Чому дорівнює найімовірніше число виробів вищого ґатунку у випадково відібраній партії з 68 виробів?

Розв'язання. За умовою маємо, що p=0,26, n=68, а $q=1-p$=1-0,26=0,74.

За формулою (1.3.8.) одержимо

$$68 \cdot 0{,}26 - 0{,}74 \le m_0 \le 68 \cdot 0{,}26 + 0{,}26,$$

Звідси $$16{,}94 \le m_0 \le 17{,}94.$$

Отже, $m_0 = 17$.

Приклад 11. Під час використання нового технологічного процесу 80% усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти найбільш імовірне число виготовлених виробів найвищої якості серед 250 виготовлених виробів.

Розв'язання. За умовою n=250, p=0,8, $q=1-p$=1-0,8=0,2. Тоді за формулою (1.3.8.) отримаємо

$$199{,}8 \le m_0 \le 200{,}8.$$

Отже, $m_0 = 200$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка послідовність випробувань утворює схему Бернуллі?

2. Яку формулу називають формулою Бернуллі і що вона дозволяє обчислювати?

3. За якими формулами знаходять імовірність появи події A менше m або не менше за m разів у n випробуваннях схеми Бернуллі?

4. За якою формулою знаходять імовірність появи події A хоча б один раз у n випробуваннях?

5. Як можна знайти найбільш імовірне значення числа появ події A у схемі Бернуллі?

6. Як можна знайти кількість випробувань у схемі Бернуллі, яка дозволяє з ймовірністю P стверджувати, що подія A з'явиться хоча б один раз?
7. У яких випадках доцільно використовувати граничні теореми у схемі Бернуллі?
8. Коли доцільно застосовувати формули Пуассона, локальну або інтегральну формули Муавра-Лапласа?
9. Як визначаються і які мають властивості локальна та інтегральна функції Лапласа?
10. Як знаходять $P(m)$ у випадку послідовності випробувань із різними ймовірностями?
11. Як формулюється теорема Бернуллі і який вона має наслідок?
12. Який існує зв'язок між твердженням теореми Бернуллі та інтегральною функцією Лапласа? Які задачі дозволяє розв'язувати цей зв'язок?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Ймовірність знаходження в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення 0,2. Визначити ймовірність того, що в трьох із п'яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на дане призначення. *Відповідь.* 0,051.

2. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях подія A відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події становить 0,8. *Відповідь.* а) 0,4096; б) 0,73728.

3. На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок буде рівно 80 льодяників. *Відповідь.* 0,0498.

4. На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходить 100000 автомобілів. Ймовірність бракованого автомобіля дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів. *Відповідь.* 0,0375.

5. Ймовірність того, що пара взуття, яка взята навмання з виготовленої партії виявиться вищого ґатунку дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку? *Відповідь.* 0,6826.

6. Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня. *Відповідь.* 4.

7. Завод випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170? *Відповідь.* 0,7881.

8. Яка ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів? *Відповідь.* 0,007978.

9. Фірма відправила на базу 1000 якісних виробів. Ймовірність того, що вироби в дорозі пошкодяться дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів. *Відповідь.* 0,0361.

10. Нехай ймовірність того, що грошовий приймальник автомату при опусканні монети скидає неправильно дорівнює 0,03. Знайти найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуто 150 монет. *Відповідь.* 4.

11. Запропонуйте розв'язування однієї із задач 1-10 із використанням інформаційних технологій, використовуючи методику описану у третьому розділі.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Стрілець виконує 100 пострілів. Ймовірність попадання ним у мішень становить p. Чи правильне твердження: описані випробування стосовно події A – стрілець попадає в мішень, є незалежні.

Варіанти відповідей:

a. так;

b. ні.

2. Дві події називаються незалежними, якщо …

Варіанти відповідей:

a. ймовірність кожної з цих подій не залежить від появи чи не появи іншої;

b. ймовірність кожної з цих подій залежить від появи чи не появи іншої;

c. ймовірність кожної з цих подій не залежить від появи іншої;

d. ймовірність кожної з цих подій залежить від появи кожної з них.

3. Ймовірність того, що власник квартири не має заборгованості в оплаті за використання електроенергії (подія A), дорівнює $p=P(A)=0,6$. Яка ймовірність, що з 2400 власників квартир 1400 не мають названої заборгованості?

Варіанти відповідей:

a. 0,0052;

b. 0,052;

c. 0,0041;

d. 0,041.

4. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна – 0,75. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними.

Варіанти відповідей:

a. 7;

b. 8;

c. 9;

d. 10.

5. Внаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції - 0,8. Знайти ймовірність реалізації не менше ніж 75% із чотирьох навмання вибраних одиниць продукції.

Варіанти відповідей:

a. 0,4096;

b. 0,8192;

c. 0,1808;

d. 0,4008.

6. У місцевій лікарні 55% усіх новонароджених - хлопчики. Одного дня народилося 5 малюків. Яка найімовірніша серед них кількість хлопчиків?

Варіанти відповідей:

a. 1;

b. 2;

c. 3;

d. 4.

7. Виробник детекторів брехні вимагає, щоб детектори могли чітко розрізняти правильні відповіді від неправильних на 85%. Детектор тестують використовуючи 50 запитань. Визначте найбільш імовірне число правильних відповідей.

Варіанти відповідей:

a. 43;

b. 32;

c. 37;

d. 44.

8. Для кожного з 900 першокурсників ймовірність закінчити інститут дорівнює 0,9. Знайти межі в яких перебуватиме відносна частота кількості першокурсників, які закінчать інститут з ймовірністю 0,88.

Варіанти відповідей:

a. (0,8844; 0,9156);

b. (0,4421; 0,8856);

c. (0,6452; 0,9236);

d. (0,0844; 0,0156).

9. Середня кількість викликів таксі, які надходять в диспетчерський пункт протягом хвилини, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини надійде чотири виклики.

Варіанти відповідей:

a. 0,134;

b. 0,104;

c. 0,2;

d. 0,234.

10. Ймовірність того, що у водія автомобіля настане страховий випадок 0,85. Нехай є група з 10 осіб. Знайти найімовірніше число водіїв, у яких настане страховий випадок.

Варіанти відповідей:

a. 9;

b. 8;

c. 5;

d. 1.

Розділ II ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЕКОНОМІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

У цьому розділі викладено основні поняття і методи, які пов'язані з випадковими величинами, а саме:

- випадкова величина, види випадкових величин;
- дискретна та неперервна випадкові величини, закон розподілу випадкової величини та їх числові характеристики;
- інтегральна та диференціальна функції розподілу ймовірностей випадкової величини;
- основні закони розподілу випадкових величин та їх числові характеристики.

Сторінки історії

Поняття випадкової величини було введене в другій половині XIX ст. завдяки дослідженням вчених, які розглядали цікаві задачі, розв'язання яких вимагало цього поняття. Першу спробу ввести дане поняття здійснив француз С. Пуассон, проте він не користувався цим терміном, а говорив про деяку річ, яка може набувати значень $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_k$. І лише згодом «цю річ» назвали випадковою величиною російські математики П. Чебишов і О. Ляпунов.

2.1. Дискретні випадкові величини

2.1.1. Поняття випадкової величини. Види випадкових величин

На практиці досить часто зустрічаються з величинами, кількісне значення яких не може бути раз і назавжди визначене, а змінюється під впливом випадкових чинників. Так, вага зерен пшениці, вирощених на деякій дільниці, не дорівнює деякій певній величині, а різна для кожного зерна. Внаслідок неможливості врахувати вплив усіх чинників (якість дільниці ґрунту, на якій виріс колос з зерном, умови освітлення зерна, водний режим та ін.), що визначають зростання зерна, його вага є величиною, що змінюється в залежності від випадку. Отже, ми маємо справу з величинами, які так чи інакше характеризують собою результат зробленої операції. Кожна з цих величин при різних операціях, якими б однорідними ми не намагались зробити умови їх здійснення, може приймати різні значення, у залежності від випадкових відмінностей, що не підлягають нашому контролю. Такого роду величини називаються *випадковими величинами.*

Тобто, при дослідженні багатьох проблем зустрічаються з величинами, які внаслідок випробування можуть прийняти лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.

Прикладами таких величин є:

1. Кількість студентів, присутніх на лекції з дисципліни «Вища та прикладна математика».

2. Річний прибуток підприємства ПАТ «Вінницька цукеркова фабрика».

3. Кількість цукрового буряка, яку одержують з одного гектара.

Означення 1. *Випадковою величиною (ВВ) називають таку змінну величину, яка внаслідок випробування може набувати певних значень з відповідними ймовірностями.*

Випадкові величини позначаються великими латинськими буквами X, Y, Z, а їх значення – малими латинськими буквами x, y, z.

Зауваження. Випадкова подія – якісна характеристика випробування, а випадкова величина – кількісна характеристика випробування.

Випадкові величини в залежності від множини їх значень поділяються на дискретні та неперервні.

Означення 2. *Дискретною (перервною) випадковою величиною називають ВВ, множина значень якої скінченна або злічена.*

Тобто, множина значень такої величини є скінченною або нескінченною множиною, що складається з окремих ізольованих чисел. А саме, кожне з можливих значень ДДВ має окіл, який не містить жодного з інших значень цієї величини.

Прикладами ДВВ є:

1. Число підприємців із кожних ста, які декларують весь товар при перетині кордону.

2. Число відділів деякої страхової агенції, що вклалися у термін виконання деякого замовлення.

3. Число бракованих виробів у партії з тисячі одиниць товару.

Означення 3. *Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають ВВ, значення якої суцільно заповнюють деякий числовий проміжок.*

Приклади НВВ:

1. Час виконання студентами групи домашнього завдання з дисципліни «Економіка підприємства».

2. Час очікування трамвая № 4 на зупинці «26 школа» м. Вінниці.

3. Час розрахунку покупця за покупку в магазині.

Зауважимо, що для встановлення виду випадкової величини, потрібно знати не лише множину її можливих значень, а й вказати, з якими ймовірностями вона набуває того чи іншого значення.

2.1.2. Закон розподілу дискретної випадкової величини та способи його задання

Означення 4. *Законом розподілу дискретної випадкової величини (ДВВ) називають відповідність між можливими значеннями цієї величини та їх ймовірностями.*

Закон розподілу ДВВ може бути заданий:

1) у вигляді таблиці:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

де x_i – значення ДВВ,

p_i – відповідні їм ймовірності.

...велика частина питань практики зводиться до задач найбільших і найменших величин, зовсім нових для науки, і тільки розв'язанням цих задач ми можемо задовольнити вимоги практики, яка всюди шукає найкращого, найвигіднішого.

П.Л. Чебишов

Зауваження. Враховуючи те, що в одному випробуванні випадкова величина приймає тільки одне значення, робимо висновок, що події $X = x_1$, $X = x_2$, $X = x_3$, …, $X = x_n$ утворюють повну групу несумісних подій, тому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (2.1.1.)$$

Остання рівність називається *законом нормування*.

Зауваження. Якщо множина можливих значень X нескінченна, то числовий ряд $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ є збіжним.

2) аналітично (у вигляді формули): $P(X = x_i) = \varphi(x_i)$.

3) графічно: для цього в системі координат будують точки з координатами $(x_i; p_i)$ і з'єднують їх відрізками.

Отриману фігуру називають *ймовірнісним многокутником розподілу* (рис. 2.1.1.).

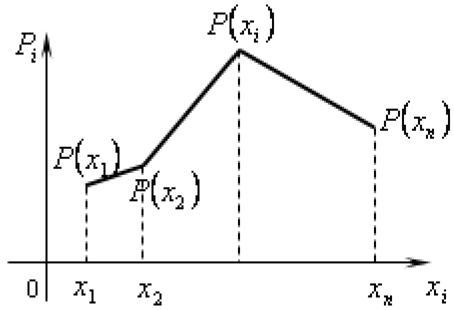


Рис. 2.1.1. Ймовірнісний многокутник розподілу

Відмітимо, що на практиці найчастіше застосовується табличний спосіб задання закону розподілу ДВВ.

Приклад 1. Експерт з банківського кредитування наголосив, що протягом місяця фірма A ліквідує свою заборгованість з ймовірністю 0,8; фірма B – з ймовірністю 0,9; а фірма C – з ймовірністю 0,7. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості фірм, які ліквідують заборгованість протягом місяця.

Розв'язання. ДВВ X може набувати наступних значень:

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3.$

Знайдемо їх ймовірності:

$P(X=0)=0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3=0{,}006.$

$P(X=1)=0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3+0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3+0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}7=0{,}092.$

$P(X=2)=0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3+0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}7+0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7=0{,}398.$

$P(X=3)=0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7=0{,}504.$

Запишемо закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

За законом нормування (2.1.1.) перевіримо:

$$p_1+p_2+p_3+p_4=0{,}006+0{,}092+0{,}398+0{,}504=1.$$

Приклад 2. У деякий момент часу визначається ефективність фінансової діяльності 2-х фірм за трибальною системою. Число очок, які може набрати перша фірма при одноразовій перевірці, має такий закон розподілу:

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,5	0,3

таке ж число очок для іншої фірми, але інший закон розподілу :

x_i	1	2	3
p_i	0	0,2	0,8

Знайти закон розподілу для випадку, коли фінансові результати обох фірм будуть поєднані.

Розв'язання. Сума, про яку йде мова, – випадкова величина. Наше завдання – скласти її закон розподілу. Для цього ми повинні розглянути всі можливі результати спільної діяльності наших двох фірм. Запишемо ці результати в таблицю, де ймовірність кожного результату обчислюється за правилом множення для незалежних подій. X означає число очок, що набирає перша фірма, а $Y-$ число очок, що набирає друга фірма.

№ результату	X	Y	$X+Y$	Імовірність результату (p_i)
1)	1	1	2	0·0,2=0
2)	1	2	3	0·0,5=0
3)	1	3	4	0·0,3=0
4)	2	1	3	0,2·0,2=0,04
5)	2	2	4	0,2·0,5=0,1
6)	2	3	5	0,2·0,3=0,06
7)	3	1	4	0,8·0,2=0,16
8)	3	2	5	0,8·0,5=0,4
9)	3	3	6	0,8·0,3=0,24

Ця таблиця повністю вирішує поставлене завдання. Сума всіх дев'яти ймовірностей у таблиці дорівнює одиниці.

Зауваження. Закон розподілу ймовірностей повністю характеризує ДВВ, проте він не завжди відомий, тому обмежуються меншими відомостями про цю величину, а саме, її числовими характеристиками. Користуючись такими характеристиками, в стислій формі можна отримати інформацію про істотні особливості законів розподілу випадкової величини.

2.1.3. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Числа, які описують випадкову величину, називаються її *числовими характеристиками.*

Означення 5. *Математичним очікуванням ДВВ X називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм ймовірності:*

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (2.1.2.)$$

Зауваження. Якщо ДВВ приймає нескінченну множину значень, то $M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, якщо останній числовий ряд збіжний.

Ймовірнісний зміст математичного очікування: $M(X)$ – середнє арифметичне зважене всіх її можливих значень.

$M(X)$ – число на числовій осі, в околі якого розташовані всі можливі значення випадкової величини.

Сторінки історії

Термін «математичне очікування» пов'язаний з азартними іграми. Якщо гравець m_1 раз виграв суму x_1, m_2 раз виграв суму x_2, …, m_k раз виграв суму x_k, то середня величина виграшу $\bar{x}$ в одній з n партій $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n)$ визначається так:

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k,$$

де w_i – відносна частота значення x_i.

При $n \to \infty, w_i \to p_i$. Таким чином, $\bar{x} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = M(X)$.

З точки зору гравця математичне очікування виграшу – середнє значення очікуваного виграшу.

Поняття «математичного очікування» в найпростішому (але не в явному) вигляді з'явилось досить рано в історії розвитку теорії ймовірностей. Неявно воно було присутнє в листуванні математиків Б. Паскаля та П. Ферма. Однак, вчені у своєму листуванні лише підсвідомо використовували дане поняття, не означаючи його. Вперше формальне означення математичного очікування дав голландський математик Х. Гюйгенс у своїй книзі «Математичні етюди» (1657 р.).

Означення, наведене Х. Гюйгенсом, фактично є узагальненим поняттям середнього арифметичного, яке широко застосовувалось в торгівлі і промисловості для визначення середніх цін, середнього продукту. Термінологія Х. Гюйгенса носить комерційний характер, зокрема вчений вважав, що математичне сподівання – це ціна шансу на виграш в елементарній грі. Вчений прийшов до висновку, що справедлива ціна – це середня ціна. Відзначимо також, що географія розвитку поняття «математичного очікування» є досить широкою і охоплює практично всю Європу.

Математичне очікування ДВВ має наступні **властивості:**

1. Математичне очікування сталої величини дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C, \text{ де } C = const.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного очікування:

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

3. Математичне очікування добутку взаємно незалежних дискретних випадкових величин дорівнює добутку математичних очікувань співмножників:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n).$$

4. Математичне очікування суми дискретних випадкових величин дорівнює сумі математичних очікувань складових:

$$M(X_1 + X_2 \cdot +..+ X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n).$$

Приклад 3. Майстерня з виготовлення шоколаду має договори на постачання своєї продукції з трьома магазинами та двома кафе. Ймовірність виконання договору одним магазином становить 0,9, а одним кафе – 0,8. Знайти середню кількість постачальників сировини, які виконають договори.

Розв'язання. Нехай X – число магазинів, Y – число кафе, що виконають договори. Складемо закони розподілу цих ДВВ:

Для випадкової величини X маємо: p=0,9, q=0,1.

Можливі значення X: $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

Ймовірності обчислюємо за формулою Бернуллі:

$p_0 = C_3^0 0{,}9^0 0{,}1^3. = 0{,}001$.

$p_1 = C_3^1 0{,}9^1 0{,}1^2. = 0{,}027$.

$p_2 = C_3^2 0{,}9^2 0{,}1^1. = 0{,}243$.

$p_3 = C_3^3 0{,}9^3 0{,}1^0. = 0{,}729$.

Перевірка: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1.$

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Тоді за формулою (2.1.2.), маємо:

$M(X) = 0 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}027 + 2 \cdot 0{,}243 + 3 \cdot 0{,}729 = 2{,}7.$

Для випадкової величини Y маємо: $p = 0{,}8,\ q = 0{,}2.$

Можливі значення Y: $y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2.$

Ймовірності обчислюємо за формулою Бернуллі:

$p_0 = C_2^0 0{,}8^0 0{,}2^2 = 0{,}04.$

$p_1 = C_2^1 0{,}8^1 0{,}2^1 = 0{,}32.$

$p_2 = C_2^2 0{,}8^2 0{,}2^0 = 0{,}64.$

Перевірка: $p_0 + p_1 + p_2 = 0{,}04 + 0{,}32 + 0{,}64 = 1.$

Закон розподілу випадкової величини Y має вигляд:

y_i	0	1	2
p_i	0,04	0,32	0,64

Тоді за формулою (2.1.2.), маємо:

$M(Y) = 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}32 + 2 \cdot 0{,}64 = 1{,}6.$

За ймовірнісним змістом математичного очікування середнє число постачальників наближено дорівнює $M(X+Y)$, тобто $M(X+Y) = 1{,}6 + 2{,}7 = 4{,}3.$

Отже, середнє число постачальників дорівнює 4-5.

Приклад 4. Для перевірки роботи 2-х продавців, було визначено суму, на яку клієнти магазину купують у них товар. У результаті дослідження була побудована наступна таблиця. Визначити, який з продавців працює краще?

Сума, на яку куплено товар, грн.		1	5	10	15	20
Кількість клієнтів	I продавець	200	400	1000	200	200
	II продавець	10	200	1500	280	10

Розв'язання. Побудуємо закон розподілу. Для цього розділимо на загальну кількість клієнтів значення кількості для кожної суми покупки. Загальна кількість клієнтів буде дорівнювати для першого продавця $200 + 400 + 1000 + 200 + 200 = 2000,$ для другого – $10 + 200 + 1500 + 280 + 10 = 2000$.

Отже, обидва продавці обслужили однакову кількість клієнтів. Імовірність того, що клієнт придбає товар на суму 1 грн. для першого продавця буде $200/2000 = 0{,}1,$ а для другого – $10/2000 = 0{,}005.$ І так далі. Зведемо результати в таблицю, де значеннями випадкової величини буде сума, на яку клієнти придбали товар.

Сума, на яку куплено товар, грн.		1	5	10	15	20
Імовірність купівлі товару	I продавець	0,1	0,2	0,5	0,1	0,1
	II продавець	0,005	0,1	0,75	0,14	0,005

Визначимо математичне очікування для кожного продавця:

$M_1 = 1 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}5 + 15 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}1 = 9{,}6$ грн.;

$M_2 = 1 \cdot 0{,}005 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}75 + 15 \cdot 0{,}14 + 20 \cdot 0{,}005 \approx 10{,}3$ грн.

Отже в середньому, у другого продавця клієнти купляють товару на більшу суму, тому він працює краще.

На практиці досить важливо знати не лише математичне очікування прибутку, доходу, витрат, але й розкид отриманих результатів навколо математичного очікування.

Щоб кожного разу не креслити числову пряму, достатньо обчислити числові характеристики розсіювання випадкових величин. Для цього розглядаються лінійне відхилення $(X - M(X))$ та його квадрат. Зауважимо, що вони, в свою чергу, є випадковими величинами, тому можна розглядати їх математичні очікування. Для такої характеристики не підходить вираз $M(X - M(X))$, оскільки воно дорівнює 0, тому, характеризуючи відхилення, його обчислюють як математичне очікування квадрата відхилення ДВВ від її математичного сподівання $M(X - M(X))^2$.

Означення 6. *Дисперсією ВВ називають математичне очікування квадрата відхилення дискретної випадкової величини від її математичного очікування.*

Тобто має місце формула:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \qquad (2.1.3.)$$

На практиці дисперсію найчастіше знаходять за формулами:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \text{ де } M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i. \qquad (2.1.4.)$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i. \qquad (2.1.5.)$$

Дисперсія має наступні **властивості:**

1. Дисперсія завжди набуває невід'ємних значень:

$$D(X) \geq 0.$$

2. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(C) = 0.$$

3. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X).$$

4. Дисперсія суми декількох незалежних дискретних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій складових:

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n).$$

Зауваження. Якщо ДВВ вимірюється в деяких одиницях, то її дисперсія вимірюється в квадратах цих одиниць.

На практиці важливо мати характеристику розсіювання, яка вимірюється в тих же одиницях, що й математичне очікування. Такою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Означення 7. *Середнім квадратичним відхиленням ДВВ називають арифметичний квадратний корінь з дисперсії.*

Позначають середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – $\sigma(X)$. Отже, має місце формула

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (2.1.6.)$$

Основна властивість середнього квадратичного відхилення: якщо $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ де $X_1, X_2, ..., X_n$ – взаємно незалежні випадкові величини, то

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}. \qquad (2.1.7.)$$

Зауваження. Дисперсія не дає повної картини лінійних відхилень можливих значень випадкової величини від математичного очікування $\Delta X = X - M(X)$, більш наочних і зручних для оцінки.

Проте, зв'язок між лінійним і квадратичним відхиленнями встановлюється за допомогою **нерівності Чебишова**: ймовірність того, що випадкова величина X відхиляється від свого математичного очікування більше, ніж на заданий допуск ε, не перевищує її дисперсії, яку поділено на ε^2:

$$P(|X - M(X)| > \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (2.1.8.)$$

Нерівність Чебишова показує, що незначному значенню дисперсії відповідає мале лінійне відхилення.

При виборі найкращого рішення на практиці (зокрема, в економіці) доцільно використовувати **правило оптимального коливання результату**, суть якого полягає у тому, що з можливих рішень вибирається те, при якому ймовірності виграшу й програшу для того самого ризикового вкладення мають невеликий розрив, тобто найменшу величину середнього квадратичного відхилення чи дисперсії.

Приклад 5. На першому сегменті ринку дохід з рівними ймовірностями може складати 100 млн. грн. при доброму розпродажу продукції і 80 млн. грн. – при середньому. На другому сегменті ринку очікується стабільний дохід у розмірі 93 млн. грн. Однак, існує ймовірність (0,2) того, що попит різко впаде і дохід стане 78 млн. грн. Необхідно вибрати сегмент, оптимальний з погляду результативності та ризику.

Розв'язання. Спочатку знайдемо математичне очікування доходів при роботі на кожному із сегментів ринку:

$M(X) = 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot 80 = 90$ (млн. грн.),

$M(Y) = 0{,}8 \cdot 93 + 0{,}2 \cdot 78 = 90$ (млн. грн.).

Визначимо розкид результатів для кожного з варіантів:

$M(X^2) = 0{,}5 \cdot 100^2 + 0{,}5 \cdot 80^2 = 8200.$

$D(X) = 8200 - 8100 = 100.$ $\sigma(X) = \sqrt{100} = 10$ (млн. грн.).

$M(Y^2) = 0{,}8 \cdot 93^2 + 0{,}2 \cdot 78^2 = 8136.$

$D(Y) = 8136 - 8100 = 36.$ $\sigma(Y) = \sqrt{36} = 6$ (млн. грн.).

Отже, перший сегмент більш ризикований за другий (10 млн.>6 млн.). Потрібно орієнтуватися на роботу у другому сегменті ринку, оскільки тут такий же очікуваний результат, як і на першому, але ризик менший.

Недоліком дисперсії та середнього квадратичного відхилення є те, що вони дають характеристику розсіювання, але не вказують, в яку сторону воно відбувається: збільшення чи зменшення, а підприємцю досить важливо знати, що ймовірніше: збільшення прибутку чи його зменшення.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка ВВ називається дискретною?

2. Наведіть свої приклади ДВВ.

3. Що таке «закон розподілу ДВВ»?

4. Які Вам відомі способи задання законів розподілу ДВВ?

5. Які Ви знаєте числові характеристики ДВВ? Як вони обчислюються?

6. Які властивості має математичне очікування ДВВ?

7. Який ймовірнісний зміст математичного очікування ДВВ?

8. Як на практиці користуються числовими характеристиками ДВВ?

9. Що показує нерівність Чебишова?

10. В чому суть «правила оптимального коливання результату»? Як ним користуються при розв'язуванні задач з економічним змістом?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Під час виробництва бракованого виробу підприємство може зазнати збитків. Закон розподілу X (тис. грн.) прибутків цього підприємства за деякий період має такий вигляд:

x_i	-20	-10	15	30
p_i	0,1	0,2	0,6	0,1

Знайти середню величину прибутку за цей період. *Відповідь.* 8 тис. грн.

2. Фермер очікує, що в наступному році кури на його фермі нанесуть 100000 десятків яєць. Беручи до уваги різні витрати й коливання цін, фермер розраховує виручити не більш як 150 коп. за десяток яєць і витратити на них не більш як 90 коп. Ймовірність можливих виграшів і витрати такі:

Ціна за 10 яєць, коп.	150	130	110	0	-90
p_i	0,2	0,4	0,3	0,07	0,03

Визначити очікуваний прибуток від продажу одного десятка яєць і всіх 100000 десятків яєць. *Відповідь.* $M_1 = 112{,}3$ коп., $M_2 = 112300$ грн.

3. Випадкова величина X – число підприємців із кожних десяти, які декларують не весь товар під час перетину кордону, розподілена за таким законом:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,28	0,15	0,1	0,1	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,02	0,01

Знайти числові характеристики випадкової величини X.

Відповідь. $M(X) = 2{,}83$. $D(X) = 7{,}2811$. $\sigma(X) \approx 2{,}698$.

4. Статистика по регіону свідчить, що 5% працездатних мешканців регіону є безробітними. Навмання вибирають три мешканця. Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа безробітних осіб серед навмання відібраних трьох мешканців регіону. *Відповідь.*

x_i	0	1	2	3
p_i	0,804357	0,181629	0,013671	0,000343

5. Дискретна випадкова величина X – річний дохід підприємства (в млн. грн.) має тільки 2 можливих значення: x_1 та x_2 причому $x_1 < x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1 рівна 0,2. Скласти закон розподілу величини X, знаючи її математичне очікування $M(X) = 2{,}6$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = 0{,}8$. *Відповідь.*

x_i	1	3
p_i	0,2	0,8

6. Дискретна випадкова величина X – річний прибуток фірми (в млн. грн.) має тільки 3 можливих значення: $x_1 = 1$, x_2 та x_3, причому $x_1 < x_2 < x_3$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1 та x_2 відповідно дорівнюють 0,3 та 0,2. Скласти закон розподілу величини *X*, знаючи її математичне очікування $M(X) = 2{,}2$ і дисперсію, яка рівна 0,76. *Відповідь.*

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

7. Розглядається три варіанти виробництва нових товарів. Можливі прибутки від реалізації проектів у різних ситуаціях, а також ймовірності їх настання подано в таблиці.

Характеристика ситуації	Можливий дохід (тис. грн.)	Імовірність настання ситуації
Проект А Песимістична Найбільш ймовірна Оптимістична	 100 250 400	 0,1 0,6 0,3
Проект В Песимістична Найбільш ймовірна Оптимістична	 80 300 500	 0,25 0,5 0,25
Проект С Песимістична Найбільш ймовірна Оптимістична	 90 300 400	 0,2 0,6 0,2

Вибрати варіант оптимальний з погляду результативності та ризику.

Відповідь. Варіант А.

8. За даними відділу маркетингу підприємства з ймовірностями 0,7, 0,6, 0,3 прогнозується підвищення попиту на кожний з трьох видів продукції, що реалізується. Скласти закон розподілу числа видів продукції, для яких прогнозується підвищення попиту. *Відповідь.*

x_i	0	1	2	3
p_i	0,084	0,358	0,432	0,126

9. Компанія визначає ймовірності наступу економічного росту так: сильного – 0,3; середнього – 0,5; слабкого – 0,2. Грошові надходження у проекти А, В, С, за якими прогнозується можливий економічний ріст, передбачаються згідно з даними таблиці. Прийняти рішення щодо вкладення інвестицій.

Рівень економічного росту	Ймовірність	Очікувані грошові надходження, млн. грн.		
		A	B	C
Сильний	0,3	5,2	2,9	3,4
Середній	0,5	2,2	2,1	2,6
Слабкий	0,2	0,2	1,6	0,5

Відповідь. Варіант А.

10. Фірма «Христина» виробляє парфумерну продукцію. Протягом року реалізується 200, 220, 240 чи 250 упаковок продукції. Від продажу кожної упаковки фірма одержує 160 грн. прибутку. Парфумерія має малий термін придатності, тому, якщо упаковка не продана за рік, вона повинна бути знищена. Виробництво одної упаковки обходиться в 420 грн. Якщо упаковка не продана під кінець року, фірма понесе збитки. Імовірності продати 200, 220, 240 чи 250 упаковок за рік складають відповідно 0,1; 0,4; 0,3; 0,2. Скільки упаковок варто випускати фірмі щорічно? *Відповідь.* 220 упаковок.

11. Запропонуйте розв'язування однієї із задач 1-10 із використанням інформаційних технологій, використовуючи методику описану у третьому розділі.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Якими повинні бути числа p_1 і p_4, щоб таблиця

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
p_i	p_1	0,2	0,3	p_4

відображала закон розподілу випадкової величини X – вартості вийнятої банкноти з сейфа підприємства, якщо $p_4 - p_1 = 0{,}3$.

Варіанти відповідей:

a. $p_1 = 0{,}1$, $p_4 = 0{,}4$;

b. $p_1 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}1$;

c. $p_1 = 0{,}1$, $p_4 = 0{,}5$;

d. $p_1 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}1$.

2. Випадкова величина X – квартальний дохід підприємства (в тис. грн.) задана таким законом розподілу:

x_i	250	240	300	280
p_i	0,4	0,2	0,1	…

Заповніть порожню клітинку і обчисліть $M(X)$.

Варіанти відповідей:

a. 148 тис. грн.;

b. 262 тис. грн.;

c. 267,5 тис. грн.;

d. 269 тис. грн.

3. Садівник навесні посадив три саджанці: одну черешню, одну сливу, одну грушу. Ймовірність того, що саджанець черешні прийметься, дорівнює 0,7. Для саджанців сливи і груші ці ймовірності становлять відповідно 0,9 і 0,6. Знайти середнє квадратичне відхилення числа саджанців, які приймуться.

Варіанти відповідей:

a. 2,388;

b. 0,493;

c. 0,702;

d. 1,472.

4. Випадкова величина X – місячний прибуток фірми (в тис. грн.) задана таким законом розподілу:

x_i	20	24	31	29	25	30
p_i	…	0,2	0,1	0,1	0,3	0,15

Заповніть порожню клітинку і обчисліть $D(X)$.

Варіанти відповідей:

a. 12,26 тис. грн.;

b. 12,26 (тис. грн.)^2;

c. 11,612 тис. грн.;

d. 11,612 (тис. грн.)^2.

5. Розглядається два варіанти виробництва нових товарів. Можливі доходи від реалізації проектів у різних ситуаціях, а також ймовірності їх настання подано в таблиці.

Характеристика ситуації	Можливий дохід (тис. грн.)	Імовірність настання ситуації
Проект А Песимістична Найбільш ймовірна Оптимістична	 100 333,3 500	 0,2 0,6 0,2
Проект В Песимістична Найбільш ймовірна Оптимістична	 80 300 600	 0,1 0,5 0,4

Вибрати варіант оптимальний з погляду результативності та ризику.

Варіанти відповідей:

a. варіант А;

b. варіант В;

c. вибрати неможливо жоден з варіантів;

d. варіанти А і В.

6. У сейфі лежать 200 банкнот, з яких 50 – по 500 грн., 40 – по 200 грн., 40 – по 100 грн., 70 – по 50 грн. Із сейфа навмання вибирають одну банкноту. Написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – вартості вийнятої банкноти у формі таблиці:

x_i	500	200	100	50
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

Варіанти відповідей:

a. $p_1 = 0{,}25,\ p_2 = 0{,}2,\ p_3 = 0{,}2,\ p_4 = 0{,}35;$

b. $p_1 = 0{,}2,\ p_2 = 0{,}25,\ p_3 = 0{,}35,\ p_4 = 0{,}3;$

c. $p_1 = 0{,}25,\ p_2 = 0{,}35,\ p_3 = 0{,}2,\ p_4 = 0{,}2;$

d. $p_1 = 0{,}3,\ p_2 = 0{,}2,\ p_3 = 0{,}35,\ p_4 = 0{,}25.$

7. Підприємство використовує два види сировини. Ймовірності зриву поставок кожної з них відповідно дорівнюють 0,1; 0,05. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа видів сировини, поставка яких буде зірвана.

Варіанти відповідей:

a.

x_i	0	1	2
p_i	0,855	0,005	0,14

b.

x_i	0	1	2
p_i	0,005	0,855	0,14

c.

x_i	0	1	2
p_i	0,855	0,14	0,005

d.

x_i	0	1	2
p_i	0,005	0,14	0,855

8. Відомо, що серед готівкової маси 0,5% купюр є непридатними до наступного використання. Скласти закон розподілу величини X – числа купюр, непридатних до наступного використання, серед двох навмання взятих.

Варіанти відповідей:

a.

x_i	0	1	2
p_i	0,990025	0,00995	0,000025

b.

x_i	0	1	2
p_i	0,00995	0,990025	0,000025

c.

x_i		1	2
p_i	0,00995	0,000025	0,990025

d.

x_i	0	1	2
p_i	0,000025	0,00995	0,990025

9. Компанія визначає ймовірності наступу економічного росту так: сильного – 02; середнього – 0,6; слабкого – 0,2. Грошові надходження у проекти А, В, за якими прогнозується можливий економічний ріст, передбачаються згідно з даними таблиці. Прийняти рішення щодо вкладення інвестицій.

Рівень економічного росту	Ймовірність	Очікувані грошові надходження, тис. грн.	
		A	B
Сильний	0,2	5,2	3,3
Середній	0,6	2,1	5,6
Слабкий	0,2	0,2	2,2

Варіанти відповідей:

a. варіант А;

b. варіант В;

c. вибрати неможливо жоден з варіантів;

d. варіанти А і В.

10. Випадкова величина X – місячний прибуток фірми (в дес. тис. грн.) може приймати лише три значення $x_1 = 4$ з ймовірністю $p_1 = 0{,}5$, значення $x_2 = 6$ з ймовірністю $p_1 = 0{,}2$, значення x_3 з ймовірністю p_3. Знайти x_3 і p_3, якщо $M(X) = 8$.

Варіанти відповідей:

a. $x_3 = 16,\ p_3 = 0{,}4;$

b. $x_3 = 16,\ p_3 = 0{,}3;$

c. $x_3 = 16,\ p_3 = 0{,}2;$

d. $x_3 = 16,\ p_3 = 0{,}1.$

Сторінки історії

У XVIII ст. швидко почала розвиватися теорія похибок (помилок) спостережень. «Похибка вимірювання, в залежності від випадку, може приймати різні значення» – основна думка вчених, які займались теорією випадкових величин. Вперше така думка була висловлена Г. Галілеєм. Спочатку вчені вважали, що можливі значення похибок вимірювань складають арифметичну прогресію з невизначеною, але дуже малою різницею. Відмовившись від такої думки, науковці почали припускати, що можливі значення, які приймають похибки спостережень, заповнюють певний відрізок, а ймовірності можливих значень визначались через визначення густини розподілу. У роботах П. Лапласа, К. Гаусса поняття «густини розподілу» означалось наближено до сучасного означення.

2.2. Неперервні випадкові величини

2.2.1. Інтегральна функція розподілу ймовірностей

Означення 8. *Випадкова величина X називається неперервною (НВВ), якщо сукупність її можливих значень цілком заповнює деякий проміжок числової осі, який може бути скінченним або нескінченним.*

Приклад. Випадкова величина X – час безвідмовної роботи комп'ютера, – неперервна, оскільки її можливе значення $t > 0$.

Таким чином, кількість можливих значень НВВ нескінченна і незліченна, тому задати її за допомогою закону розподілу ймовірностей неможливо. Тому, для задання цієї ВВ використовують інтегральну функцію розподілу імовірностей.

Означення 9. *Інтегральною функцією розподілу ймовірностей (функцією розподілу ймовірностей) називається функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше від x, тобто, $F(x) = p(X < x)$.*

Геометрично останню рівність можна трактувати так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина X набуває значень, які зображуються на числовій прямій точками, що лежать зліва від точки x.

Означення 10. *Випадкову величину називають неперервною, якщо її інтегральна функція розподілу ймовірностей* $F(x)$ *неперервно диференційовна.*

Зауважимо, що поняття функції розподілу ймовірностей вводиться для будь-якої випадкової величини *X*, у тому числі і дискретної, проте в цьому випадку ця функція не є неперервною.

Властивості функції розподілу ймовірностей**:**

1. Значення інтегральної функції розподілу ймовірностей належать відрізку $[0;1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто, $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. Ймовірність того, що X прийме одне конкретне значення дорівнює 0: $p(x = x_0) = 0$ для будь-якого значення x_0.

4. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a;b]$, дорівнює приросту її функції розподілу ймовірностей на цьому проміжку: $p(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$.

5. Якщо можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(a;b)$, то: $F(x) = 0$ при $x \le a$ і $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Приклад 6. Випадкову величину X – витрати електроенергії на фірмі в кВт за годину роботи задано функцією розподілу ймовірностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0{,}5x - 1, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність $p(2{,}5 \le X \le 5)$.

Розв'язання. За властивістю 4 отримаємо

$p(2{,}5 \le X \le 5) = F(5) - F(2{,}5) = 1 - (1{,}25 - 1) = 0{,}75.$

2.2.2. Диференціальна функція розподілу ймовірностей

Неперервну випадкову величину можна задати також за допомогою щільності (густини) розподілу ймовірностей (щільності (густини) розподілу, диференціальної функції розподілу) – функції, яка позначається $f(x)$ і визначається рівністю: $f(x) = F'(x)$.

Із запропонованого означення випливає, що функція розподілу $F(x)$ є первісна для густини розподілу $f(x)$. Графік $f(x)$ називається кривою *розподілу* (рис. 2.2.1.).

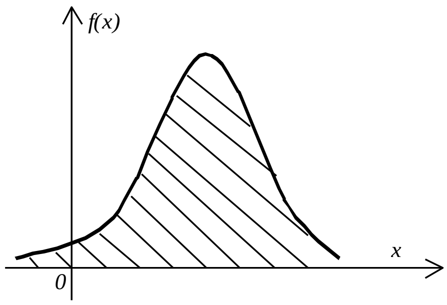


Рис. 2.2.1. Щільність розподілу

Якщо щільність розподілу $f(x)$ відома, то функцію розподілу $F(x)$ можна знайти за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt . \qquad (2.2.1.)$$

Щільність розподілу має **властивості:**

1. На всій числовій осі щільність розподілу невід’ємна функція, тобто $f(x) \geq 0$ для $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці (*умова нормування*): $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

3. Остання властивість геометрично означає, що вся площа фігури, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

4. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(a;b)$, обчислюється за формулою: $p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

5. Імовірність попадання випадкової величини X на інтервал $(a;b)$ обчислюється як площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком кривої $f(x)$, знизу – відрізком $[a;b]$ осі абсцис, зліва і справа − відрізками прямих $x=a$ та $x=b$.

Приклад 7. Дано густину розподілу неперервної випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a\sqrt{x}, & 1<x\le 9,\\ 1, & x>9.\end{cases}$$

Визначити число a.

Розв'язання. За умовою нормування $\int_1^9 a\sqrt{x}dx=1$.

Отже, $a\int_1^9\sqrt{x}dx=a\cdot\frac{2}{3}\cdot(9^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}})=1$, $\frac{2}{3}a(27-1)=1$,

звідси $a=\frac{3}{52}$.

2.2.3. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Означення 11. *Математичне очікування НВВ X, яка має щільність ймовірностей $f(x)$, визначається формулою:*

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx, \qquad (2.2.2.)$$

за умови, що такий невласний інтеграл збіжний.

Якщо ж інтеграл розбіжний, то математичне очікування не визначене.

Означення 12. *Дисперсією НВВ X називається число*

$$D(X)=M(X-M(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx, \qquad (2.2.3.)$$

за умови, що невласний інтеграл збіжний.

Зокрема, має місце формула:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2. \qquad (2.2.4.)$$

Середнє квадратичне відхилення визначається так: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Властивості цих характеристик такі ж, як і для ДВВ.

Приклад 8. Знайти математичне очікування випадкової величини, яка задана функцією розподілу $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо диференціальну функцію розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{2x}{9}, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

За формулою (2.2.2.), маємо: $M(X)=\int_0^3 x\cdot\frac{2x}{9}dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3}-\frac{2}{9}\cdot\frac{0^3}{3}=2.$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка випадкова величина називається неперервною? Наведіть приклади НВВ, які використовуються в економіці.

2. Як обчислюється ймовірність попадання значень НВВ в певний інтервал?

3. Що таке «функція розподілу ймовірностей» НВВ?

4. Наведіть властивості функції розподілу ймовірностей?

5. Якою рівністю визначається зв'язок між функцією розподілу $F(x)$ та густиною розподілу ймовірностей $f(x)$?

6. Як знайти функцію розподілу $F(x)$, якщо відома щільність розподілу $f(x)$?

7. Що таке «крива розподілу»?

8. Які особливості графіка щільності розподілу ймовірностей НВВ?

9. Які Вам відомі числові характеристики НВВ? Як вони обчислюються?

10. Охарактеризуйте основні властивості числових характеристик НВВ.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Функція розподілу кількості прибутку X задана у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт *a*. *Відповідь. a=1.*

2. Дана функція розподілу неперервної величини X – величини доходу підприємства: $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin 2x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Знайти густину розподілу *f(x)*. *Відповідь.* $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 2\cos 2x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

3. Задана щільність розподілу випадкової величини X: $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$. Знайти сталий множник C. *Відповідь.* $\dfrac{1}{2\pi}$.

4. Задана диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} x-0{,}5, & 1<x\le 2, \\ 0, & x\le 1, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу X.

Відповідь. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ 0{,}5x^2-0{,}5x, & 1<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$

5. Випадкова величина X задана щільністю розподілу: $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ C\sin x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Знайти сталу C та функцію розподілу $F(x)$.

Відповідь. $C=1$. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-\cos x, & 0<x\le \pi/2; \\ 1, & x>\pi/2. \end{cases}$

6. Випадкова величина X – кількість прибутку підприємства в інтервалі $(0;5)$ задана густиною розподілу $f(x)=\frac{2}{25}x$, зовні цього інтервалу *f(x)*=0. Знайти математичне очікування та дисперсію X. *Відповідь.* $M(X)=1.\ D(X)=\frac{25}{18}$.

7. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – коливання курсу валют, яка задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{x^2}{25}, & 0<x\le 5, \\ 1, & x>5. \end{cases}$$

Відповідь. 1,17.

8. Задано щільність розподілу кількості прибутку *X*: $f(x)=ae^{-|x|}$. Знайти коефіцієнт a та ймовірність одержання величини прибутку X із відрізка $[0{,}5;1]$ млн. грн. *Відповідь.* $a=0{,}5.;P(0{,}5\le X\le 1)=\frac{e^{0{,}5}-1}{2e}$.

9. Випадкова величина доходу підприємства *X* має диференціальну функцію розподілу: $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ 0{,}2, & -2\le x\le 3, \\ 0, & x>3. \end{cases}$

Знайти дисперсію та ймовірність одержання доходу $x\in(1;5)$.

Відповідь. $D(X)=\frac{6{,}25}{3}\approx 2{,}1.\ P(1<X<5)=0{,}4.$

10. Випадкова величина X має функцію розподілу $F(x)=1-\frac{1}{x}$, при $x\ge 1$ і $F(x)=0$, при $x<1$. Знайти a, для якого $p(X>a)=\frac{1}{3}$. *Відповідь.* $a=3$.

11. Запропонуйте розв'язування однієї із задач 1-10 із використанням інформаційних технологій, використовуючи методику описану у третьому розділі.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Для яких чисел A і B $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ Ax+B, & -1<x\le 16, \\ 1, & x>16. \end{cases}$ є функцією розподілу ймовірностей деякої НВВ?

Варіанти відповідей:

a. $A = \frac{1}{15}, B = \frac{1}{15}$;

b. $A = \frac{1}{17}, B = \frac{1}{15}$;

c. $A = \frac{1}{17}, B = \frac{1}{17}$;

d. $A = \frac{1}{15}, B = \frac{1}{17}$.

2. Випадкова величина X задана на всій осі Ox функцією розподілу $F(x) = 0{,}5 + \frac{arctgx}{\pi}$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення з інтервалу (0;1).

Варіанти відповідей:

a. 0,5;
b. 0,25;
c. $\frac{1}{\pi} + 0{,}5$;
d. 0,2.

3. Випадкова величина X – дохід підприємства задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0{,}5x, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення менше 3.

Варіанти відповідей:

a. 0,5;
b. 0,25;
c. 0,75;
d. 0,6.

4. Чи може густина розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X – середньорічного доходу населення набувати значення - 0,05 у. о.?

Варіанти відповідей:

a. не може;
b. може;
c. залежно від конкретної ситуації;
d. залежно від інфляції.

5. Нехай функція розподілу деякої неперервної випадкової величини X – прибутку підприємства задана у вигляді $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ a(1 - \cos x), & 0 < x \le \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$. Визначити значення коефіцієнта *a*.

Варіанти відповідей:
a. 0,5;
b. 1;
c. π;
d. 1,5.

6. Студент пам'ятає, що щільність показникового розподілу має вигляд: $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, але забув, чому рівна стала *C*.

Варіанти відповідей:
a. $-\lambda$;
b. λ^2;
c. λ;
d. λ^3.

7. Випадкова величина X задана густиною розподілу $f(x) = 2x$ в інтервалі (0;2) і $f(x) = 0$ зовні цього інтервалу. Знайти математичне очікування величини X .

Варіанти відповідей:
a. $\frac{3}{2}$;
b. 1;
c. $\frac{2}{3}$;
d. $\frac{1}{2}$.

8. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$. Знайти $\sigma(X)$.

Варіанти відповідей:
a. $\frac{2}{9}$;
b. 0,471;
c. 2;
d. 2,1.

9. Густина розподілу ймовірностей НВВ *X* має вигляд: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{2}{9}(x-2), & 2 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$

Для якого числа *m*є(0;5] імовірність $p(m<x\leq 5)=\frac{8}{9}$?

Варіанти відповідей:
a. 1;
b. 2,5;
c. 3;
d. 2.

10. Розподіл ймовірностей НВВ *X* заданий густиною: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}5, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

Чому дорівнює середнє квадратичне відхилення *σ(x)*?

Варіанти відповідей:

a. $\frac{1}{3}$;

b. 4;

c. $\frac{4}{9}$;

d. 3.

Сторінки історії

Пуассон Сімеон Дені (1781– 1840 рр.) – французький механік, фізик і математик, науковий доробок якого – величезний. Він написав понад 300 праць, значна частина яких відіграла важливу роль у становленні сучасної науки, а деякі його праці не втратили свого значення і дотепер. Вчений ґрунтовно поліпшив способи застосування теорії ймовірностей, довів теорему, що стосувалася закону великих чисел (закон Пуассона), вперше скориставшись терміном "закон великих чисел".

2.3. Основні закони розподілу випадкових величин

2.3.1. Закони розподілу дискретної випадкової величини

Означення 13. *Біноміальним називається закон розподілу ДВВ, яка приймає значення з ймовірностями, що обчислюються за схемою Бернуллі. Тобто, біноміальний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості «успіхів» у серії з* n *незалежних випробувань, у кожному з яких «успіх» відбувається з ймовірністю* p .

Отже, біноміальний закон розподілу задається наступним чином:

x_i	0	1	…	k	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Зауважимо, що

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + ... + C_n^k p^k q^{n-k} + ... + p^n = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Звідки і слідує назва «біноміальний».

Математичне очікування біноміального розподілу дорівнює добутку числа випробувань n на ймовірність p появи події в одному випробуванні:

$$M(x) = np \tag{2.3.1.}$$

Дисперсія біноміального розподілу дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи і не появи події в одному випробуванні:

$$D(x) = npq \tag{2.3.2.}$$

Приклад 9. Митний пост дає наступну статистичну оцінку: 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларують весь товар, який підлягає оподаткуванню. Випадково вибрано три особи. Потрібно записати закон розподілу випадкової величини X – кількості осіб, що не декларують весь товар, привезений з-за кордону.

Розв'язання. Обчислимо ймовірності:

$P(X = 0) = C_3^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{3-0} = 0{,}512.$

$P(X = 1) = C_3^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{3-1} = 0{,}384.$

$P(X = 2) = C_3^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{3-2} = 0{,}096.$

$P(X = 3) = C_3^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{3-3} = 0{,}008.$

Запишемо закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,08

Приклад 10. Ймовірність погашення банківського кредиту кожним клієнтом становить 0,8. Знайти математичне очікування випадкової величини X – числа клієнтів серед вибраних 10, які своєчасно і в повному обсязі повернуть кредити банкові.

Розв'язання. Оскільки своєчасне погашення кредиту одним клієнтом не залежить від того, чи поверне кредит інший, і ймовірність своєчасного погашення кредиту кожним клієнтом є однакова, то маємо послідовність випробувань за схемою Бернуллі. У даному випадку $n = 10$, $p = 0{,}8$ і $M(X) = 10 \cdot 0{,}8 = 8$, тобто, в середньому, 8 із 10-ти клієнтів погасять кредити своєчасно.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n велике і p прямує до нуля, то біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона.

Означення 14. *Дискретна випадкова величина має розподіл Пуассона, якщо вона набуває зліченної множини значень* $m=1,2,3,\ldots$ *з ймовірностями*

$$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}, \tag{2.3.3.}$$

де $\lambda = np, (\lambda > 0)$.

Отже, пуассонівський закон – це закон розподілу випадкової величини, заданий таблицею, у якій ймовірності обчислюються за формулою Пуассона. Тобто, маємо:

x_i	0	1	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda\cdot e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$	…

Цей розподіл описує кількість подій, які настають в однакові проміжки часу за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної зі сталою інтенсивністю.

У зв’язку з тим, що ймовірність появи окремих подій у розподілі Пуассона характеризується малою ймовірністю $(p\to 0)$, закон Пуассона називають *законом рідкісних явищ.*

Закон Пуассона описує кількість вимог щодо виплати страхових сум за рік; потік заявок на запасні частини, вузли, агрегати, кількості дефектів на однакових пробах речовини і т. ін. Розподіл застосовується у теорії надійності, теорії масового обслуговування.

Математичне очікування $M(X)$ і дисперсія $D(X)$ для розподілу Пуассона рівні і визначаються за формулою: $M(X)=D(X)=np.$

Теорія ймовірностей, подібно до інших розділів математики, виникла з потреб практики; в абстрактній формі вона відображає закономірності, властиві подіям масового характеру. Ці закономірності відіграють надзвичайно важливу роль у фізиці й інших галузях природознавства, військовій справі, найрізноманітніших технічних дисциплінах, економіці й т. д.

Б.В. Гнєденко

Приклад 11. Електронна пошта банку підтримує зв'язки з сотнею абонентів. Імовірність того, що за одиницю часу на електронну пошту надійде повідомлення від абонента, становить 0,02. Написати закон розподілу величини X – числа надходження сигналів від абонентів. Яка при цьому з подій є найбільш імовірною: B – за одиницю часу надійдуть сигнали від одного абонента, C – за одиницю часу надійдуть сигнали від трьох абонентів.

Розв'язання. У даному випадку проводиться $n = 100$ випробувань за схемою Бернуллі і випадкова величина X може набувати значень $x_0 = 0,\ x_1 = 1,$ $x_2 = 2,\ x_3 = 3, \ldots,\ x_{100} = 100.$ Ймовірність події A – надходження сигналу від одного абонента є мала, а число $n = 100$ є велике і $\lambda = 100 \cdot 0{,}02 = 2$, тому відповідні ймовірності обчислюються за формулою Пуассона:

$$p_0 = P_{100}(0) \approx e^{-2} \approx 0{,}1353.$$

$$p_1 = P_{100}(1) \approx 2e^{-2} \approx 0{,}2707.$$

$$p_3 = P_{100}(3) \approx \frac{4}{3}e^{-2} \approx 0{,}1804.$$

$$p_4 = P_{100}(4) \approx \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0{,}0902.$$

$$\ldots$$

$$p_{100} = P_{100}(100) = 1 - \sum_{i=0}^{99} P_{100}(i).$$

Закон розподілу описаної в задачі ДВВ X записуємо у формі таблиці:

x_i	0	1	2	3	4	…
p_i	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	…

Із наведеної таблиці видно, що $p(B) = 0{,}2707$ і $p(C) = 0{,}1804$, тобто, більш ймовірно, що сигнали надійдуть від одного абонента, а ніж від трьох.

Для цього розподілу складено таблиці ймовірностей щодо різних значень $\lambda(0{,}1 - 5)$ (додаток С).

Істинна логіка нашого світу – правильний підрахунок ймовірностей.

М.М. Мойсеєв

Приклад 12. У супермаркет відправлено 3000 скляних пляшок мінеральної води «Боржомі». Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка буде розбита, дорівнює 0,001. Знайти:

а) математичне очікування випадкової величини X – кількості розбитих пляшок;

б) дисперсію X – кількості розбитих пляшок.

Розв'язання. Маємо розподіл Пуассона, тому що n досить велике, а $p = 0{,}001$. Тоді:

а) за формулою (2.3.1.) математичне очікування випадкової величини $M(X) = np = 3000 \cdot 0{,}001 = 3$ – середня кількість розбитих пляшок;

б) дисперсія $D(X) = M(X) = 3$.

Геометричний розподіл

Геометричний закон розподілу має частота настання події у схемі незалежних повторних випробувань, якщо вони проводяться до першого настання події.

Ймовірності можливих значень випадкової величини X визначається залежністю:

$$P(X = m) = pq^{m-1}, m = 1,2,3,\dots.$$

У останній формулі p – імовірність настання події в кожному випробуванні. Даний закон називають *геометричним законом розподілу*, оскільки права частина формули, за якою при цьому знаходяться ймовірності, співпадає з виразом загального члена геометричної прогресії.

У табличній формі геометричний закон розподілу має вигляд:

x_i	1	2	3	4	…
p_i	p	pq	pq^2	pq^3	…

При перевірці закону нормування використовується формула суми нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p + pq + pq^2 + pq^3 + \ldots = p(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1. \quad (2.3.4.)$$

Числові характеристики розподілу:

Математичне очікування обчислюється за формулою:

$$M(X) = \frac{1}{p}. \qquad (2.3.5.)$$

Дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2} \qquad (2.3.6.)$$

Геометричний закон розподілу застосовується у задачах статистичного контролю якості і теорії надійності, у страхових розрахунках.

Серед ДВВ лише геометричному закону притаманна властивість відсутності післядії.

Геометричний закон розподілу має місце в таких науках як мікробіологія, генетика, фізика.

Гіпергеометричний розподіл

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність появи m елементів з певною властивістю серед n елементів, взятих із сукупності N елементів, яка містить саме k елементів такої властивості:

$$p(X = m) = \frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad (2.3.7.)$$

де m=1, 2,…,n; $k \geq n$.

Числові характеристики розподілу:

Математичне очікування обчислюється за формулою:

$$M(X) = \frac{kn}{N}. \qquad (2.3.8.)$$

Дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}. \qquad (2.3.9.)$$

Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості та в суміжних галузях.

Приклад. Імовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N, m виявляться дефектними, має гіпергеометричний закон розподілу (k - кількість дефектних деталей у партії).

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального з параметрами n і $p=\frac{k}{N}$. Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона.

Сторінки історії

На початку XIX ст. два математики, незалежно один від одного, майже одночасно довели закон за яким розподіляються випадкові похибки. Це нормальний закон розподілу.

Першим із цих математиків був великий німецький вчений К. Гаус (1777-1855 рр.), другий – маловідомий американський математик Р. Едрейн (1775-1843 рр.). До кінцевого результату – нормального закону розподілу кожен з математиків йшов своїм шляхом. Робота Едрейна була опублікована в 1808 році, робота Гаусса "Теорія руху" вийшла у світ в 1809 році. Р. Едрейн розв'язував конкретну задачу, при її узагальненні й отримав розподіл випадкової величини (похибок).

2.3.2. Закони розподілу неперервної випадкової величини

Рівномірний розподіл. В деяких задачах зустрічаються неперервні випадкові величини, про які відомо, що їх можливі значення знаходяться в межах певного визначеного інтервалу. Крім того, відомо, що в межах цього інтервалу всі значення випадкової величини однаково ймовірні (точніше мають одну і ту ж густину ймовірності). Про такі випадкові величини кажуть, що вони розподілені за *законом рівномірної щільності.*

Означення 15. *Неперервна випадкова величина X називається рівномірно розподіленою на відрізку $[a;b]$, якщо усі її можливі значення належать цьому відрізку і її щільність розподілу ймовірностей на цьому відрізку стала, тобто*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\notin[a,b],\\ 0, x\notin[a,b].\end{cases} \quad (2.3.10.)$$

Числові характеристики розподілу:

Математичне очікування обчислюється за формулою:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}. \quad (2.3.11.)$$

Дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.3.12.)$$

Рівномірний розподіл задовольняють, наприклад, похибки округлення різноманітних розрахунків.

Приклад рівномірно розподіленої випадкової величини:

Потяги метрополітену їдуть з інтервалом 2 хвилини. Пасажир виходить на платформу в деякий момент часу. Час T, протягом якого йому потрібно чекати потяг, є випадковою величиною, розподіленою з рівномірною щільністю на відрізку $[0;2]$ хвилин.

Показниковий розподіл

Означення 16. *Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, якщо щільність її ймовірностей має вигляд*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0,\\ 0, x<0.\end{cases} \quad (2.3.13.)$$

де $\lambda>0$ − параметр розподілу.

Числові характеристики розподілу:

Математичне очікування обчислюється за формулою:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}. \quad (2.3.14.)$$

Дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.3.15.)$$

Показниковому розподілу задовольняють: гарантійний термін ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп'ютера, тривалість телефонної розмови і т.д.

Якщо випадкова величина розподілена за показниковим законом, то її функція розподілу має вигляд $F(x)=1-e^{-\lambda x}$.

Тому, $p(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

Приклад 13. Час *Т* безвідмовної роботи двигуна автомобіля розподілений за показниковим законом. Відомо, що середній час безвідмовної роботи двигуна між технічними обслуговуваннями рівний 100 годинам. Визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за 80 годин.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – час безвідмовної роботи.

Середній час безвідмовної роботи рівний його математичному очікуванню: $M(X)=100$.

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \lambda=\frac{1}{M(X)}=0{,}01.$$

Тоді $p(0\le X\le 80)=e^{-0\cdot 0{,}01}-e^{-80\cdot 0{,}01}=1-0{,}4493=0{,}5507$.

Нормальний розподіл

Означення 16. *Неперервна випадкова величина X називається нормально розподіленою, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.3.16.)$$

де $a\in(-\infty;+\infty), \sigma>0$ – параметри розподілу.

Для нормального розподілу параметр a – це математичне сподівання, а параметр σ – середнє квадратичне відхилення.

Графік $f(x)$ називається *нормальною кривою* або *кривою Гауса*.

Для побудови графіка густини нормального розподілу сформулюємо

властивості функції $f(x)$:

1. $D(f(x))=R$.

2. $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;+\infty)$, отже, графік $y=f(x)$ лежить вище осі *Ox*.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,$ тому вісь Ox є горизонтальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$ при $x\to\infty$.

4. Для $x=a+\alpha$ і $x=a-\alpha$ функція $y=f(x)$ має однакові значення, отже, графік функції симетричний відносно прямої $x=a$.

5. Функція $y=f(x)$ має максимум в точці $x=a$, $f_{\max}=f(a)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

6. Функція $y=f(x)$ має дві точки перегину: $(a-\sigma;\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}),\ (a+\sigma;\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$.

Повне дослідження цієї функції методами диференціального числення дозволяє побудувати графік нормальної кривої, зображеної на рис. 2.3.1.

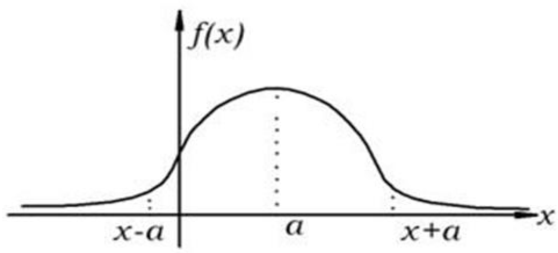


Рис. 2.3.1. Нормальна крива

Нормальний закон розподілу (який ще називається *законом Гауса*) відіграє виключно важливу роль в теорії ймовірностей і займає серед інших законів розподілу особливий стан. Це закон, який найчастіше зустрічається на практиці. Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу.

«Універсальність» нормального закону пояснюється тим, що будь-яка випадкова величина, яка є сумою великої кількості окремих числових значень, кожне з яких підпорядковується різним законам розподілу і несуттєво впливає на суму, розподілена майже за нормальним законом.

Цим законом характеризуються ймовірності у вимірюваннях, у страховій справі. Зокрема, більшість випадкових величин, таких, наприклад, як похибки вимірів можуть бути подані як суми великої кількості малих доданків – елементарних похибок, кожна з яких визначається дією окремої причини, яка не залежить від інших. Яким би законам розподілу не підпорядковувались окремі елементарні похибки, особливості цих розподілів в сумі великої кількості доданків нівелюються і сума підпорядковується закону, що близький до нормального. Підсумовані похибки в загальній сумі повинні грати відносно малу роль.

У ризикології при побудові кривої економічного ризику користуються тим, що прибуток – випадкова величина, піддана дії нормального закону розподілу.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуває значень з інтервалу $(\alpha;\beta)$, обчислюється за формулою:

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}), \qquad (2.3.17.)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Приклад 14. Фірма, що займається продажем товарів за каталогом, щомісячно отримує поштою замовлення. Число цих замовлень є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім квадратичним відхиленням 560. У 90% випадків число щомісячних замовлень перевищує 12439. Знайти середнє число замовлень, що отримуються фірмою за місяць.

Розв'язання. Середнє число замовлень є математичним очікуванням випадкової величини. За формулою (2.3.17.) маємо

$$p(12439 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi(\frac{12439 - M(X)}{560}) = 0{,}9.$$

$$0{,}5 - \Phi(\frac{12439 - M(X)}{560}) = 0{,}9.$$

$$\frac{M(X) - 12439}{560} = 1{,}282.$$

$$M(X) = 13157.$$

Правило трьох сигм

Якщо випадкова величина X розподілена нормально, то $p(|X - a| > 3\sigma) \to 0$, тобто, практично достовірною є подія, що величина X відхилена від свого середнього значення a (математичного очікування) не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення σ.

На практиці це **правило** використовують так:

якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але $|X-a|<3\sigma$, тоді можна припустити, що X розподілена нормально.

Приклад 15. Середній дохід $\overline{X}$ на душу населення дорівнює 8000 у.о. В яких межах можна практично гарантувати дохід X на душу населення, якщо випадкова величина X нормально розподілена зі середнім квадратичним відхиленням 200 у.о.

Розв'язання. Використаємо правило «трьох сигм», за яким $|X-a|<3\sigma$. У даному випадку $M(X)\approx\overline{X}=8000$, $\sigma=200$, і маємо: $|X-8000|<3\cdot 200$, тоді $-600<X-8000<600$, $7400<X<8600$.

Отже, практично можна гарантувати, що середній дохід на душу населення коливається в межах від 7400 у.о. до 8600 у.о.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Коли закон розподілу ДВВ називається біноміальним? Чому?

2. Якщо випадкова величина X – число появ події A в n випробуваннях за схемою Бернуллі і $p=p(A)$ ймовірність появи події A в одному випробуванні, то $M(X)=\ \ldots$.

3. Якими формулами виражаються числові характеристики випадкової величини, що має розподіл Пуассона?

4. Де застосовуються геометричний та гіпергеометричний закони розподілу ймовірностей?

5. Наведіть приклади ДВВ, розподіленої за гіпергеометричним законом розподілу ймовірностей.

6. Який вигляд має функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом?

7. Якими формулами виражаються числові характеристики рівномірно розподіленої випадкової величини?

8. Нормальний розподіл неперервної випадкової величини характеризується двома параметрами a і σ. Який їх ймовірнісний зміст?

9. Який вигляд має нормальна крива? Як вона змінюється при зміні параметрів розподілу?

10. Як формулюється «правило трьох сигм»?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. У деякій агенції кожне замовлення виконується частинами незалежно у трьох відділах. Ймовірність того, що якийсь відділ не виконає свою частину роботи вчасно, становить 0,2. Скласти закон розподілу числа відділів, що не вклалися у термін виконання даного замовлення. *Відповідь.*

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

2. Статистика свідчить, що 9% працездатних мешканців регіону є безробітними. Навмання вибирають 4 мешканці. Написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа безробітних осіб серед навмання вибраних 4 мешканців регіону. Знайти:

а) ймовірність того, що не більше ніж двоє осіб серед чотирьох вибраних мешканців регіону є безробітними;

б) найімовірніше число безробітних осіб серед 4 вибраних мешканців регіону. *Відповідь.* а) 0,997; б) 0.

3. Робітник виготовляє певний тип деталей. Ймовірність виготовлення бракованої деталі дорівнює 0,01. Написати закон розподілу випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед 150 виготовлених (за формулою Пуассона). Знайти ймовірність того, що серед виготовлених деталей виявиться не більше 2 бракованих. *Відповідь.* $p(X \le 2) = 0{,}809$.

4. У військовому містечку 99,99% мешканців хоча б раз в житті користувались послугами страхових компаній. Проводять соціологічні дослідження серед 20000 навмання взятих мешканців. Визначити дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – числа мешканців, які жодного разу не користувались послугами страхових компаній. *Відповідь.* $D(X) = \sigma(X) = 2$.

5. Ймовірність того, що деталь виготовлена на автоматичному станку без дефектів, рівна 0,1. Працівник державної служби прийомки перевіряє якість усіх щойно виготовлених деталей до виявлення деталі з дефектом. Припускаючи, що цей процес може продовжуватись нескінченно довго, скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості перевірок до виявлення деталі з дефектом. *Відповідь.*

x_i	1	2	3	$\ldots$	n	$\ldots$
p_i	0,9	$0{,}1 \cdot 0{,}9$		$\ldots$	$0{,}1^{n-1} \cdot 0{,}9$	$\ldots$

6. У партії електронних виробів з 12 одиниць 9 стандартних. Працівник державної служби прийомки навмання відбирає два вироби. Скласти закон розподілу числа стандартних виробів серед відібраних. *Відповідь.*

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{6}{11}$

7. Ціна поділу шкали ваг 0,2. Покази ваг округлюються до найближчого цілого поділу шкали. Знайти ймовірність того, що при зважуванні буде зроблена похибка менша 0,04. *Відповідь.* 0,4.

8. Помилки в обчисленнях, допущені бухгалтером при складанні балансу, розподіляються у відсотках за нормальним законом з параметрами $a = 0{,}5$ і $\sigma = 0{,}01$. Написати функцію і густину розподілу цих помилок та намалювати їх графіки. В яких межах містяться помилки обчислень з імовірністю 0,9973? *Відповідь.* $1{,}47 < X < 1{,}53$.

9. Середня ціна деякої великої кількості акцій корпорації становить 12,8 у.о., а середнє квадратичне відхилення 3 у.о. Припускаємо, що ціни розподілені за нормальним законом. Знайти: а) яку частку акцій продають за ціною, не вищою від 10 у.о.? б) яка ймовірність того, що навмання взята акція матиме ціну від 11 до 14 у.о.? в) нижче від якої ціни продаються 20% найдешевших акцій? *Відповідь.* а) 0,1762 від усіх акцій; б) 0,3811; в) 10,28 у.о.

10. Банк провів дослідження про наявність річних заощаджень в осіб, вік яких є не меншим ніж 21 рік. Дослідження показали, що річні заощадження на одну особу нормально розподіляються зі середнім числом 1859 у.о. і середнім квадратичним відхиленням – 350 у.о. Визначити ймовірність того, що навмання вибрана особа має заощадження:

а) більше ніж 220 у.о.;

б) менше ніж 1500 у.о.;

в) у межах від 1080 у.о. до 2375 у.о.;

г) менше ніж 800 у.о.

Відповідь. а) 0,1587; б) 0,1587; в) 0,9193; г) 0,00135.

11. Запропонуйте розв'язування однієї із задач 1-10 із використанням інформаційних технологій, використовуючи методику описану у третьому розділі.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Відомо, що серед готівкової маси 0,5% купюр є непридатними до наступного використання. Скласти закон розподілу величини X – числа нестандартних купюр серед двох навмання взятих, а також знайти $M(X)$ та $\sigma(X)$.

Варіанти відповідей:

a.

x_i	0	1	2
p_i	0,990025	0,00995	0,000025

b.

x_i	0	1	2
p_i	0,00995	0,990025	0,000025

c.

x_i	0	1	2
p_i	0,000025	0,00995	0,990025

d.

x_i	0	1	2
p_i	0,990025	0,000025	0,00995

2. Завод відправив на базу 500 комп'ютерів. Ймовірність пошкодження комп'ютера при транспортуванні рівна 0,2%. Знайти дисперсію випадкової величини X – числа комп'ютерів вказаної партії, які будуть пошкоджені при транспортуванні.

Варіанти відповідей:

a. 1;

b. 0,002;

c. 0,5;

d. 0,02.

3. Ймовірність того, що виріб, виготовлений на автоматичному станку, буде першого або другого ґатунку рівна 0,8. Для контролю якості регулювання станка майстер періодично перевіряє один за одним вироби, але не менше 5 штук кожного разу. При знаходженні виробів нижче другого ґатунку станок зупиняється на регулювання. Вважаючи, що ймовірність виготовлення виробів першого і другого ґатунків залишається постійною, скласти теоретичний розподіл кількості перевірок виробів, які майстер здійснює при одній серії випробувань.

Варіанти відповідей:

a.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,16	0,128	0,2	0,1024	0,4096

b.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,128	0,16	0,2	0,1024	0,4096

c.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

d.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,16	0,2	0,128	0,1024	0,4096

4. Фірма відвантажила споживачеві 60000 виробів. Ймовірність того, що при транспортуванні один виріб буде пошкоджений, становить 0,0001. Випадкова величина X – число пошкоджених виробів – розподілена за законом Пуассона. Знайти математичне очікування X.

Варіанти відповідей:

a. 3;

b. $\sqrt{6}$;

c. 6;

d. $\sqrt{3}$.

5. Маса пакунків з цукром є випадковою величиною *X*, що підкоряється нормальному розподілу з математичним очікуванням 1000 г та стандартним відхиленням 0,5 г. Записати густину ймовірностей *X*.

Варіанти відповідей:

a. $f(x)=\dfrac{1}{0,5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-0,5)^2}{2\cdot 1000^2}}$;

b. $f(x)=\dfrac{1}{0,5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-1000)^2}{2\cdot 0,5^2}}$;

c. $f(x)=\dfrac{1}{0,5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-0,5)^2}{2\cdot 0,5}}$;

d. $f(x)=\dfrac{1}{0,5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-1000)^2}{2\cdot 1000^2}}$.

6. Коробки з цукерками упаковуються на кондитерській фабриці автоматично. В середньому маса однієї коробки дорівнює 1,06 кг. Знайти середнє квадратичне відхилення, якщо 5% коробок мають масу меншу 1 кг. (передбачається, що маса коробок розподілена нормально).

Варіанти відповідей:

a. 0,365;

b. 0,0365;

c. 0,0356;

d. 0,0536.

7. Автобуси ходять з інтервалом 5 хв. Вважаючи, що випадкова величина *X* – час очікування автобуса на зупинці – розподілена рівномірно на вказаному проміжку часу, знайти середній час очікування.

Варіанти відповідей:

a. 2,5;

b. $\dfrac{25}{12}$;

c. 6,25;

d. 5,25.

8. За статистичними даними річний дохід населення міста N має нормальний розподіл із середнім значенням 3 тис. грн. та середнім квадратичним відхиленням 1 тис. грн. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний житель міста має дохід менше 6 тис. грн.

Варіанти відповідей:

a. 0,0027;

b. 0,9973;

c. 0,9;

d. 0,027.

9. Годинна витрата електроенергії в будинку є випадковою величиною з нормальним розподілом, математичне очікування якої дорівнює 3 кВт, а дисперсія становить 36 кВт^2. Оцінити ймовірність того, що найближчої години витрата електроенергії в цьому будинку буде від 4 до 11 кВт.

Варіанти відповідей:

a. 0,3407;

b. 0,4307;

c. 0,7403;

d. 0,4037.

10. Маса виловленої риби є неперервною нормально розподіленою випадковою величиною X з параметрами $M(X) = 375$ г, $\sigma(X)=20$ г. Знайти ймовірність того, що зважування буде проведено з похибкою, що не перевищує за абсолютною величиною 10 г.

Варіанти відповідей:

a. 0,338;

b. 0,833;

c. 0,383;

d. 0,333.

2.4. Граничні теореми теорії ймовірностей

2.4.1. Поняття про граничні теореми теорії ймовірностей

На практиці важливу роль мають закономірності, які відбуваються з ймовірностями, близькими до одиниці. Серед яких особливе значення мають закономірності, що виникають в результаті накладення великої кількості незалежних або слабо залежних випадкових факторів. Накопичений досвід вказує, що явища, які мають ймовірність надто близьку до одиниці, майже обов'язково відбуваються. Тому однією із задач теорії ймовірностей є встановлення закономірностей, що відбуваються з ймовірностями, близькими до одиниці. Закономірності такого вигляду називаються *граничними теоремами теорії ймовірностей.* Вони утворюють дві групи: закони великих чисел (ці закони математично описують стійкість середніх значень масових випадкових явищ і зазвичай формулюється у формі теорем Чебишова, Бернуллі); центральна гранична теорема (ця теорема звичайно формулюється у формі теореми Лапласа та теореми Ляпунова).

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, властиві масовим випадковим явищам. Закономірності виявляються при великій кількості випадкових явищ, що відбуваються при однакових умовах. Це означає, що характеристики випадкових подій і випадкових величин в цих умовах стають стійкими: середній їх результат (наприклад, частота події, середні значення випадкової величини) перестає бути випадковим і може бути передбачений з великим ступенем визначеності. Вказана особливість є суттю «закону великих чисел». Закон великих чисел відіграє важливу роль у різних процесах, пов'язаних з масовим виробництвом.

Граничні ж теореми, що встановлюють граничні закони розподілу випадкових величин, об'єднують загальною назвою «центральна гранична теорема». Необхідність граничних теорем обумовлена потребою розв'язування, наступних **задач:**

1. Коли сума багатьох випадкових величин мало відрізняється від постійної величини, тобто майже перестає бути випадковою величиною, і тому її поведінка може прогнозуватися із значною ймовірністю?
2. При яких умовах можна із значною ймовірністю прогнозувати число появи деякої випадкової події при великій кількості незалежних випробувань?
3. При яких обмеженнях сума багатьох випадкових величин буде розподілена за нормальним законом?

Сторінки історії

Теорія ймовірностей почала перетворюватися в строгу науку завдяки працям П. Чебишова (1821-1894рр.). Двадцятирічним хлопцем він закінчив університет, а через два роки опублікував свою першу наукову роботу. В 25 років у Московському університеті захистив дисертацію, що була присвячена теорії ймовірностей. У двадцять вісім років він отримав у Петербурзькому університеті ступінь доктора наук. Дисертацією була його книга «Теорія порівнянь», якою згодом більш ніж півстоліття науковці та студенти користувалися як одним із глибоких і серйозних джерел з теорії чисел.

2.4.2. Закон великих чисел

Закон великих чисел об'єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних невипадкових, сталих величин.

При доведені граничних теорем, а також при розв'язуванні різних задач важливу роль відіграють нерівності Чебишова та Маркова.

Нерівності Чебишова.

***Перша форма*:** якщо випадкова величина X невід'ємна і має скінченне математичне очікування, то $p(X \ge 1) \le M(X)$.

***Друга форма*:** Якщо випадкова величина X має скінченні математичне очікування та дисперсію, то для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність:

$$p(|X - M(X)| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (2.4.1.)$$

Остання нерівність в разі малого числа $\varepsilon > 0$ дає оцінку знизу ймовірності того, що величина X набуде значення, досить близького до її математичного очікування.

Для оцінки ймовірності зверху використовують нерівність Маркова.

Нерівність Маркова. Якщо у невід'ємної випадкової величини X є математичне очікування $M(X)$, то при певному додатному ε має місце нерівність:

$$p(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}. \qquad (2.4.2.)$$

Приклад 15. Сума всіх вкладів у банках становить 2000 у.о., а ймовірність того, що випадково взятий вклад не перевищує 100 у.о., дорівнює 0,8. Що можна сказати про кількість вкладників цього банку?

Розв'язання. Нехай X – величина випадково вибраного вкладу, N – кількість усіх вкладників. Тоді з умови задачі випливає, що $M(X) = \frac{2000}{N}$.

Оскільки ймовірність $(X < 100) = 0{,}8$ і за нерівністю Маркова (2.4.2.) $p(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$, то $0{,}8 \geq 1 - \frac{2000}{100N}$. Звідки $\frac{2000}{100N} \geq 0{,}2$. Отже, отримаємо: $N \leq 100$.

Теорема Чебишова (Закон великих чисел)

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно незалежні, мають скінченні математичні очікування $M(X_i) = a_i$ та обмежені в сукупності дисперсії $D(X_i) \leq \sigma_i^2 \leq \sigma^2, i = 1,. 2,\ldots$.

Позначимо $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, n = 1, 2, \ldots$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{n \to \infty} p(\left|\overline{X}_n - \overline{a}_n\right| < \varepsilon) = 1.$

Суть теореми Чебишова полягає в тому, що незважаючи на те, що кожна з незалежних випадкових величин X_i може приймати значення, далекі від математичного очікування $M(X_i)$, середнє арифметичне достатньо великого числа випадкових величин з великою ймовірністю близьке до середнього арифметичного їх математичних очікувань. Тому теорема Чебишова має важливе практичне значення.

Теорія ймовірностей — математична теорія, яка лежить в основі всієї статистичної теорії, і є також відправною точкою теоретичних побудов при вивченні випадкових процесів.

М. Барлетт

Нехай, **наприклад**, вимірюється деяка величина. Звичайно, за її значення приймають середнє арифметичне результатів кількох вимірювань. Але чи так можна робити? Теорема Чебишова дає позитивну відповідь на це питання. На теоремі Чебишова ґрунтується широко використовуваний у статистиці вибірковий метод, згідно з яким за порівняно невеликою вибіркою роблять висновок про всю сукупність досліджуваних об'єктів.

Наслідок з теореми Чебишова. Якщо всі члени послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ мають скінченні математичні очікування $M(X_i) = a$ і дисперсії $D(X_i) = \sigma^2$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} p(|\overline{X}_n - a| < \varepsilon) = 1.$

Для випробувань, проведених за схемою Бернуллі, закон великих чисел формулюється як **теорема Бернуллі:**

Нехай m – число появи події A в n незалежних випробуваннях Бернуллі, $W_n(A) = \frac{m}{n}$ – відносна частота цієї події. $p(A) = p$ – ймовірність появи події A в одному випробуванні. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} p(|W_n(A) - p| < \varepsilon) = 1$, тобто відносна частота події A збігається до її ймовірності p.

Із теореми Бернуллі слідує, що коли число випробувань n є досить великим, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ подія є практично достовірною, тобто, відносна частота події A має властивість стійкості.

Прикладом практичного застосування закону великих чисел є розробка і реалізація методів статистичного моделювання (наприклад, методу Монте-Карло), прогнозування, які широко застосовуються в економіці, техніці. В цьому випадку роблять об'єктивні висновки про параметри життєдіяльності системи ще на стадії проекту. Таким чином, закон великих чисел говорить про те, як і коли випадковість в масових явищах перетворюється в закономірність. Його можна широко застосовувати і при аналізі соціальних, демографічних явищ, поведінки колективів і т. ін.

Сторінки історії

Перший закон великих чисел був доведений Я. Бернуллі (1654-1705р.) в його книзі «Мистецтво догадуватися». Сам Я. Бернуллі не використовував поняття «закон великих чисел», це поняття ввів лише С. Пуассон в 1835 р. і сформулював його так: «Явища всього світу підпорядковуються універсальному закону, який можна назвати законом великих чисел. Він полягає в тому, що якщо спостерігати досить велику кількість подій однієї і тієї ж природи, які залежать і від постійних величин, і від причин, що змінюються регулярно ..., то між цими кількостями проявляються майже постійні співвідношення».

Ще до опублікування «Мистецтва догадуватися» висловлювалися твердження, які можна віднести до передісторії закону великих чисел. Зокрема, Вітт, згадавши практику «оптового» скуповування пожиттєвих рент на ім'я багатьох людей зразу, стверджував, що покупець міг розраховувати на прибуток «без випадковостей і ризику».

Неформалізована і часто інтуїтивна ідея про оптимальні властивості середніх також походить від Аристотеля – від його вчення про переваги середньої поведінки, середньої помірності і т. д.

Довів, так звану центральну граничну теорему, яка дає відповідь на питання, чому нормально розподілені випадкові величини часто зустрічаються на практиці, російський математик О. Ляпунов (1857-1918рр.).

2.4.3. Центральна гранична теорема

Закон великих чисел встановлює факт збіжності деяких випадкових величин до сталих їх характеристик. При цьому ні в одній з форм закону великих чисел не маємо справи із законами розподілу випадкових величин. Часто доводиться мати справу з такими випадковими величинами, які є сумами великої кількості незалежних випадкових величин. Виникає питання: за деяких умов виявляється, що ця сума має розподіл, близький до нормального, хоча кожен з доданків може не підпорядковуватися нормальному закону розподілу ймовірностей.

Група теорем, що стосується граничних законів розподілу суми випадкових величин, об'єднані загальною назвою – центральна гранична теорема. Центральна гранична теорема встановлює умови, за яких указаний граничний закон є нормальним.

Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова)

Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними математичними очікуваннями $a_i = M(X_i)$ і дисперсіями $\sigma_i^2 = D(X_i), i = 1,2,\ldots$ Введемо нові випадкові величини $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, для яких $M(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $D(Y_n) = \sigma^2(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. Тоді, якщо виконана умова $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$ де $b_i = M|X_i - a_i|^3$, то для будь-якого числа x виконується така гранична рівність:

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}5 + \Phi(x). \qquad (2.4.3.)$$

На практиці центральна гранична теорема переважно використовується в тому випадку, коли доданки X_i мають однаковий розподіл.

Наслідок з центральної граничної теореми. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченними математичними очікуваннями $a = M(X_n)$, дисперсією $\sigma^2 = D(X_n)$ і

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ M(Y_n) = na,\ \sigma^2(Y_n) = D(Y_n) = n\sigma^2.$$

Тоді для будь-якого x: $\lim_{n\to\infty} p\left(\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma(Y_n)} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}5 + \Phi(x).$

Приклад 16. У касі банківської установи залишилась сума $d = 3500$ у.о. У черзі за отриманням грошей стоять 20 осіб. Сума X, яку потрібно виплатити окремій особі, − випадкова величина з математичним очікуванням $M(X) = 150$ у.о. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 60$ у.о. Знайти ймовірність того, що суми d не вистачить для виплати грошей усім особам, які стоять у черзі.

Розв'язання. Використовуючи центральну граничну теорему для однаково розподілених доданків X_i при великому n ($n = 20$ можна практично вважати великим), випадкова величина $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i – сума, яку потрібно виплатити i-ій особі, має приблизно нормальний розподіл із параметрами: $M(Y_n) = nM(X)$, $D(X_n) = nD(X)$, $\sigma(Y_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$ або $M(Y_n) = 20 \cdot 150 = 3000,$ $\sigma(Y_n) = \sqrt{20} \cdot 60 \approx 268.$ Тоді

$$P(Y_n > 3500) = 1 - P(Y_n \le 3500) \approx 1 - 0,5 - \Phi(\frac{3500-3000}{268}) = 0,5 - \Phi(1,87) \approx 0,0307.$$

Отже, з імовірністю, близькою до 0,0307, наявної в касі суми грошей не вистачить для виплати всім бажаючим.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Оцінку ймовірності чого виражає нерівність Чебишова?

2. Які нерівності відіграють важливу роль при доведені граничних теорем?

3. Які закономірності називаються «граничними теоремами теорії ймовірностей»?

4. Потребою розв'язування яких задач обумовлена необхідність граничних теорем?

5. В чому полягає суть «закону великих чисел»?

6. Який факт виражає нерівність Чебишова?

7. У яких процесах відіграє важливу роль «закон великих чисел»?

8. Які умови встановлює центральна гранична теорема?

9. Що стверджує центральна гранична теорема?

10. Коли на практиці переважно використовується центральна гранична теорема?

...де на поверхні проходить гра випадковості, там сама ця випадковість завжди виявляється підпорядкованою внутрішнім, прихованим законом. Уся справа тільки в тому, щоб відкрити ці закони.

Ф. Енгельс

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Деякий проміжок часу на біржі спостерігався відносно стабільний курс валют. На основі даних біржової статистики на цей період було складено таку таблицю можливих змін курсу валют:

Можлива зміна курсу, %	-1	-0,5	0	0,5	1
Імовірність зміни	0,1	0,3	0,5	0,005	0,005

За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність того, що $p|X - M(X)| < 0{,}54$. *Відповідь.* $p \geq 0{,}29$.

2. Відомо, що 75% продукції, яка виробляється підприємством, − вищого ґатунку. Оцінити ймовірність того, що число виробів першого ґатунку серед 200000 виготовлених буде відрізнятись від математичного очікування цього числа не більше, ніж на 2000 шт. *Відповідь.* 0,990625.

3. Середньодобове споживання електроенергії в населеному пункті дорівнює 15000 кВт·год. Визначити ймовірність того, що споживання електроенергії в цьому населеному пункті протягом даної доби перевищить 40000 кВт·год. *Відповідь.* $p \leq 0{,}375$.

4. Середні витрати води в населеному пункті становлять 50000 л за день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті протягом одного певного дня витрати води не перевищать 150000 л. *Відповідь.* $p \geq \frac{2}{3}$.

5. Майстерня обслуговує 100 комп’ютерів. Імовірність того, що кожний із 100 комп’ютерів витримає гарантійний термін роботи, становить 0,9. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що більше, ніж 85 і менше ніж 95 комп’ютерів витримають гарантійний термін роботи. *Відповідь.* 0,64.

6. У касі ощадного банку є 4500 у.о. У черзі знаходиться 20 працівників. Сума *X*, яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною з математичним очікуванням, рівним 200 у.о. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 55$ у.о. Знайти ймовірність того, що суми, котра є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі. *Відповідь.* 0,022.

7. Ймовірність вчасної реалізації продукції дорівнює 0,4. Оцінити ймовірність того, що в 100 незалежно реалізованих одиницях продукції відхилення відносної частоти реалізації імовірності 0,4 за абсолютним значенням буде не менше від 0,1. *Відповідь.* 0,24.

8. Ймовірність дозрівання кукурудзяного стебла з трьома качанами дорівнює 75%. Оцінити ймовірність того, що серед 3000 стебел частка з трьома качанами буде за абсолютною величиною відрізнятись від імовірності дозрівання такого стебла не більше, ніж на 0,02? *Відповідь.* 0,984.

9. З 5000 електронних виробів було обстежено 500 шт., відібраних випадковим чином. Серед них виявилось 10 бракованих. Прийнявши частку бракованих виробів серед відібраних за ймовірність виготовлення бракованого виробу, оцінити ймовірність того, що у всій партії виявиться бракованих виробів не менше 1% і не більше 3%. *Відповідь.* 0,9608.

10. Перевіряється партія комп'ютерів. З ймовірністю 0,01 комп'ютер може мати дефект у відеокарті і, незалежно від цього, з ймовірністю 0,02 – в оперативній пам'яті. В яких межах буде міститися практично достовірно число бракованих комп'ютерів в партії з 1000 штук, якщо за ймовірність практичної достовірності приймаємо 0,997? *Відповідь.* $(0;128)$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Дисперсія випадкової величини X – тижневого прибутку підприємства дорівнює 0,01 тис. у.о. Яка ймовірність того, що випадкова величина X відрізняється від її математичного очікування $M(X)$ більше, ніж на 0,2 у.о.?

Варіанти відповідей:

a. 0,25;

b. 0,025;

c. 0,0025;

d. 0,00025.

2. Щотижневе середнє значення витрат води в населеному пункті дорівнює 85000 л. Визначити ймовірність того, що витрати води в цьому населеному пункті протягом даного тижня перевищить 200000 л.

Варіанти відповідей:

a. $\leq 0{,}0425$;

b. $\leq 0{,}425$;

c. $\leq 0{,}25$;

d. $\leq 0{,}5$.

3. Визначити необхідне число дослідів, які необхідно провести, щоб відхилення частоти появи події A від ймовірності її появи в окремому досліді, що дорівнює 0,75, не перевищувало за абсолютною величиною 0,05 з ймовірністю 0,96?

Варіанти відповідей:

a. ≥ 1875;

b. ≥ 17785;

c. ≤ 1875;

d. ≤ 17785.

4. Електрична підстанція обслуговує мережу з 20 ламп. Ймовірність включення кожної з них ввечері дорівнює 0,8. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом включених ламп і середнім числом включених ввечері ламп менше трьох.

Варіанти відповідей:

a. $\geq 0{,}64$;

b. $\geq 0{,}46$;

c. $\leq 0{,}64$;

d. $\leq 0{,}46$.

5. Середня місячна зарплата X працівників підприємства підпорядкована нормальному закону розподілу з параметрами $a = 500$ у.о. і $\sigma = 100$ у.о. За допомогою нерівності Чебишова оцінити ймовірність події $|X - a| < 3\sigma$.

Варіанти відповідей:

a. $\geq 0{,}98$;

b. $\geq 0{,}80$;

c. $\geq 0{,}88$;

d. $\geq 0{,}90$.

6. У ощадкасі в наявності є 4000 у.о. У черзі знаходяться 15 вкладників. Сума *X*, яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною з математичним очікуванням, рівним 150 у.о. і середнім квадратичним відхиленням 60 у.о. Яка ймовірність того, що суми вистачить усім людям?

Варіанти відповідей:

a. 0,5;

b. 1;

c. 0;

d. 1,5.

7. Залізничний потяг складається із 50 вагонів. Маса кожного з них є випадковою величиною X із математичним очікуванням $M(X) = 400$ т і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 20\sigma$ т. Локомотив може вести масу не більшу 5000 т. Якщо маса потягу перевищує допустиму, то необхідно причіплювати другий локомотив. Знайти ймовірність того, що одного локомотива не досить для перевезення складу вантажного потягу.

Варіанти відповідей:

a. 0,1;

b. 1418;

c. 0,1814;

d. 1814.

8. Дисперсія кожної із 4500 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу ймовірностей, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних очікувань, взяте за абсолютною величиною, не перевищить 0,4.

Варіанти відповідей:

a. 0,3;

b. 0,003;

c. 0,03;

d. 0,0003.

9. Ймовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі від імовірності 0,95 не більше, ніж на величину 0,2.

Варіанти відповідей:

1. 0,7031;
2. 0,731;
3. 0,371;
4. 0,3071.

10. Ймовірність банкрутства фірми (подія A) $p = 0{,}2$. Яке число n фірм потрібно відібрати, щоб ймовірність відхилення не більше, ніж на 0,1 відносної частоти $W_n(A)$ від ймовірності події A була не меншою за 0,95?

Варіанти відповідей:

a. $\leq 0{,}320$;

b. $\geq 0{,}320$;

c. $\geq 0{,}032$;

d. $\leq 0{,}032$.

Розділ III ВПРОВАДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕС НАВЧАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У цьому розділі викладено основні прийоми та способи щодо використання інформаційних технологій у процесі вивчення теорії ймовірностей, а саме:

- інструментарій програми MS Excel, який призначений для підтримки курсу теорії ймовірностей з метою проведення розрахунків;
- організація обчислень засобами MS Excel;
- використання GRAN1 під час вивчення випадкових величин;
- віртуальний експеримент з випадковими величинами та його візуалізація у програмі Geogebra.

3.1. Розв'язування задач теорії ймовірностей з використанням MS Excel

Розвиток інформаційного суспільства вплинув на сферу освіти. Особливо це стосується математики, класичний курс якої є не лише системно і фундаментально побудованим, а і досить гнучким стосовно впровадження сучасної інформаційної підтримки. Така підтримка полягає у спрощенні і пришвидшенні розрахунків, візуалізації математичних об'єктів, можливості їх динамічно змінювати тощо. Табличний процесор MS Excel є засобом, що надає можливість звільнитися від рутинних операцій та зосередити увагу на конкретних проблемах, які є складовими глибоких математичних теорій.

Сторінки історії

__Microsoft Office Excel (MS Excel)__ – це програма для роботи з електронними таблицями, яка входить до складу офісного пакету Microsoft Office. Створена корпорацією Microsoft для Microsoft Windows, Windows NT і Mac OS. Часто використовується для створення документів, що мають табличне представлення. За рахунок цього у програмі легко здійснювати математичні та статистичні розрахунки, створювати різні види графіків і діаграм на основі даних з комірок таблиці.

Застосування програмного середовища MS Excel безпосередньо як потужного калькулятора для проведення розрахунків сприяє більш глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу. Крім того, використання вбудованих функцій дозволяє швидко й ефективно розв'язувати складні економічні задачі, які мають практичне значення. На сьогодні програмне середовище MS Excel є однією з найбільш популярних і зручних програм, які призначені для роботи з електронними таблицями, отже, воно є звичним робочим середовищем для сучасного фахівця в галузі економіки та управління. На сучасному етапі MS Excel є основним засобом, що допомагає офісним працівникам успішно створювати та форматувати таблиці, аналізувати їх, здійснювати обмін та управління даними, будувати діаграми, виконувати обчислення різних рівнів складності.

Окреслимо засоби MS Excel призначені для здійснення розрахунків:

- **формула** (розпочинається зі знака «=» може складатися з однієї або кількох адрес комірок та чисел, а також знаків, що визначають математичні дії між ними);
- **вбудована функція** (побудована заздалегідь формула).

Формула може бути введена безпосередньо у комірку або за допомогою майстра функцій (рис. 3.1.1.).

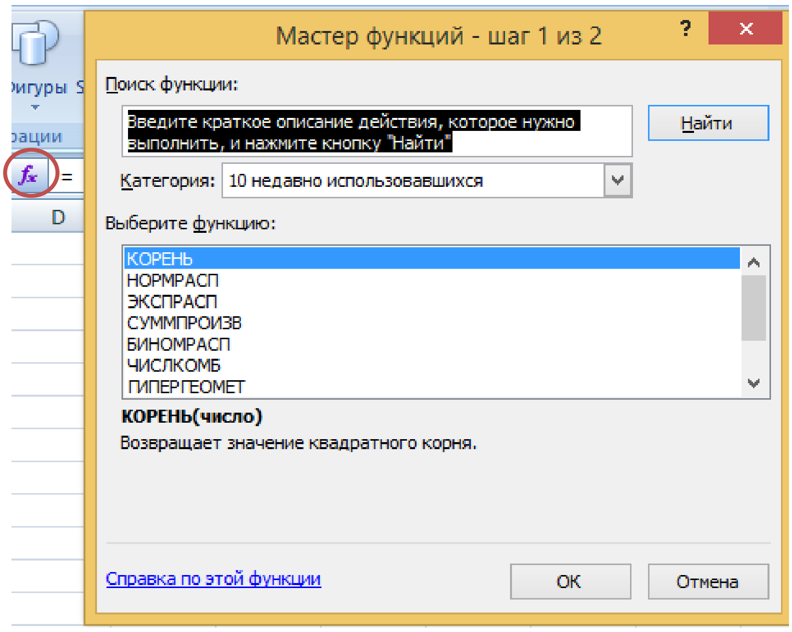


Рис. 3.1.1. Засіб для роботи з функціями у MS Excel

Наведемо перелік вбудованих функцій, які використовують під час розв'язування задач з теорії ймовірностей (табл. 3.1.1.).

Таблиця 3.1.1.

Вбудовані функції, які використовують під час розв'язування задач з теорії ймовірностей

Функція	Призначення
КОРЕНЬ (число)	повертає значення квадратного кореня
СТЕПЕНЬ (число_степень)	повертає результат піднесення до степеня
СУММ (число1, число2, ….)	сумує аргументи
СУММПРОИЗВ (массив 1; массив 2; …)	повертає суму добутків діапазонів чи масивів
ПЕРЕСТ (число, число_выбранных)	повертає кількість розміщень заданого числа елементів
ФАКТР (число)	повертає факторіал числа
ЧИСЛКОМБ (число, число_выбранных)	повертає кількість комбінацій заданого числа елементів
БИНОМРАСП (число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха; интегральная)	повертає окреме значення біноміального розподілу
ГИПЕРГЕОМЕТ (Число_успехов_в_выборке; Размер_выборки; Число_успехов_в_совокупности; Размер_совокупности)	повертає гіпергеометричний розподіл
НОРМРАСПР (X, Среднее, Стандартное_откл, Интегральная)	повертає нормальну функцію розподілу
ПУАССОН (х; среднее; интегральная)	повертає розподіл Пуассона
ЭКСПРАСП (х, Лямбда, Интегральная)	повертає експоненціальний розподіл

Для візуалізації обчислень використовують надбудову **Мастер диаграмм**. Наведемо порядок дій для побудови многокутника розподілу випадкової величини (табл. 3.1.2.).

Таблиця 3.1.2.

Побудова многокутника розподілу випадкової величини

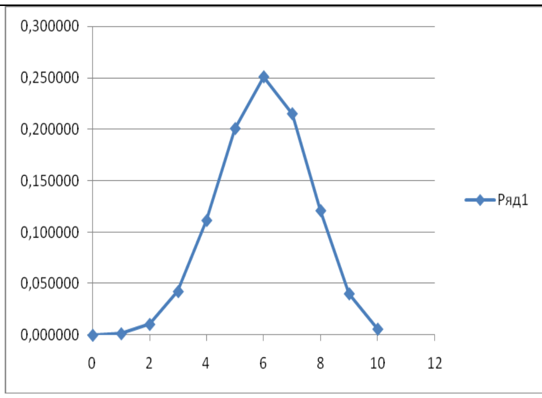
<table>
<tr><th>№ з.п.</th><th>Опис дії</th><th>Результат в MS Excel</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Виділити комірки, які містять дані для діаграми</td><td rowspan="2">

Рис. 3.1.2.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Вибрати шлях
Вставка/Точечная

Отриманий графік (рис. 3.1.2.) має назву* **Ряд 1.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Правою клавішею миші натиснути на будь-яку точку діаграми для вибору команди **Выбрать данные**.

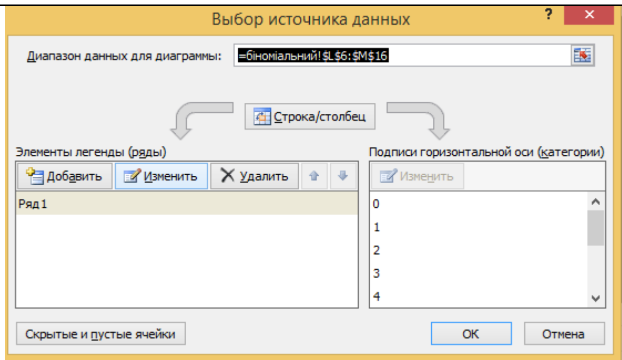
У вікні діалогу **Выбор источника данных** натиснути кнопку **Изменить** (рис. 3.1.3.).</td><td>

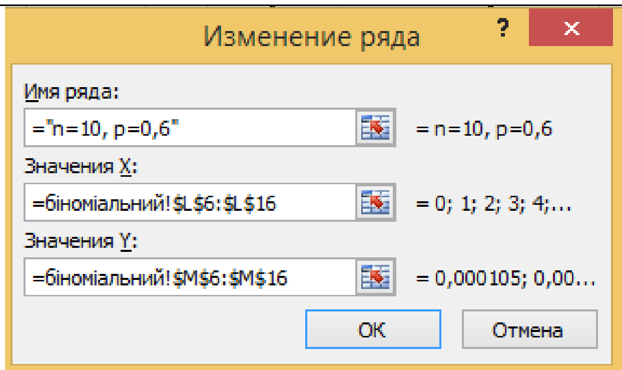
Рис. 3.1.3.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>У вікні діалогу **Изменение ряда** ввести ім'я ряду (рис. 3.1.4.).</td><td>

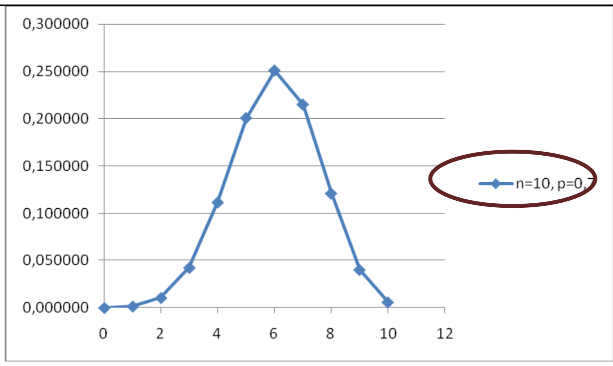
Рис. 3.1.4.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>**Многокутник розподілу випадкової величини**
(рис. 3.1.5.)</td><td>

Рис. 3.1.5.</td></tr>
</table>

Застосування програмного середовища MS Excel дозволяє швидко й ефективно автоматизувати обчислення щодо визначення кількості сполук комбінаторики, ймовірності події, повної ймовірності події, повторних незалежних випробувань за схемою Бернуллі, візуалізації випадкових величин та знаходження їх числових характеристик, дослідження основних законів розподілу випадкових величин (біноміальний, геометричний, гіпергеометричний, нормальний, показниковий, пуассонівський); здійснювати аналіз даних шляхом побудови многокутника розподілу випадкової величини.

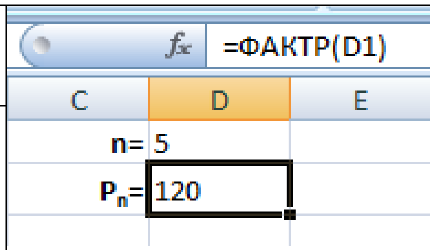
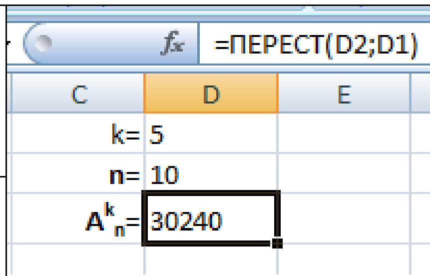
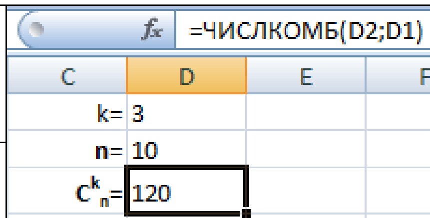
Автоматизація розрахунків при обчисленні сполук комбінаторики. Під час розв'язування задач пов'язаних із вибором та розташуванням елементів деякої множини іноді досить складно визначити розміри не тільки числа сприятливих, але і числа всіх можливих подій. У таких випадках використовують формули для визначення кількості перестановок, сполучень (комбінацій) та розміщень.

Табличний процесор MS Excel забезпечує автоматизацію обчислень щодо визначення основних сполук комбінаторики шляхом використання відповідних формул, які подані в таблиці 3.1.1. Зокрема, для обчислення кількості перестановок *n*-елементної множини використовують функцію **ФАКТР (число)**, яка повертає факторіал числа. Функція **ПЕРЕСТ (число, число_выбранных)** повертає кількість розміщень заданого числа елементів, які вибирають із загального числа елементів множини. Для обчислення кількості комбінацій використовують функцію **ЧИСЛКОМБ (число, число_выбранных).**

У таблиці 3.1.3. також запропоновано означення понять, у примітках відзначено характерні властивості сполук, а також наведено формули, за якими обчислюється їхня кількість. Під час розв'язування задач корисним буде визначення кількості сполук різними способами з метою порівняння та перевірки своїх дій.

Таблиця 3.1.3

Формули, означення основних сполук комбінаторики та їх реалізація засобами MS Excel

Означення	**Формула**	**Реалізація в** MS Excel
	Перестановки	
Упорядковані множини *n-елементної* множини.	Без повторень $P_n = n!$ З повтореннями $\overline{P}_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$	 Рис 3.1.6 -
	Розміщення	
Упорядковані *k-елементні* підмножини *n-елементної* множини. *різняться складом елементів та порядком, $k < n$	Без повторень $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ З повтореннями $\overline{A}_n^k = n^k$	 Рис. 3.1.7.
	Комбінації	
k-елементні підмножини *n-елементної* множини. *різняться **лише** складом елементів, $k < n$	Без повторень $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ З повтореннями $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^n = \dfrac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$	 Рис. 3.1.8.

Приклад 1. До банку прийшло 5 клієнтів, які хотіли покласти заощадження на депозит. У банку в той момент було 5 вільних співробітників, які б могли надати послуги щодо його оформлення. Скількома способами працівники банку можуть допомогти клієнтам укласти договір?

Розв'язання. Оскільки кількість клієнтів і вільних співробітників співпадає, то може змінюватись тільки порядок їх розміщення.

Тому, кількість способів здійснити перестановку можемо знайти за формулою: $P_n = n!$

Отримаємо: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

На рис. 3.1.6. показано використання функції **ФАКТР (число)** для обчислення кількості перестановок 5-елементної множини.

Приклад 2. На першому курсі студенти мають 10 навчальних предметів і 5 різних занять на день. Скількома способами можна скласти відповідний розклад?

Розв'язання. Усі можливі набори предметів становлять усі можливі розміщення з 10 елементів по 5. Використовуючи формулу $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, знайдемо число усіх таких способів: $A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\ 240.$

Рисунок 3.1.7. демонструє приклад використання функції **ПЕРЕСТ (число, число_выбранных)** для обчислення кількості розміщень 5-елементної підмножини з 10- елементної множини.

Приклад 3. Із 10 кандидатів на одну й ту саму посаду мають бути обрані троє. Скільки існує варіантів вибору?

Розв'язання. Усі можливі трійки кандидатів із десяти осіб обчислюють, як комбінації по три елемента із десятиелементної множини, за формулою $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, тобто $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$

Рисунок 3.1.8. демонструє приклад використання функції **ЧИСЛКОМБ (число, число_выбранных)** для обчислення кількості комбінацій 3-елементної підмножини з 10-елементної множини.

Ймовірність події. У прикладах 4-7 запропоновано використання MS Excel для обчислення ймовірності за класичним означенням та повної ймовірності події. До кожного із прикладів подано скріншоти можливої організації даних у листі електронної таблиці. Для зручності, у примітках виведені формули, які використовують у розрахунках.

Приклад 4. На фірмі працюють 10 інженерів і 5 фахівців із питань ринку. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5 осіб. Яка ймовірність події *А* - вибрана навмання група з 5 осіб включає 3 інженера і 2 фахівця ринку.

Розв'язання. Знайдемо кількість усіх елементарних подій даного випробування.

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = 3003.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі події *А*, обчислимо за формулою: $m = C_{10}^{3} C_{5}^{2} = 120 \cdot 10 = 1200.$

Ймовірність настання події *А* обчислюють за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1200}{3003} \approx 0{,}4\,.$$

Спосіб організації обчислень у MS Excel наведено на рисунку 3.1.9.

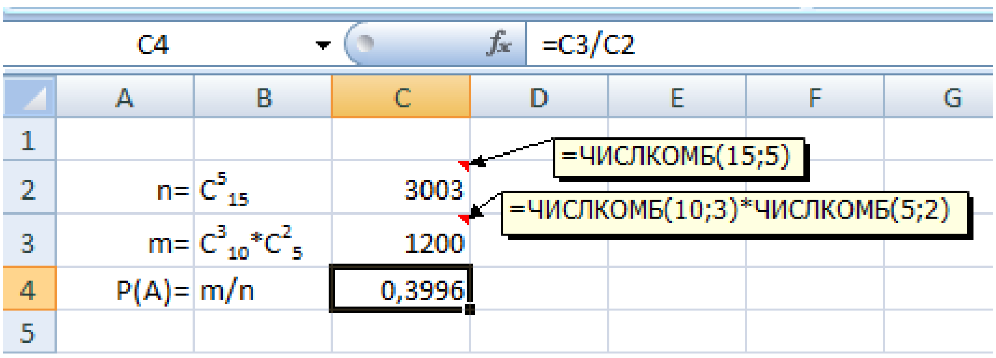


Рис. 3.1.9. Організація обчислень до прикладу 4

Приклад 5. Обчислити імовірність повернення позичальником кредиту банку (кредитний ризик щодо постачальника), якщо фахівцями банку було встановлено, що позичальник погасить узяту позику після її пролонгації і в терміни пролонгації в повному обсязі з імовірністю 0,17; позика буде винесена на прострочення після того, як вона була пролонгована імовірністю 0,06; позика буде винесена на прострочення відразу після закінчення терміну дії кредитного договору, тобто без пролонгації з імовірністю 0,01.

Розв'язання. Визначимо події:

А – позичальник не поверне кредит банку;

A_1 – позичальник погасить усяку позику після її пролонгації і в терміни пролонгації у повному обсязі;

A_2 – позика буде винесена на прострочення після того як вона була пролонгована;

A_3 – позика буде винесена на прострочення відразу після закінчення терміну дії кредитного договору.

Оскільки події A_1, A_2, A_3 є несумісними, то $A = A_1 + A_2 + A_3$. Тоді, $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}17 + 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}24$.

Отже, кредитний ризик щодо постачальника становить 0,24.

Спосіб організації обчислень засобами MS Excel наведено на рисунку 3.1.10.

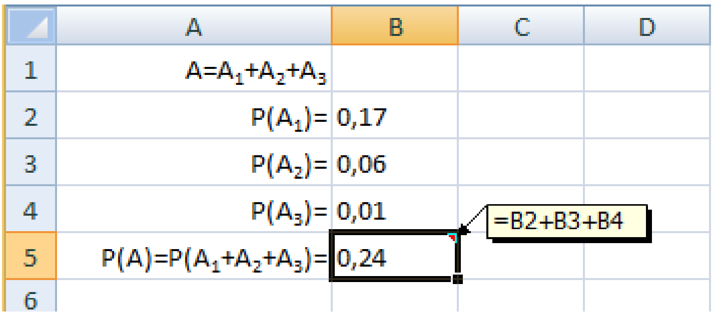


Рис. 3.1.10. Організація обчислень до прикладу 5

Приклад 6. Бізнесмен має контакти з трьома банками і може брати кредит у кожному з них. Протягом 5 попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий – 7 разів, третій – 9 разів при 10 звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків надасть бізнесмену кредит?

Розв'язання. Визначимо події:

A – хоча один банк надасть кредит бізнесмену;

A_1 – перший банк надасть кредит бізнесмену;

A_2 – другий банк надасть кредит бізнесмену;

A_3 – третій банк надасть кредит бізнесмену.

За умовою задачі $P(A_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $P(A_2) = \frac{7}{10}$; $P(A_3) = \frac{9}{10}$.

Визначимо ймовірності протилежних подій:

$$P\left(\overline{A_1}\right)=1-\frac{6}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5};\ P\left(\overline{A_2}\right)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10};\ P\left(\overline{A_3}\right)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}.$$

Враховуючи те, що ймовірність появи хоча б однієї із трьох незалежних подій A_1, A_2, A_3 дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій, отримаємо:

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=1-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}=1-0{,}012=0{,}988.$$

Спосіб організації обчислень у MS Excel наведено на рисунку 3.1.11.

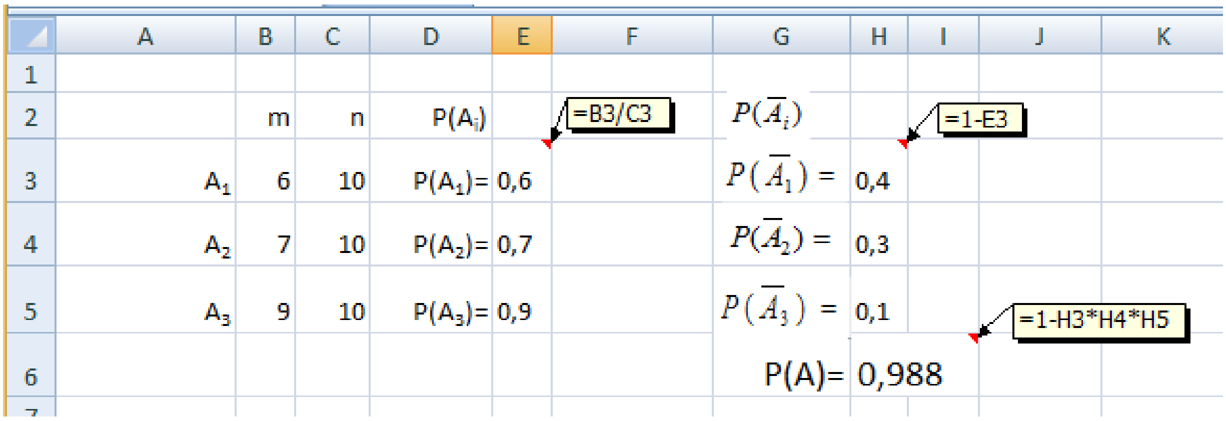


Рис. 3.1.11. Організація обчислень до прикладу 6

Приклад 7. У магазині реалізується продукція трьох фірм, частка кожної з них, така: І – 50 %, ІІ – 30 %, ІІІ – 20 %. Для продукції кожної з фірм брак, відповідно, становить: для продукції першої фірми – 2 %, для продукції ІІ – ї фірми 3 %, для продукції третьої фірми – 5 %. Яка ймовірність того, що придбана в магазині одиниця продукції є доброякісна? Яка ймовірність того, що доброякісна продукція вироблена другою фірмою?

Розв'язання. Нехай подія A – навмання придбана в магазині одиниця продукції є доброякісна. Розглянемо можливі події – гіпотези:

H_1 – придбана продукція вироблена на І фірмі;

H_2 – придбана продукція вироблена на ІІ фірмі;

H_3 – придбана продукція вироблена на ІІІ фірмі;

Очевидно, що події H_1, H_2, H_3 – несумісні й утворюють повну групу подій, а їх імовірності відповідно дорівнюють: $P(H_1)=0{,}5$; $P(H_2)=0{,}3$; $P(H_3)=0{,}2$. Відповідні умовні ймовірності становлять:

$$P(A|H_1) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98;$$

$$P(A|H_2) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97;$$

$$P(A|H_3) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

Знайдемо $P(A)$ за формулою повної імовірності

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}98 + 0{,}3 \cdot 0{,}97 + 0{,}2 \cdot 0{,}95 = 0{,}971.$$

Знайдемо ймовірність того, що доброякісна продукція вироблена другою фірмою за формулою Байєса.

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_2) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}97}{0{,}971} \approx 0{,}3.$$

Спосіб організації обчислень у MS Excel наведено на рисунку 3.1.12.

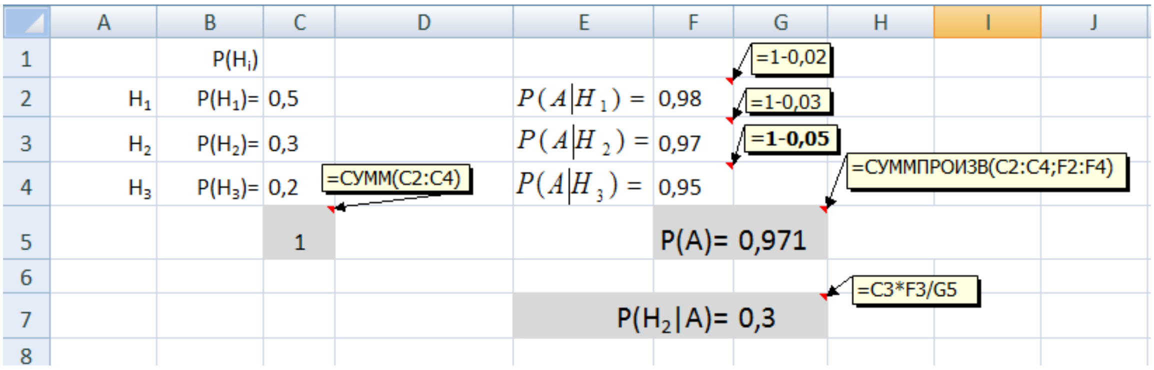


Рис. 3.1.12. Організація обчислень до прикладу 7

Повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі. У прикладах 8-9 розглянуто використання вбудованих функцій для обчислення ймовірності події за схемою Бернуллі (табл. 3.1.1.).

Приклад 8. Імовірність того, що витрата води на деякому підприємстві виявиться нормальною (не більше певного числа літрів за добу), 0,6. Знайти ймовірності того, що в найближчі 6 днів витрата води буде нормальною протягом 1, 2, 3, 4, 5, 6 днів.

Розв'язання. Визначимо шукані ймовірності, використовуючи формулу Бернуллі. За умовою задачі маємо: p=0,6; q=1-0,6=0,4; n=6; m=1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\mathrm{P}_6\left(1\right)=C_6^1 p\ q^{6-1}=\frac{6!}{1!\ 5!}(0{,}6)\cdot(0{,}4)^5=0{,}036864.$$

$$\mathrm{P}_6\left(2\right)=C_6^2 p^2 q^{6-2}=\frac{6!}{2!\ 4!}(0{,}6)^2(0{,}4)^4=0{,}13824.$$

$$\mathrm{P}_6\left(3\right)=C_6^3 p^3 q^3=\frac{6!}{3!\ 3!}(0{,}6)^3(0{,}4)^3=0{,}27648.$$

$$\mathrm{P}_6\left(4\right)=C_6^4 p^4 q^2=\frac{6!}{4!\ 2!}(0{,}6)^4(0{,}4)^2=0{,}31104.$$

$$\mathrm{P}_6\left(5\right)=C_6^5 p^5 q\ =\frac{6!}{5!\ 1!}(0{,}6)^5(0{,}4)\ =0{,}186624.$$

$$\mathrm{P}_6\left(6\right)=C_6^6 p^6 q^0=\frac{6!}{6!}(0{,}6)^6(0{,}4)^0=0{,}046656.$$

Легко бачити, що найбільш імовірною є перевитрата води протягом 3, 4, та 5 днів із шести. Імовірність перевитрати протягом одного або шести днів практично дорівнює нулю.

Для знаходження ймовірностей засобами MS Excel використаємо функцію **БИНОМРАСП (число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха; интегральная),** де:

Число_успехов – змінна величина, яка приймає значення: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

Число_испытаний – число незалежних випробувань;

Вероятность_успеха - ймовірність успіху у кожному випробуванні;

Интегральная – приймає значення 0 або 1 (для знаходження ймовірності випадкової події $P(X=k)-0$, для знаходження функції розподілу $F(x)-1$).

Для прикладу, у другий рядок листа MS Excel введемо значення випадкової величини. У третьому рядку використаємо формулу, як показано на рисунку 3.1.13.

У результаті отримаємо ряд розподілу випадкової величини - витрата води на деякому підприємстві виявиться не більше певного числа літрів за добу.

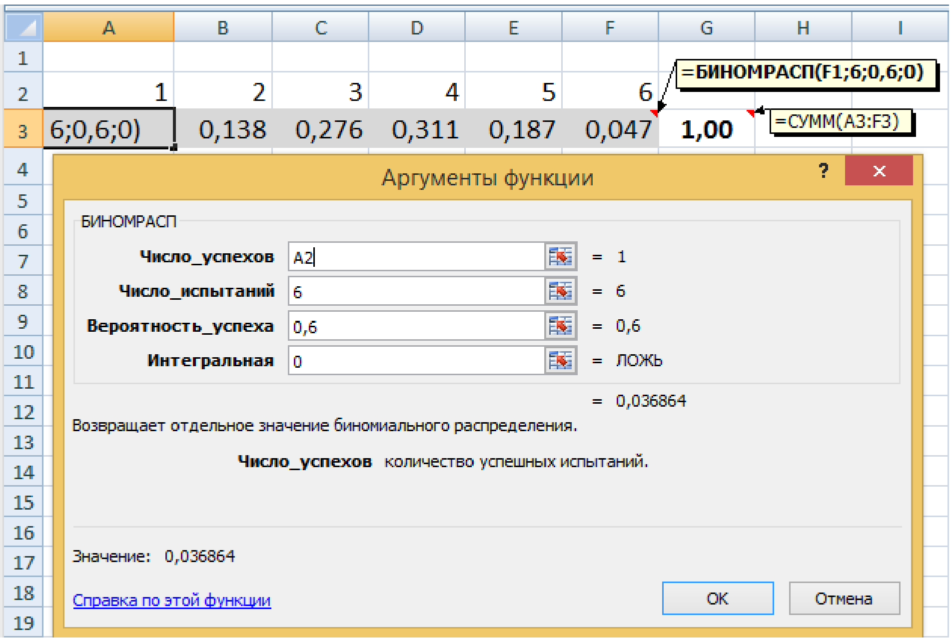


Рис. 3.1.13. Вікно діалогу аргументів функції БИНОМРАСП

Приклад 9. Ймовірність успішної реалізації проектів по розвитку підприємства дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що із загальної кількості запропонованих проектів, що складає 1000 одиниць, 6 будуть успішно реалізовані.

Розв'язання. Оскільки ймовірність $p=0,005$ досить мала, а число n навпаки велике ($\lambda=np=5<10$), то потрібно скористатися формулою Пуассона для обчислення ймовірності шуканої величини: $P(n)=\lambda\frac{ne^{-\lambda}}{n!}$.

Підставимо значення з умови у вищенаведену формулу і отримаємо, що $P(6) = 5\frac{6e^{-5}}{6!} = 0,1462$.

Для обчислення відповідної імовірності скористаємось функцією MS Excel **ПУАССОН (х; среднее; интегральная), де:**

X – змінна величина, яка приймає значення: $0,1,2,\ldots,n$;

Среднее – середнє значення $\lambda=n\cdot p$;

Интегральная – 0 для знаходження ймовірності випадкової події.

Вікно діалогу згаданої функції та спосіб організації обчислень показано на рисунку 3.1.14.

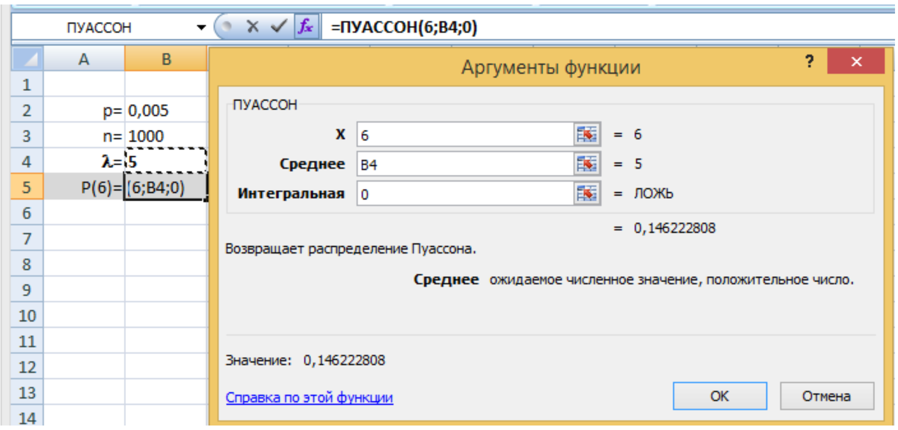


Рис. 3.1.14. Організація обчислень до прикладу 9

Числові характеристики дискретної випадкової величини. У прикладі 10 наведено спосіб організації даних у листі електронної таблиці для розрахунку числових характеристик ДВВ та формули, які при цьому використовують.

Приклад 10. На фінансовому ринку представлені акції трьох видів. Норма прибутку акцій залежить від ринкової кон'юнктури (%). Проаналізувати ситуацію і вибрати тип акції найбільш привабливої для інвестора з точки зору міри її ризику. За величину ризику прийняти коефіцієнт варіації.

Види проектів	**Оцінка можливого результату**					
	Песимістична		**Стримана**		**Оптимістична**	
	Прибуток X_{1i}	Ймовірність P_{1i}	Прибуток X_{2i}	Ймовірність P_{2i}	Прибуток X_{3i}	Ймовірність P_{3i}
A	59	0,25	29	0,53	19	0,22
B	49	0,3	39	0,45	29	0,25
C	39	0,27	19	0,5	19	0,23

Розв'язання. Визначимо сподівану норму прибутку (математичне очікування) для кожного виду акцій за формулою $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

На сучасному етапі математична статистика і теорія ймовірностей є важливими областями математики, які мають багаточисленні використання в економіці, суспільних, природничих і технічних науках.

Ю.О. Митропольський

$M(X_A) = 59 \cdot 0{,}25 + 29 \cdot 0{,}53 + 19 \cdot 0{,}22 = 34{,}3;$
$M(X_B) = 49 \cdot 0{,}3 + 39 \cdot 0{,}45 + 29 \cdot 0{,}25 = 39{,}35;$
$M(X_C) = 39 \cdot 0{,}27 + 29 \cdot 0{,}5 + 19 \cdot 0{,}23 = 29{,}4.$

Визначимо варіацію (дисперсію) норм прибутку кожного виду акцій за формулою $V(X) = D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

$V(X_A) = 59^2 \cdot 0{,}25 + 29^2 \cdot 0{,}53 + 19^2 \cdot 0{,}22 - (34{,}3)^2 = 218{,}91;$
$V(X_B) = 42^2 \cdot 0{,}3 + 39^2 \cdot 0{,}45 + 29^2 \cdot 0{,}25 - (39{,}5)^2 = 54{,}75;$
$V(X_C) = 39^2 \cdot 0{,}27 + 29^2 \cdot 0{,}25 + 19^2 \cdot 0{,}23 - (29{,}4)^2 = 49{,}84.$

Визначимо середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ від очікуваних норм прибутків кожної акції або їх ризики за формулою $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

$\sigma(X_A) = \sqrt{218{,}91} = 14{,}8;$
$\sigma(X_B) = \sqrt{54{,}75} = 7{,}4;$
$\sigma(X_C) = \sqrt{49{,}84} = 7{,}06.$

Обчислимо коефіцієнти варіації *CV*, як величину ризику, що припадає на одиницю прибутку за формулою $CV = \dfrac{\sigma(X)}{M(X)}$.

$CV(X_A) = \dfrac{14{,}8}{34{,}3} = 0{,}432;$

$CV(X_B) = \dfrac{7{,}4}{39{,}5} = 0{,}187;$

$CV(X_C) = \dfrac{7{,}06}{29{,}4} = 0{,}24.$

Отже, потрібно вибрати акцію виду В, оскільки для неї коефіцієнт варіації, тобто ризик, найменший.

Запропонуємо спосіб організації обчислень прикладу 10 засобами MS Excel (Рис. 3.1.15.). Для обчислення математичного очікування можна застосувати функцію **СУММПРОИЗВ (массив 1; массив 2; …)**, яка надасть можливість знайти суму добутків значень випадкової величини та відповідних імовірностей. Для обчислення дисперсії використовують функцію **КОРЕНЬ (число)**, яка повертає значення квадратного кореня від заданого числа.

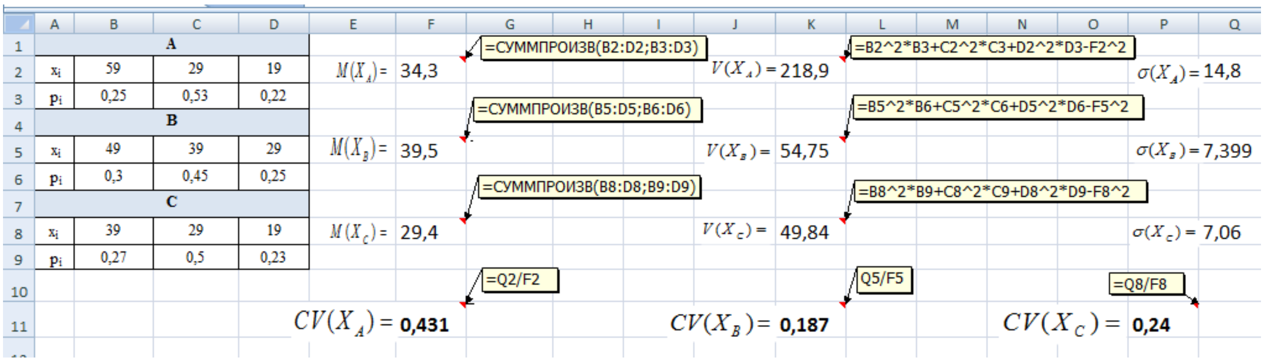


Рис. 3.1.15. Організація обчислень до прикладу 10

Основні закони розподілу випадкових величин. У прикладах 11-16 описано можливості використання MS Excel підчас вивчення основних розподілів випадкових величин.

Приклад 11. Імовірність погашення банківського кредиту кожним клієнтом становить 0,7. Вважаючи випадковою величиною число клієнтів які своєчасно і в повному обсязі повернуть кредити банкові серед вибраних 10 осіб, визначити: а) числові характеристики цієї випадкової величини; б) ймовірність того, що повернуть кредити у повному обсязі 5, менше 8, 7-9 осіб (за допомогою ряду та інтегральної функції розподілу); в) побудувати многокутник розподілу випадкової величини; г) дослідити як міниться многокутник розподілу якщо зменшити ймовірність до 0,6 та кількість осіб до 12.

Розв'язання. Оскільки своєчасне погашення кредиту одним клієнтом не залежить від того, чи поверне кредит інший, і ймовірність своєчасного погашення кредиту кожним клієнтом є однакова, то маємо послідовність випробувань за схемою Бернуллі з параметрами $n=10,\ p=0{,}7$.

а) Обчислимо числові характеристики випадкової величини X – число клієнтів, які своєчасно і в повному обсязі повернуть кредити банкові серед вибраних 10 осіб за формулами: $M(X)=np$, $D(X)=npq$, $\sigma(X)=\sqrt{npq}$.

$M(X)=10\cdot 0{,}7=7$, тобто, в середньому 7 із 10 клієнтів погасять кредит своєчасно.

$D(X)=7\cdot(1-0{,}7)=2{,}1$, $\sigma(X)=\sqrt{2{,}1}=1{,}45$.

Для обчислення числових характеристик у робочий аркуш MS Excel (Рис. 3.1.16.) введемо найменування параметрів (комірки **A1**, **A2**) та їхні значення (комірки **B1**, **B2**). Результати обчислення та формули, які використовують для цього в MS Excel, відображені у комірках **A19:C21**.

б) для обчислення відповідних ймовірностей побудуємо ряд розподілу випадкової величини.

Оскільки відібрано 10 осіб, то *X* може приймати значення 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Відповідні ймовірності обчислимо за формулою: $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=0,1,2,\ldots,n, \quad p+q=1$.

Дані внесемо у таблицю.

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P=p_i$	0,000006	0,0001	0,0014	0,009	0,0368	0,1029	0,2001	0,2668	0,2335	0,1211	0,0282

З таблиці визначимо, що *P(X=5)=0,1029;* *P(X<8)=* 0,000006+0,0001+0,0014+0,009+0,0368+0,1029+0,2001+0,2668=0,6172;

P(7≤X≤9)= 0,2668+0,2335+0,1211=0,6214.

Побудуємо інтегральну функцію розподілу випадкової величини *X*.

$$F(X)=\begin{cases} 0, \; x \le 0; \\ 0{,}000006, \; 0<x\le 1; \\ 0{,}0001, \; 1<x\le 2; \\ 0{,}0016, \; 2<x\le 3; \\ 0{,}0106, \; 3<x\le 4; \\ 0{,}0473, \; 4<x\le 5; \\ 0{,}1503, \; 5<x\le 6; \\ 0{,}3504, \; 6<x\le 7; \\ 0{,}6172, \; 7<x\le 8; \\ 0{,}8507, \; 8<x\le 9; \\ 0{,}9718, \; 9<x\le 10; \\ 1, \; x>10. \end{cases}$$

Для розв’язування задачі засобами MS Excel у діапазон комірок **A6:A16** введемо значення випадкової величини. Обчислимо відповідні їм імовірності. Слід зазначити, що це можна зробити двома способами: за формулою $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=0,1,2,\ldots,n, \quad p+q=1$, або за допомогою функції **БИНОМРАСП (число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха;**

интегральная). Результати обчислень відображені у стовпчиках **B** і **D** робочого листа (Рис. 3.1.16.). У стовпцях **G** та **I** того ж робочого листа розраховано значення інтегральної функції розподілу випадкової величини різними способами з приміткою на формулу, яка використовується. У діапазоні комірок **I19:I21** розраховані шукані ймовірності. Слід зазначити, що їх можна обчислити використовуючи також і інтегральну функцію розподілу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	p=	0,7										p=	0,6		p=	0,7		
2	n=	10										n=	10		n=	12		
3		=ЧИСЛКОМБ(B2;A4)*0,7^A4*(1-B1)^(B2-A4)																
4				=БИНОМРАСП(A6:A16;10;0,7;0)			=B6+G6		=БИНОМРАСП(A6;10;0,7;1)			=ЧИСЛКОМБ(M2;L6)*M1^L6 *(1-M1)^(M2-L6)			=ЧИСЛКОМБ(P2;O6)*P1^O6 *(1-P1)^(P2-O6)			
5	*m*	$P=p_i$		$P=p_i$		*X*	*F(X)*		*F(X)*			*m*	$P=p_i$		*m*	$P=p_i$		
6	0	0,000006		0,000006		≤0	0		0			0	0,000105		0	0,000001		
7	1	0,000138		0,000138		(0; 1]	0,000006		0,000006			1	0,001573		1	0,000015		
8	2	0,001447		0,001447		(1; 2]	0,000144		0,000144			2	0,010617		2	0,000191		
9	3	0,009002		0,009002		(2; 3]	0,001590		0,001590			3	0,042467		3	0,001485		
10	4	0,036757		0,036757		(3; 4]	0,010592		0,010592			4	0,111477		4	0,007798		
11	5	0,102919		0,102919		(4; 5]	0,047349		0,047349			5	0,200658		5	0,029111		
12	6	0,200121		0,200121		(5; 6]	0,150268		0,150268			6	0,250823		6	0,079248		
13	7	0,266828		0,266828		(6; 7]	0,350389		0,350389			7	0,214991		7	0,158496		
14	8	0,233474		0,233474		(7; 8]	0,617217		0,617217			8	0,120932		8	0,231140		
15	9	0,121061		0,121061		(8; 9]	0,850692		0,850692			9	0,040311		9	0,239700		
16	10	0,028248		0,028248		(9; 10]	0,971752		0,971752			10	0,006047		10	0,167790		
17		1		1		>10	1,000000		1,000000				1		11	0,071184		
18				=B1*B2											12	0,013841		
19		*M(X)*=	7	=B2*B1*(1-B1)			*P(X=5)*=		0,102919	=B11						1		
20		*D(X)*=	2				*P(X<8)*=		0,617217	=СУММ(B6:B13)								
21		σ*(X)*=	1,45	=КОРЕНЬ(C20)			*P(7 ≤X ≤9)*=		0,621363	=СУММ(B13:B15)								

Рис. 3.1.16. Організація обчислень до прикладу 11

в) для побудови многокутника розподілу випадкової величини по осі абсцис відкладають її значення, а по осі ординат – відповідні їм імовірності (Рис. 3.1.17) та використовують надбудову MS Excel **Мастер диаграмм,** виконавши команду **Вставка/ Диаграмма**, та вибрати тип діаграми – **Точечная.**

г) щоб дослідити як міниться многокутник розподілу, якщо зменшити ймовірність до 0,6 та кількість осіб до 12, у стовпцях **M** та **P** робочого листа обчислимо значення випадкової величини з оновленими параметрами (комірки **M1:M2** та **P1:P2** відповідно). Графічна інтерпретація (Рис. 3.1.17.) дозволяє здійснити аналіз побудованих многокутників розподілу випадкової величини.

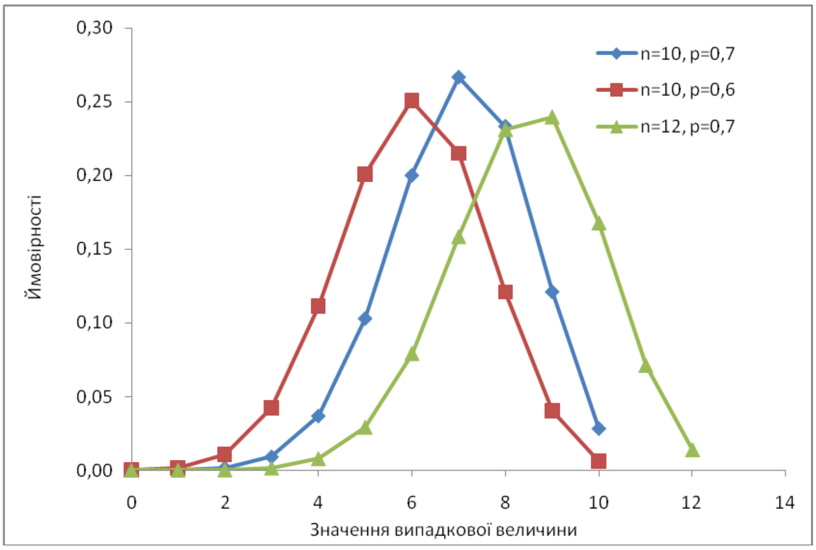


Рис. 3.1.17. Многокутник розподілу випадкової величини

Приклад 12. Середнє число відвідувачів магазину протягом 15-ти хвилинного інтервалу дорівнює 2. Поява відвідувачів у магазині відбувається випадково і незалежно один від одного. Складіть ряд розподілу числа відвідувачів магазину протягом 15 хвилин та побудуйте функцію розподілу цієї випадкової величини, обчисліть її числові характеристики, побудуйте многокутник розподілу, обчисліть ймовірність того, що протягом 15 хвилин число відвідувачів магазину виявиться менше 3; не менше 3.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – число відвідувачів магазину протягом 15 хвилин. Побудуємо ряд розподілу заданої випадкової величини, яка розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 2$ та може набувати значень $0, 1, 2, \ldots, n$.

Для цього у комірки **B2:K2** електронної таблиці введемо значення випадкової величини *X*. У комірки **B3:K3** – імовірності, які відповідають заданим значенням, у комірках **B4:K4** обчислимо значення функції розподілу (Рис. 3.1.19.).

Для побудови ряду та функції розподілу випадкової величини X скористаємось функцією MS Excel **ПУАССОН (X; среднее; интегральная)** (Рис. 3.1.18.).

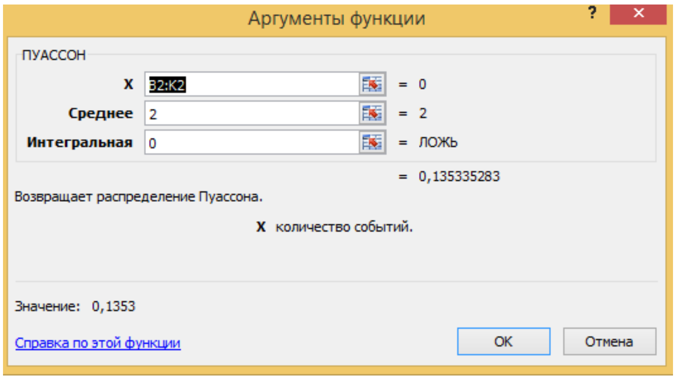


Рис. 3.1.18. Вікно діалогу аргументів функції ПУАССОН

У поле **«X»** потрібно внести значення випадкової величини X, виділивши діапазон комірок **B2:K2**; у полі **Среднее** – 2; у полі **Интегральная** – 0 – для знаходження ймовірності випадкової події $X = x_i$, 1 – для обчислення значень функції розподілу.

Числові характеристики випадкової величини X, яка розподілена за законом Пуассона обчислюються за формулами: $M(X) = D(X) = \lambda = 2$; $\sigma(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1{,}41$. На листі MS Excel (рис. 3.1.19.) ці розрахунки відображені у комірках **B6:B8**.

Ймовірність того, що протягом 15 хвилин число відвідувачів магазину виявиться менше 3 можна обчислити за формулою $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 = 0{,}6767$, де числові дані взяті з комірок **B3:D3,** або з комірки **D4.** Ймовірність того, що протягом 15 хвилин число відвідувачів магазину виявиться не менше 3, можна обчислити за формулою $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0{,}6767 = 0{,}3233$.

Для побудови многокутника розподілу скористаємося надбудовою **Мастер диаграмм.** Виділяємо діапазон комірок **B2:K3,** вибираємо шлях **Вставка/ Диаграмма**, тип діаграми **Точечная.**

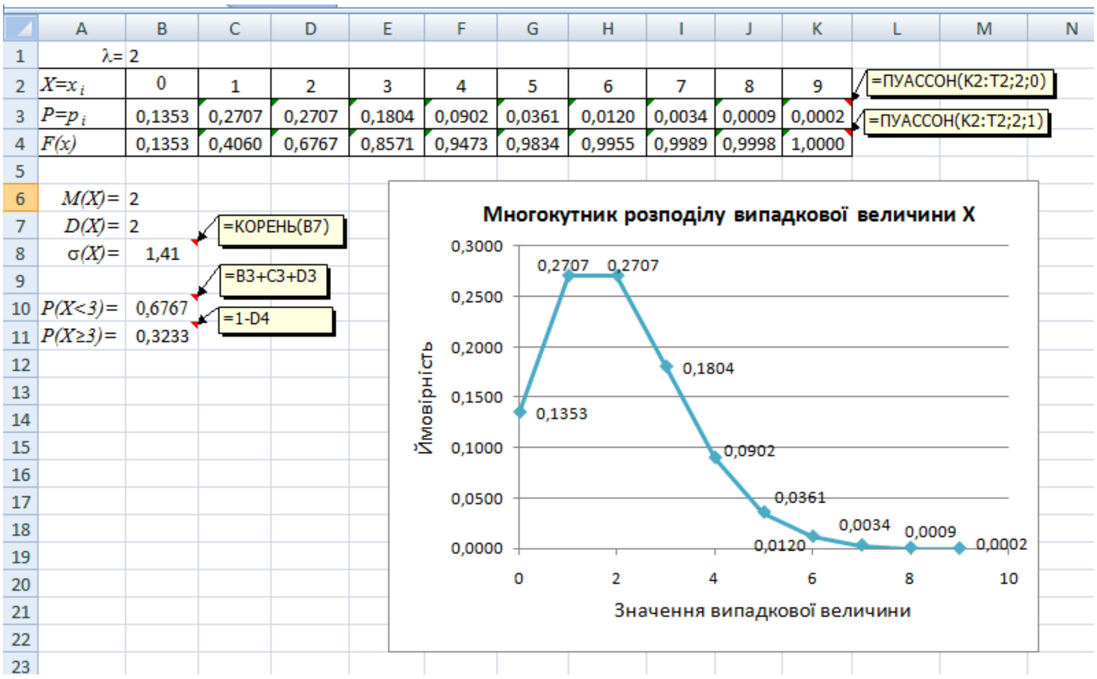


Рис. 3.1.19. Організація обчислень прикладу 12

Приклад 13. У прибиральниці є зв'язка з чотирьох ключів, серед яких лише один відчиняє двері офісу. У темряві вона намагається потрапити до офісу. Скласти закон розподілу числа спроб при відчиненні дверей, якщо прибиральниця повертає випробуваний ключ у зв'язку. Знайти числові характеристики цієї випадкової величини та побудувати многокутник розподілу ймовірностей. Знайти ймовірність того, прибиральниця відчинить двері менше ніж з 3 спроб; не менше за 3 спроби.

Розв'язання. Кожну спробу відчинити двері можна розглядати як незалежне випробування, в якому ймовірність успіху $p=\frac{1}{4}$, а ймовірність невдачі $q=\frac{3}{4}$.

Визначимо, які значення може приймати ця величина:

$$P(X=1)=\frac{1}{4},$$

$$P(X=2)=q\cdot p=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16},$$

$$P(X=3)=q^2\cdot p=(\frac{3}{4})^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64},$$

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p=\frac{3^{k-1}}{4^k}.$$

У даному випадку маємо геометричний закон розподілу випадкової величини X, який має вигляд:

$X = x_i$	1	2	3	…	k	…
$P = p_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	…	$\frac{3^{k-1}}{4^k}$	…

$$M(X) = \frac{1}{1/p} = \frac{1}{1/4} = 4;$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{3/4}{(1/4)^2} = 12;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{12} \approx 3{,}46.$$

Знайдемо ймовірність того, прибиральниця відчинить двері менше ніж з 3 спроб. $P(X<3)$=0,25 + 0,1875=0,4375.

Визначимо ймовірність того, що прибиральниця відчинить двері не менше ніж за 3 спроби. $P(X\geq 3)=1-P(X<3)$=1-0,4375=0,5625.

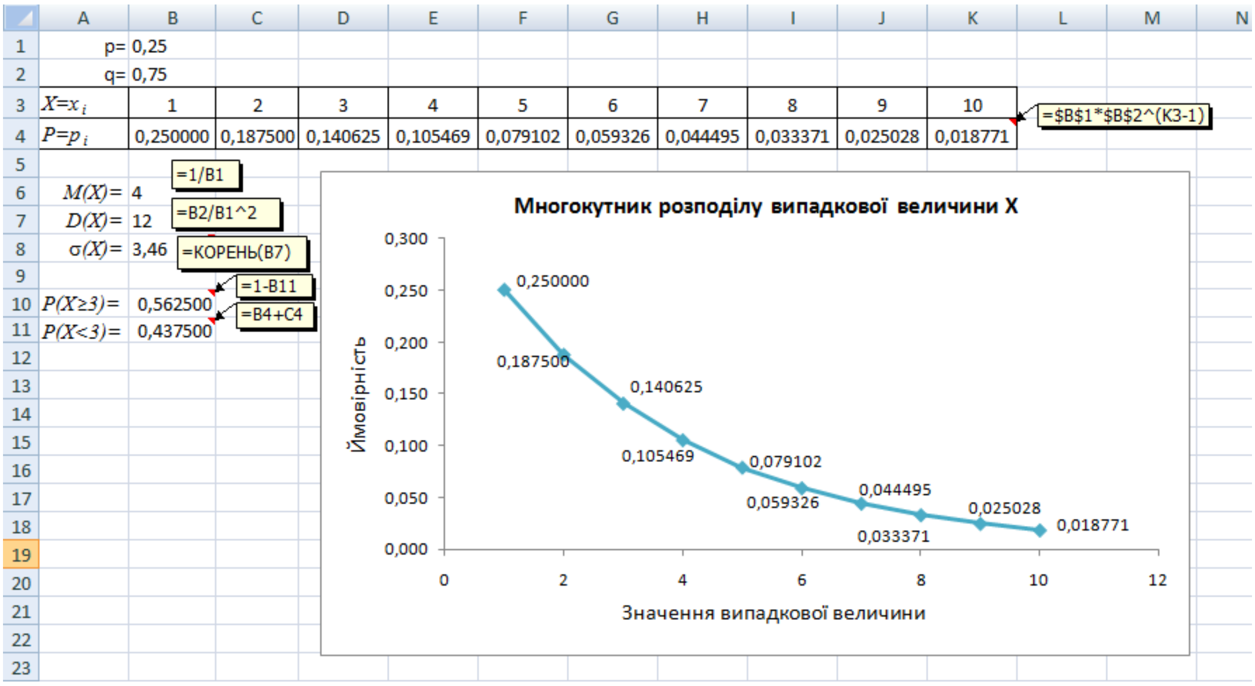


Рис. 3.1.20. Організація обчислень прикладу 13

На рис. 3.1.20. наведено спосіб організації розрахунків прикладу 13 засобами MS Excel та формули, які використовуються. Зауважимо, що для обчислення значень випадкової величини, у даному випадку, не використовуються вбудовані функції, однак у формулі, яка виведена в примітки, є абсолютне посилання на комірки **B1** та **B2**. Використовуючи таку формулу, користувач може легко обчислити довільну скінченну кількість ймовірностей випадкової величини, які відповідають заданим значенням. Для побудови многокутника розподілу задамо ***x*** в діапазоні 0, 1, ….10 та скористаємося надбудовою **Мастер диаграмм.**

Приклад 14. Серед дев'яти однотипних виробів п'ять відповідають стандарту, а решта – ні. Навмання беруть 4 вироби. Визначити закон розподілу випадкової величини *X* – появи числа виробів, що відповідають стандарту, обчислити її числові характеристики, побудувати многокутник розподілу ймовірностей.

Розв'язання. У даному випадку випадкова величина *X* задовольняє гіпергеометричному закону розподілу при n=9, m=5, s=4, і що може приймати значення від 0 до 4.

Побудуємо ряд розподілу випадкової величини *X*.

Ймовірності відповідних значень випадкової величини обчислюються за формулою: $p_i = P(X = i) = \frac{C_5^i C_4^{s-i}}{C_9^s}$.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0079	0,1587	0,4762	0,3175	0,0397

Для обчислення відповідних ймовірностей величини *X* скористаємося функцією **ГИПЕРГЕОМЕТ (Число_успехов_в_выборке; Размер_выборки; Число_успехов_в_совокупности; Размер_совокупности).**

У вікні діалогу аргументів функції **ГИПЕРГЕОМЕТ** заповнимо поля наступним чином (Рис. 3.1.21.):

Число_успехов_в_выборке – змінна величина, яка приймає значення розміщені у комірках **B5:F5**;

Размер_выборки – s – кількість навмання взятих виробів (комірка **C3**);

Число_успехов_в_совокупности – m – кількість виробів, які сприяють події (комірка **C2**);

Размер_совокупности – n – загальна кількість виробів (комірка **C1**);.

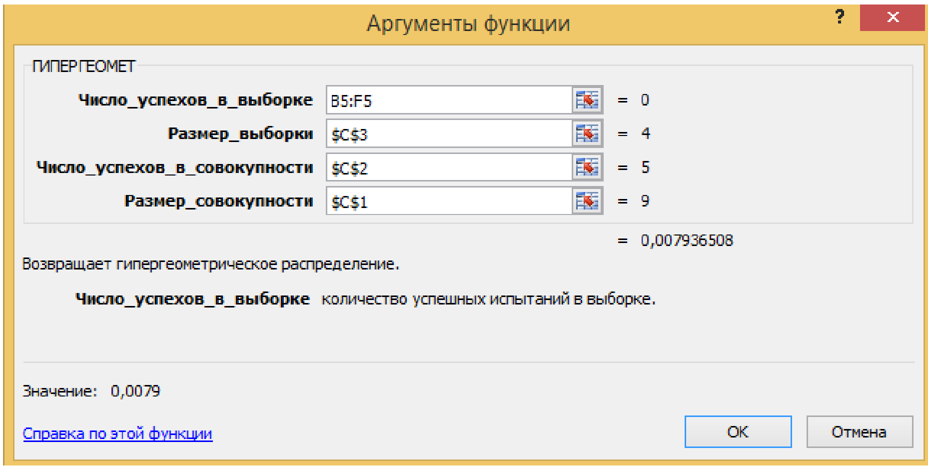


Рис. 3.1.21. Вікно діалогу функції ГИПЕРГЕОМЕТ

Спосіб організації обчислень до задачі наведено на рисунку 3.1.22.

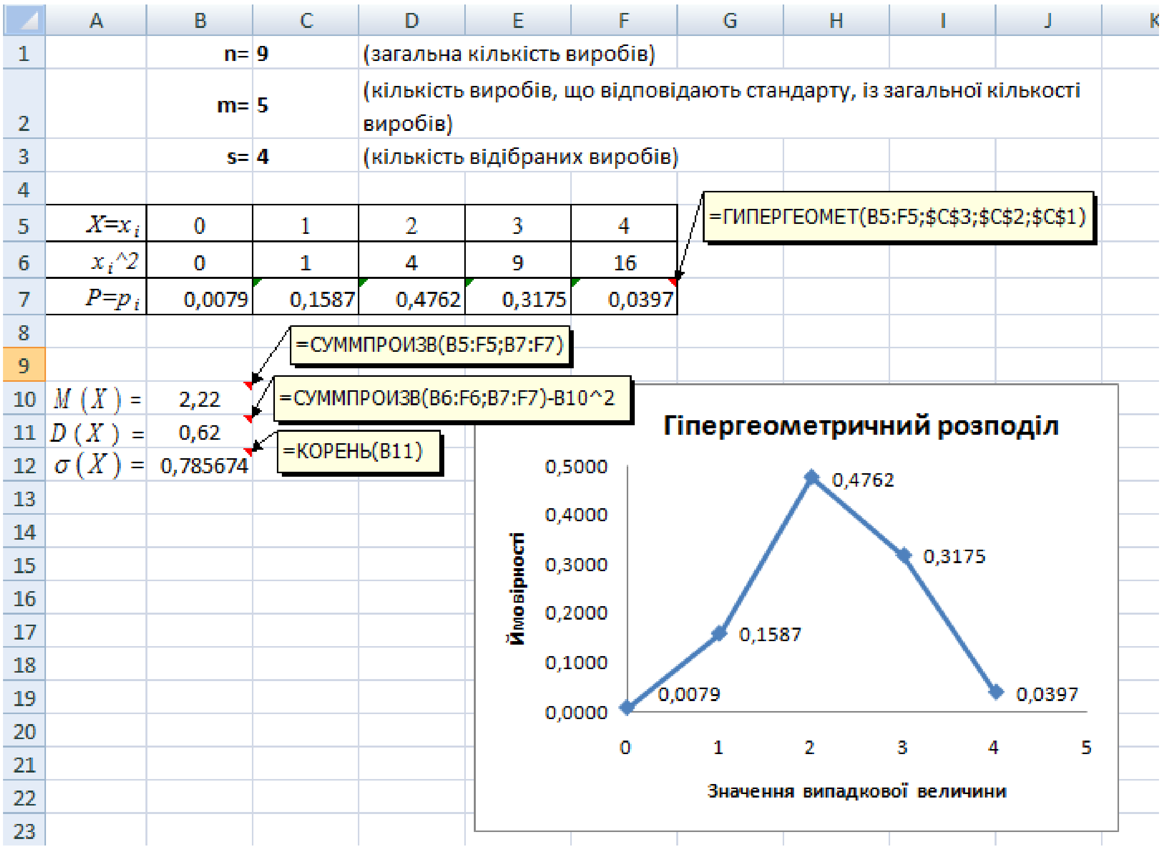


Рис. 3.1.22. Організація обчислень до прикладу 14

Приклад 15. Час T обслуговування клієнта у ресторані McDonalds розподілений за показниковим законом. Знайти імовірність того, що замовлення буде виконано від 5 до 15 хв. з моменту отримання замовлення касиром, якщо середній час виконання замовлення дорівнює 2 хв. Побудувати функції розподілу випадкової величини та її щільності.

Розв'язання. Якщо час T розподілений за показниковим законом, то щільність розподілу ймовірності $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$. Оскільки $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, то $\lambda = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Ймовірність обслуговування клієнта закладу в заданих межах часу обчислимо за формулою: $P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Отримаємо $P(5 \le X \le 15) = e^{-0{,}5 \cdot 15} - e^{-0{,}5 \cdot 5} = 0{,}9994 - 0{,}9179 = 0{,}0815.$

Для визначення графічного вигляду функції розподілу випадкової величини та її щільності, задамо ***x*** в діапазоні 0, 1, ….15 (комірки **B5:Q5**).

Для обчислення значень випадкової величини розподіленої за показниковим законом використовують функцію **ЭКСПРАСП (x, Лямбда, Интегральная)**.

Вікно діалогу функції та приклад обчислення значень функції розподілу випадкової величини її щільності та їх графіки представлені на рис. 3.1.23.

Для обчислення значень функції розподілу у полі **Интегральная** введемо **1** (комірки **B6:Q6**), для обчислення густини (щільності) розподілу – **0** (комірки **B7:Q7**).

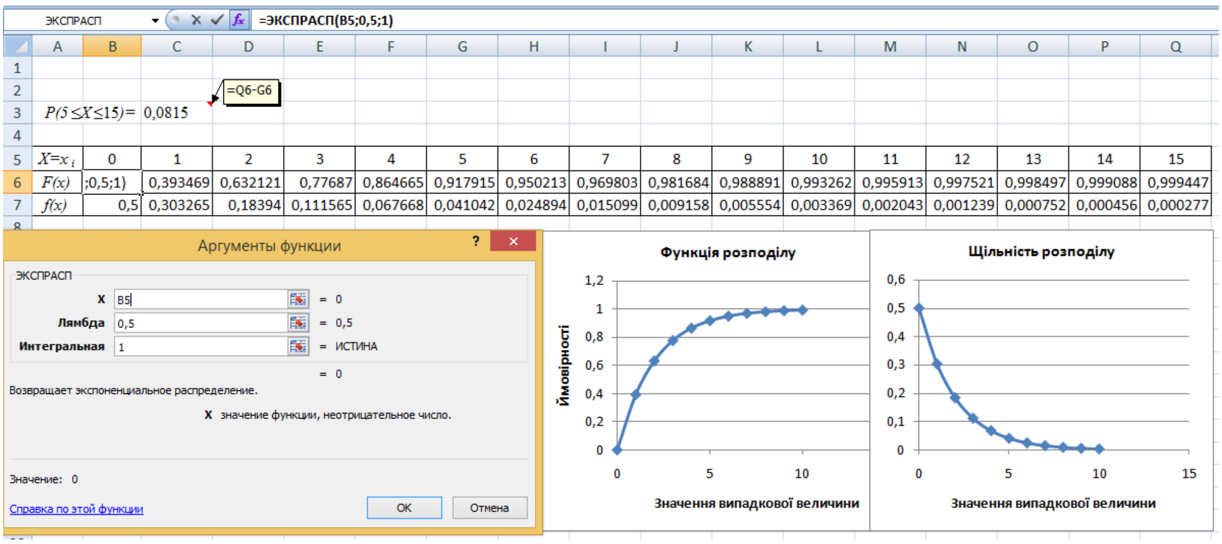


Рис. 3.1.23. Організація обчислень до прикладу 15

Приклад 16. Схожість зерна в середньому становить 60%. Вважаючи випадковою величиною кількість пророслих зернин, знайти ймовірність того, що з 500 посіяних зернин зійде саме 300.

Розв'язання. Для обчислення ймовірності того, що з 500 посіяних зернин зійде саме 300 зернин можна застосувати вбудовану функцію **НОРМРАСПР (X, Среднее, Стандартное_откл, Интегральная).** У вікні діалогу аргументів функції **НОРМРАСПР** заповнимо поля наступним чином (рис. 3.1.23.):

X **-** змінна величина, яка приймає значення розміщені у комірці **B7**;

Среднее – математичне очікування випадкової величини (у комірці **B4** обчислимо математичне очікування випадкової величини $M(x) = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}6 = 300$);

Стандартное_откл – середнє квадратичне відхилення (у комірці **B5** обчислимо $\sigma(x) = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{300 \cdot 0{,}4} = 10{,}9545$);

Интегральная – 0 (для знаходження ймовірності випадкової події $P_{500}(X = 300)$).

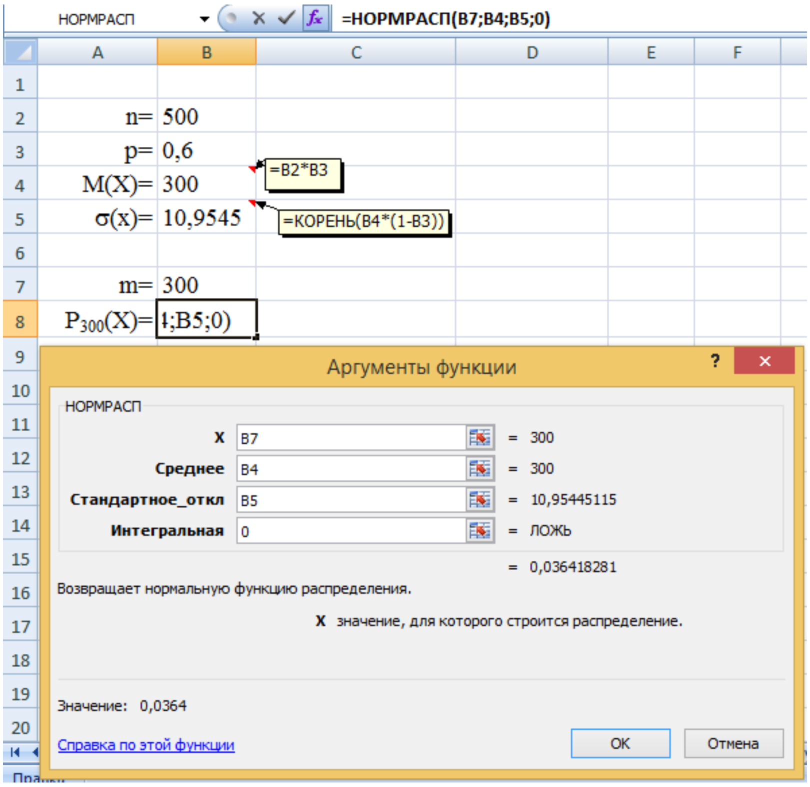


Рис. 3.1.24. Заповнення полів вікна діалогу НОРМРАСП для обрахунку щільності ймовірностей

3.2. Використання GRAN 1 під час вивчення розподілів випадкових величин

Сучасна освіта розглядається в усьому світі як важливий чинник становлення та загального інтелектуального розвитку людини. Впровадження інформаційних технологій в усі сфери суспільства викликає необхідність оцінки існуючих підходів до освітнього процесу з погляду їхньої адекватності новим життєвим реаліям.

Дослідження В. Ю. Бикова, М. І. Жалдака, В. Ф. Заболотного, В. І. Клочка, В. В. Лапінського, М. С. Львова, Н. В. Морзе, С. А. Ракова, Ю. С. Рамського, О. В. Співаковського та інших вчених переконливо доводять, що впровадження інформаційних технологій у навчальний процес дає змогу індивідуалізувати та диференціювати процес навчання, значно розширити можливості викладача у реалізації дидактичних принципів і тим самим підвищити якість засвоєння навчального матеріалу та сприяти активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів.

Під час вивчення математики використовуються системи геометричного моделювання (Autodesk 3ds Max, ANSYS, GRAN 1, GRAN 2D GRAN 3D, Geogebra); системи комп'ютерної математики (Derive, Maple, Matlab, Mathematica, MathCAD, Maxima) та інші. Їх використання відкриває широкі можливості щодо регулювання обсягу та подання інформації, тривалості її вивчення; визначення видів самостійної роботи, контролю якості засвоєння знань студентами тощо. Проблему доцільності використання та вибір будь-якої з перехованих технологій вирішує викладач.

Всі вищезгадані програми можна застосовувати також під час навчання теорії ймовірностей. Зокрема, вивчення неперервних випадкових величин доцільно супроводжувати відповідним ілюстративним матеріалом, який вимагає деяких часових затрат. Крім того, для успішного вивчення теми від учасників навчального процесу вимагається володіння певними математичними поняттями та прийомами (обчислення визначеного інтеграла; побудова графіка функції, заданого різними способами; тощо), які для вивченням цієї теми є базовими. Відсутність у студентів таких знань можуть перетворити вивчення неперервних випадкових величин на вивчення методів інтегрування. У такому разі, викладач має віднайти спосіб, який надасть змогу вивчити сутність нових понять і їх властивостей без відволікання на аналітичні обчислення та довготривалі геометричні побудови графіків функцій.

Програмний педагогічний засіб GRAN 1 цілком забезпечує такі вимоги, оскільки він призначений для графічного аналізу функцій. У вивченні згаданої теми засоби програми надають можливість побудови графіка функції, який задано явно в декартових і полярних координатах, параметрично, неявно або таблицею, у вигляді ламаної лінії чи набору статистичних даних. Для побудованих функцій можна обчислювати визначені інтеграли, значення похідних у заданих точках.

Запропонуємо типи задач, які можна розв'язувати засобами програми під час вивчення неперервних випадкових величин:

- вивчення властивостей інтегральної та диференціальної функцій розподілу та побудова їх графіків;
- визначення виду розподілу;
- визначення невідомого параметра диференціальної функції розподілу;
- визначення ймовірності того, що випадкова величина набуде значення з деякого інтервалу $(a; в)$.

Сторінки історії

Програмно-методичний комплекс GRAN (GRAN 1, GRAN 2D, GRAN 3D) розроблений у НПУ імені М.П. Драгоманова під керівництвом академіка М.І. Жалдака.

Програму GRAN 1, розроблену А.В. Пеньковим для комп'ютера Ямаха в період з 1987 до 1989 рр., вже 1990 р. було продемонстровано в НДІ ЗІМН АПН СРСР на засіданні спеціалізованої вченої ради.

GRAN 1 призначена для графічного аналізу функцій, звідки і походить її назва (GRaphic ANalysis).

Для ефективного формування понять неперервних випадкових величин пропонуємо зосередитись на їх геометричній інтерпретації. Аналогія між аналітичними властивостями поняття та їх геометричною сутністю надасть можливість показати графічне відображення математичного знання та сприятиме формуванню стійких математичних понять.

Графіки є ефективною формою відображення даних з точки зору їх сприйняття за рахунок формування як цілісного уявлення про досліджуване поняття чи явище, так і про окремі його складові. Зоровий образ, який відображає графічно геометричну сутність поняття та дозволяє виявити певні залежності і встановити закономірності, підкріплює математичні знання. Графічний спосіб подання інформації надає можливість переконатися у достовірності поданої інформації, створити геометричний образ аналітичної властивості, що в подальшому забезпечить міцні знання і застереже від повторного вивчення навчального матеріалу. Крім того, графічний образ математичного поняття виступає досить ефективним засобом наочності.

Використання такої наочності підвищує інтерес до вивчення навчального матеріалу, сприяє кращому його узагальненню, дозволяє прискорити та поглибити його вивчення, зосередившись на сутності поняття, а не відволікатися на допоміжні аналітичні обчислення, які можуть стати перешкодою у вивченні теми.

Досліджуючи прийоми використання наочності В.В. Давидов акцентує увагу на тому, що наочність підкріплена активністю учасника навчального процесу у значній мірі підсилює ефект сприймання та засвоєння навчального матеріалу.

Використання геометричної інтерпретації властивостей випадкових величин через побудову графіків функцій сприяє кращому розумінню та засвоєнню навчального матеріалу. Відображення графічних співвідношень дозволяє формувати цілісний образ поняття, яке вивчається, а геометрична сутність викладеного матеріалу є більш зрозумілою та звичною для студентів.

Таблиця 3.2.1.

Властивості інтегральної функції розподілу випадкової величини

Властивості	**Геометрична інтерпретація**
1. Інтегральної функція приймає значення $0 \le F(x) \le 1$. **випливає з означення інтегральної функції: ймовірність завжди є невід'ємне число, яке не перевищує 1.*	Графік розміщений у області, обмеженій прямими $y = 0,\ y = 1$.
2. $F(x)$ – неспадна функція. * *для будь-якого $x_2 > x_1$ з області визначення функції $F(x_2) \ge F(x_1)$*	При зростанні ***x*** на інтервалі $(a; в)$, де знаходяться всі можливі значення випадкової величини, графік «підіймається вгору».
3. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a; в)$, то: $F(x) = 0,$ *якщо* $x \le a;$ $F(x) = 1,$ *якщо* $x \ge b.$	При $x \le a$ ординати графіка рівні **0**; при $x \ge b$ ординати графіка рівні **1**.

Прямі та обернені задачі на побудову графіка випадкової величини та перевірку чи є це графік цієї величини є запорукою міцних знань, побудованих на візуальному сприйнятті виучуваних об'єктів.

Опишемо основні прийоми GRAN 1, які використовують під час вивчення неперервних випадкових величин:

- побудова графіка функції;
- обчислення визначеного інтеграла;
- побудова демонстраційної комп'ютерної моделі для визначення невідомого параметра диференціальної функції розподілу.

Таблиця 3.2.2.

Етапи побудови графіка функції засобами Gran 1

<table>
<tr>
<td>1.</td>
<td>У вікні діалогу вибрати спосіб задання функції.

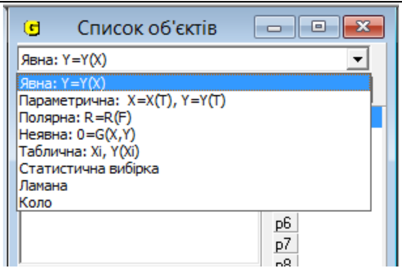
*явна</td>
<td>

Рис. 3.2.1. Вікно діалогу «Список об’єктів»</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>З меню «Об’єкт» вибрати команду «Створити».

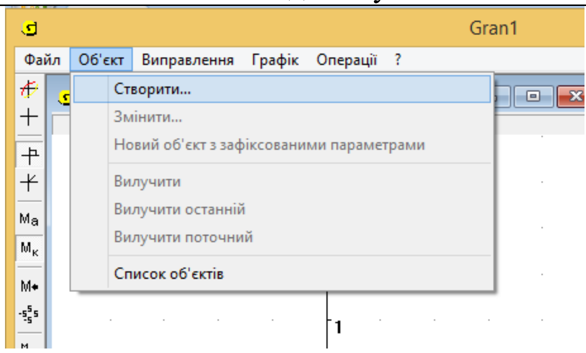
*У результаті з’явиться вікно діалогу для введення виразу залежності.</td>
<td>

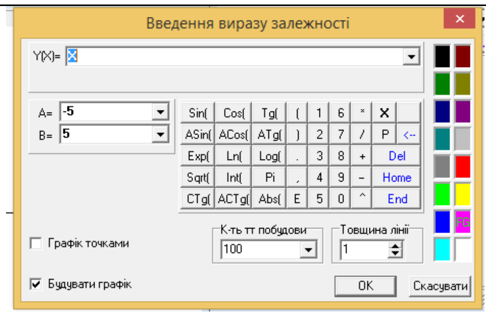
Рис. 3.2.2. Головне меню програми Gran 1</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Заповнити всі поля форми, використовуючи вбудовану панель інструментів.</td>
<td>

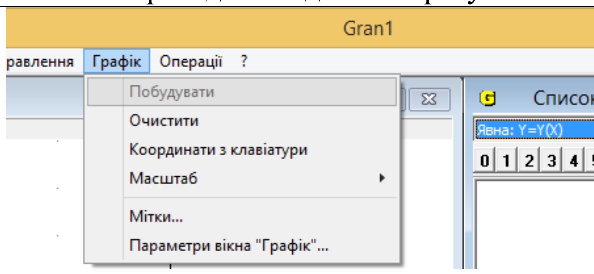
Рис. 3.2.3. Форма для введення виразу залежності</td>
</tr>
<tr>
<td>4.</td>
<td>Вибрати команду «Побудувати» з меню «Графік».</td>
<td>

Рис. 3.2.4. Підменю «Графік»</td>
</tr>
</table>

Для обчислення інтегралів засобами Gran 1 (рис. 3.2.5.) використовують команду **Інтеграли/Інтеграл** з меню **Операції.** У результаті з’явиться вікно діалогу, в якому потрібно встановити межі інтегрування та натиснути кнопку **Обчислити.** У вікні програми **Графік** буде відображено фігуру, площу якої знайдено, а у вікні **Інтегрування** з’явиться чисельний результат вибраної операції. Його можна скасувати, або занести у відповіді.

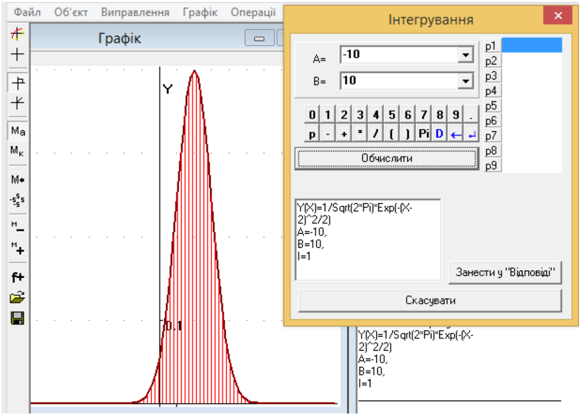
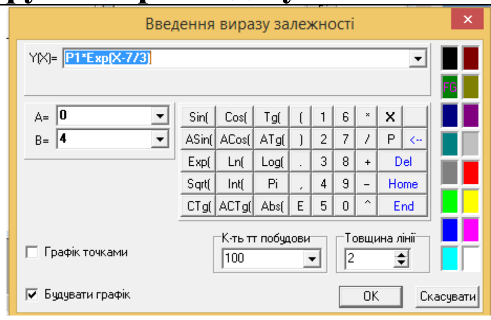
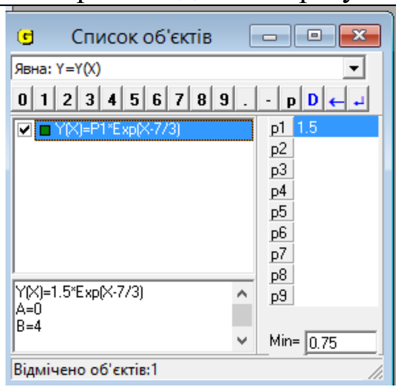
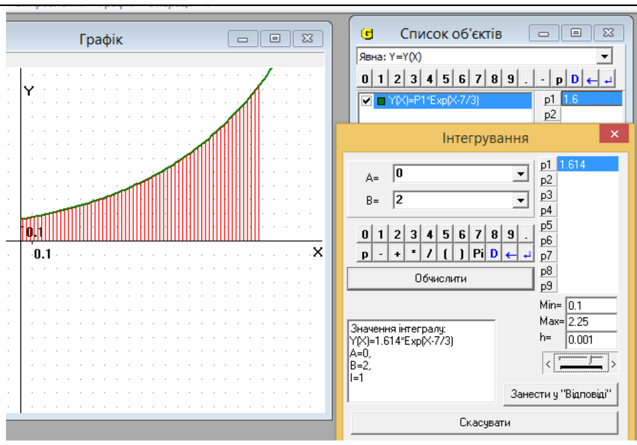


Рис. 3.2.5. Скріншот результату виконання операції обчислення визначеного інтеграла

Таблиця 3.2.3.

Побудова демонстраційної комп'ютерної моделі для визначення невідомого параметра диференціальної функції розподілу

1.	Ввести формулу з використанням кнопки **Р** на панелі інструментів **Введення виразу залежності.**	 Рис. 3.2.6. Форма введення виразу залежності
2.	Змінюючи значення параметра у вікні діалогу **Список об'єктів** можна, спостерігати за перетворенням графіка функції. Залежно від виразу залежності програмою встановлюється мінімальне значення параметра автоматично. **параметрів може бути декілька, але не більше дев'яти*	 Рис. 3.2.7. Вікно діалогу «Список об'єктів»
3.	Для підбору **Р1** у вікні діалогу **Інтегрування** обчислити значення виразу **I** та звести його до ***одиниці*** встановивши крок **h** зміни параметра.	 Рис. 3.2.8. Скріншот результату підбору параметра

Створена демонстраційна комп’ютерна модель дозволяє здійснювати експерименти з графіком із різними параметрами, змінюючи які, можна відслідковувати динаміку перетворення залежності. У результаті цих експериментів досить легко визначити конфігурації, які дозволяють сформувати обґрунтовані гіпотези, а потім їх експериментально підтвердити.

Розглянемо можливості GRAN 1 під час вивчення властивостей неперервних випадкових величин на основі графічного методу, перевагою якого є демонстрація залежності форми кривої від властивості випадкової величини.

Приклад 1. Які з наведених функцій є функціями розподілу випадкової величини?

а) $F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 2; \\ \dfrac{x}{2}-1,\ 2<x\le 4; \\ 1,\ x>4. \end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0; \\ \sin x,\ 0<x\le 2\pi; \\ 1,\ x>2\pi. \end{cases}$ в) $F(x)=\begin{cases} 0,\ x<1; \\ \ln x,\ x\ge 1. \end{cases}$

г) $F(x)=\begin{cases} 1,\ x\le 0; \\ \cos x,\ 0<x\le \pi/2; \\ 0,\ x>\pi/2. \end{cases}$ д) $F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0; \\ x^2,\ 0<x<1; \\ 1,\ x>1. \end{cases}$ е) $F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0; \\ \sin x,\ 0<x\le \pi/2; \\ 1,\ x>\pi/2. \end{cases}$

Розв’язання. Для встановлення функції розподілу випадкової величини необхідно перевірити чи володіє задана функція вказаними властивостями (табл. 3.2.1.). Найпростіше це можна зробити за допомогою графічного представлення заданої функції. Побудуємо графіки функцій а)-е) засобами GRAN 1, використовуючи прийоми, описані у таблиці 3.2.2.

Функції а), е) є функціями розподілу видаткової величини, оскільки кожна з них володіє перерахованими властивостями (рис. 3.2.9., рис. 3.2.14.).

Функція б) (рис. 3.2.10.) на відрізку від (0; ∞) приймає значення від -1 до 1, що суперечить першій властивості. Крім того, вона не є неспадною, що суперечить другій властивості.

Функція в) на відрізку (1; ∞) приймає значення від (0; ∞), чим порушується перша властивість (рис. 3.2.11.).

У пункті г) порушена друга та третя властивості функції розподілу (рис. 3.2.12.)

У пункті д) (рис. 3.2.13.) функція не є неперервною зліва.

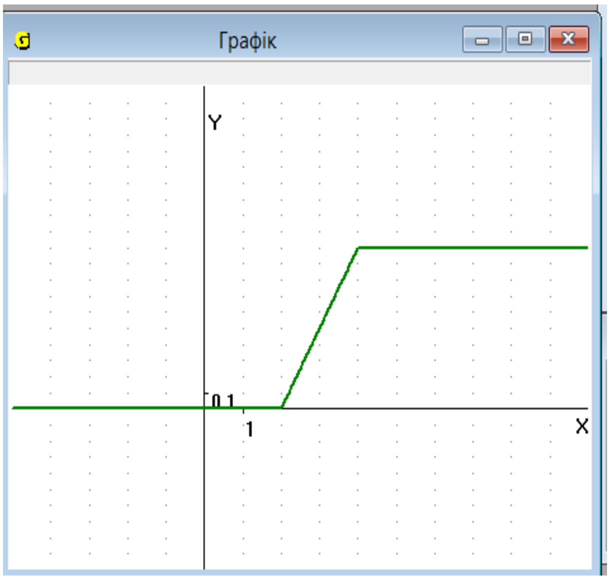


Рис. 3.2.9. Скріншот результату побудови графіка функції пункту а)

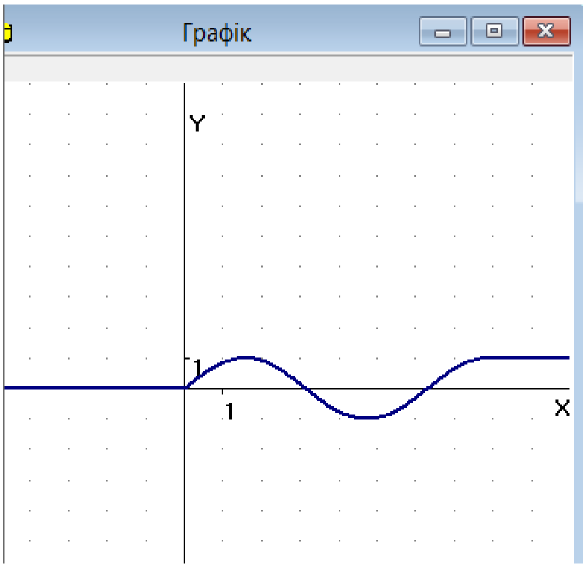


Рис. 3.2.10. Скріншот результату побудови графіка функції пункту б)

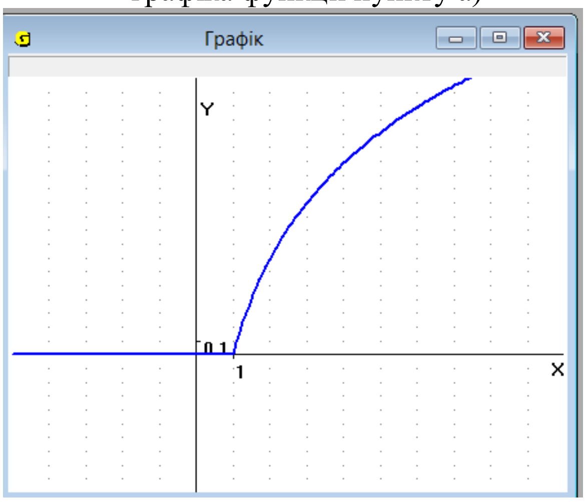


Рис. 3.2.11. Скріншот результату побудови графіка функції пункту в)

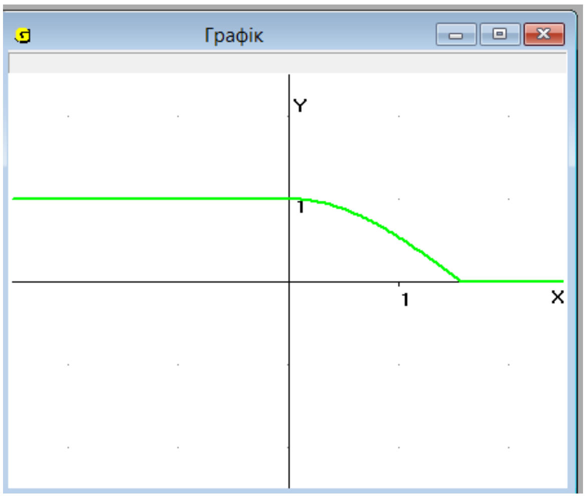


Рис. 3.2.12. Скріншот результату побудови графіка функції пункту г)

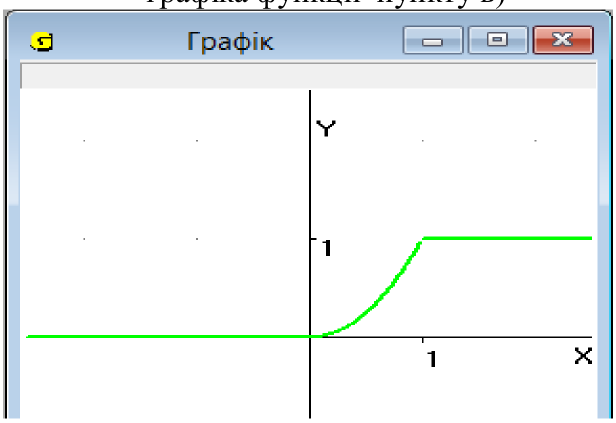


Рис. 3.2.13. Скріншот результату побудови графіка функції пункту д).

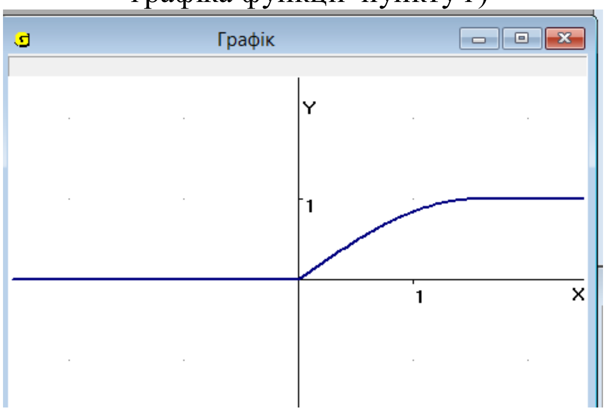


Рис. 3.2.14. Скріншот результату побудови графіка функції пункту е).

Таблиця 3.2.4.

Властивості диференціальної функції розподілу

Властивості функції	**Геометрична інтерпретація**
1. Диференціальна функція невід'ємна. $f(x) \ge 0$. **оскільки інтегральна функція є неспадна, то її похідна - невід'ємна.*	Графік розміщений над віссю ***Ox*** або на ній. **графік називають **кривою розподілу***
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ** виражає ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина прийме значення з інтервалу* $(-\infty; \infty)$. *Очевидно, що така подія достовірна, а її ймовірність рівна 1.*	Площа криволінійної трапеції обмежена віссю ***Ox*** та кривою розподілу, рівна **1**.
а) Імовірність того, що неперервна випадкова величина *X* набуде значення з інтервалу $(a; в)$, дорівнює визначеному інтегралу від густини її розподілу в межах від *а* до *в,* тобто: $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$	Імовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значення з інтервалу $(a; в)$, дорівнює площі криволінійної трапеції обмеженою віссю ***Ox,*** кривою розподілу і прямими ***x=a*** та ***x=в***.

Розглянемо задачу, яка дозволяє продемонструвати властивості диференціальної функції графічно.

Приклад 2. Чи є функції а) $f_1(x) = -x^2$; б) $f_2(x) = 0{,}5\sin x + 0{,}5$; в) $f_3(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ функціями густини розподілу ймовірностей?

Розв'язання. Побудуємо графіки заданих функцій. Функція а) (рис. 3.2.15.) не є густиною, оскільки порушується властивість 1 (табл. 3.2.4.) диференціальної функції розподілу; функція б) (рис. 3.2.16.) теж не є густиною, хоча вона і не набуває від'ємних значень, однак невласний інтеграл від цієї функції більший за одиницю; функція в) (рис. 3.2.17.) є густиною розподілу: крива розподілу розміщена над віссю *Ox*, а площа фігури обмежена графіком функції та віссю *Ox* рівна 1.

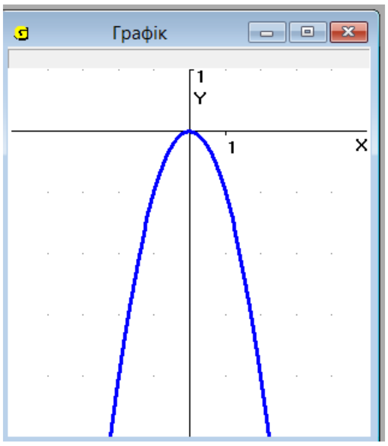


Рис. 3.2.15. Скріншот результату побудови графіка функції а).

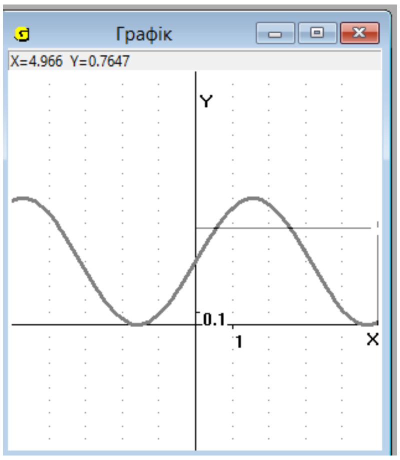


Рис. 3.2.16. Скріншот результату побудови графіка функції б).

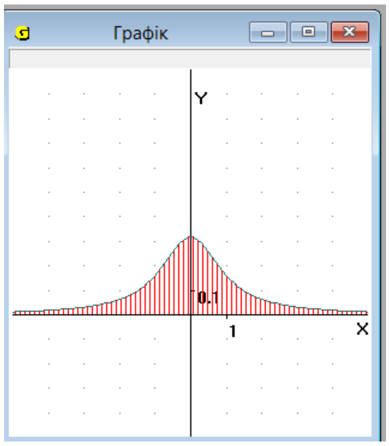


Рис. 3.2.17. Скріншот результату побудови графіка функції в).

Приклад 3. Які з наведених функцій є щільністю розподілу випадкової величини? При якій умові?

$$\text{а)}\ f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \cos x,\ 0<x\le \pi/2;\\ 0,\ x>\pi/2.\end{cases}\qquad \text{б)}\ f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 1;\\ a\sqrt{x}, 1<x\le 4.\\ 0\ x>4.\end{cases}$$

Розв'язання. Для перевірки властивостей диференціальної функції розподілу побудуємо графіки заданих функцій.

Функція а) є диференціальною функцією розподілу, оскільки вона розташована над віссю ***Ox***. Невласний інтеграл від заданої функції рівний 1, у чому легко переконатися за допомогою GRAN 1 (рис. 3.2.18.). Слід зауважити, що користувач може ввести межі інтегрування, або залишити запропоновані програмою, така особливість не вплине на остаточний результат.

Обчислення невідомого параметра у задачі б) аналітичним шляхом дещо ускладнює її розв'язування. Чого не можна сказати про можливість його пошуку за допомогою побудованої моделі у GRAN 1 (рис. 3.2.19.). На її основі можна зробити висновок, що функція б) є диференціальною функцією розподілу ймовірностей випадкової величини при умові, якщо a=0,215. Зазначимо, що в основу моделі покладено другу властивість диференціальної функції розподілу (таб. 3.2.4.).

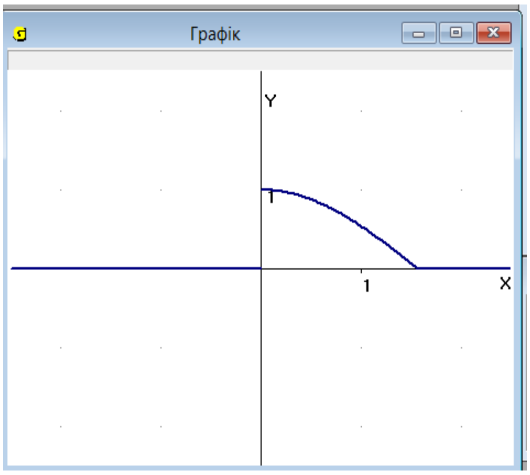


Рис. 3.2.18. Скріншот результату побудови графіка функції пункту а)

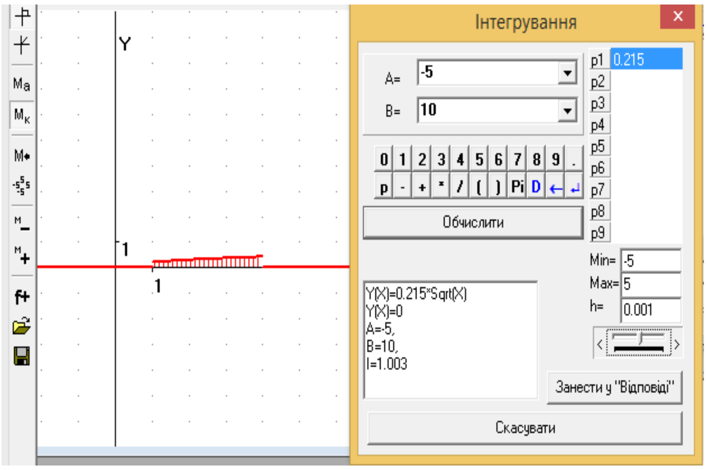


Рис. 3.2.19. Скріншот результату побудови графіка функції пункту б)

Приклад 4. Випадкова величина задана інтегральною функцією. Знайти диференціальну функцію. Побудувати графіки цих функцій.

а) $F(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 0; \\ x, \ 0 < x < 1; \\ 1, \ x > 1. \end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 1; \\ \dfrac{1}{7}(x\sqrt{x}-1), \ 1 < x \le 4; \\ 1, \ x > 4. \end{cases}$

Розв'язання. Графіки заданих функцій зображені на рис. 3.2.20, 3.2.21. Їх побудова передбачає використання раніше описаних прийомів. Графічний аналіз функцій надає можливість співставити функції розподілу та щільності, знайти спільні і відмінні властивості та встановити взаємозв'язок між ними.

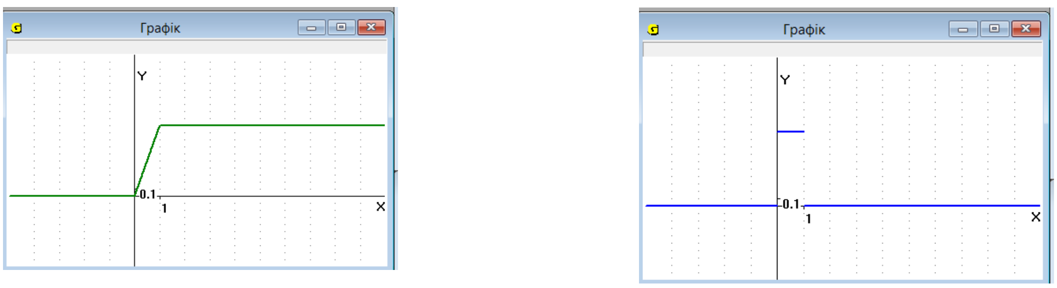


Рис. 3.2.20. Графіки диференціальної та інтегральної функцій розподілу пункту а)

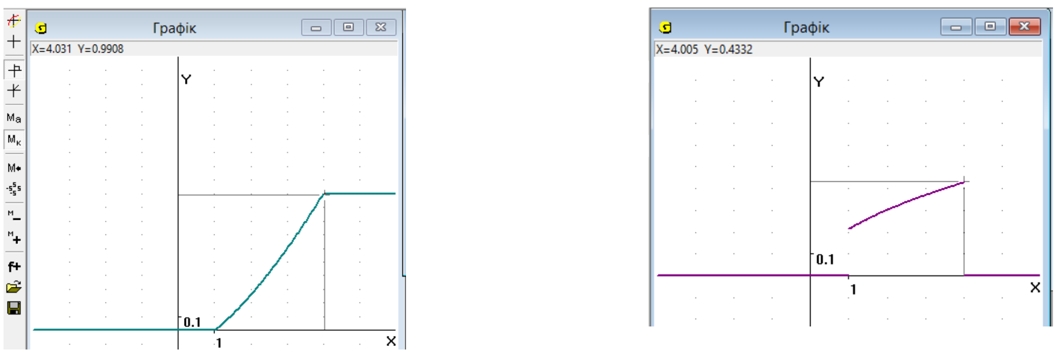


Рис. 3.2.21. Графіки диференціальної та інтегральної функцій розподілу пункту б)

Таблиця 3.2.5.

Залежність виду кривої від параметрів розподілу випадкової величини

<table>
<tr><th></th><th>Вид розподілу</th><th colspan="2">Параметри</th><th>Вплив параметрів на вид кривої</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1.</td><td rowspan="3">Нормальний розподіл
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$</td><td colspan="2">$a=M(X)$</td><td>Не змінює форму кривої, а приводить лише до її зсуву вздовж осі <i>Ox:</i> вправо, якщо <i>a>0</i>; вліво, якщо <i>a<0</i>.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sigma=\sqrt{D(X)}$</td><td>При зростанні σ крива стискається до осі Ox, при спаданні – розтягується вздовж додатного напрямку осі Oy.</td></tr>
<tr><td colspan="3">*при будь-яких значеннях параметрів площа, обмежена нормальною кривою та віссю Ох, залишається рівною 1.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td rowspan="2">Рівномірний розподіл
$f(x)=\begin{cases}0,\ x\notin[a;b];\\ \frac{1}{b-a},\ x\in[a;b].\end{cases}$</td><td colspan="2">a, b</td><td>На відрізку $[a;b]$ графік паралельний до осі Ox.</td></tr>
<tr><td colspan="3">*функція стала на відрізку $[a;b]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">Показниковий
$f(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0.\end{cases}$</td><td rowspan="2">λ>0</td><td>$\lambda\in[0;1]$</td><td>Графік розтягується вздовж додатного напрямку осі Ox.</td></tr>
<tr><td>λ>1</td><td>Графік розтягується вздовж додатного напрямку осі Oy.</td></tr>
</table>

Приклад 5. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ – рівномірно розподілена на інтервалі (0; 2). Знайти ймовірність того, що вона прийме значення не більше за 1,5. Побудувати графіки густини і функції розподілу випадкової величини.

Розв'язання. Неперервна випадкова величина називається рівномірно розподіленою на проміжку $[a;b]$, якщо густина $f(x)$ на цьому проміжку є стала, а поза ним дорівнює нулю, тобто:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\notin[a;b];\\ \frac{1}{b-a},\ x\in[a;b].\end{cases} \qquad (3.2.1.)$$

Відповідна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\leq a;\\ \frac{x-a}{b-a},\ a<x\leq b;\\ 1,\ x>b.\end{cases} \qquad (3.2.2.)$$

Запишемо функцію густини та розподілу відповідно до умови задачі, використовуючи формули (3.2.1.), (3.2.2.): $f(x)=\begin{cases}0, x\notin[0;\,2];\\ \dfrac{1}{2}, x\in[0;\,2].\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0;\\ \dfrac{x}{2},\ \ 0<x\le 2;\\ 1,\ \ x>2.\end{cases}$

Побудуємо графіки густини (рис. 3.2.22.) та функції розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини (рис. 3.2.23.).

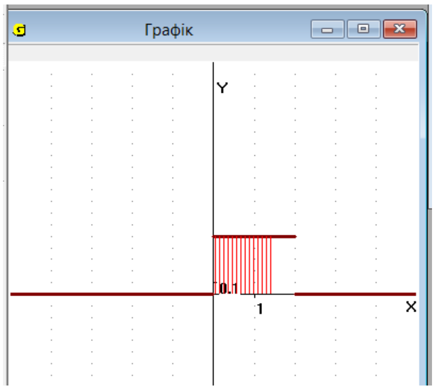


Рис. 3.2.22. Графік диференціальної функції розподілу

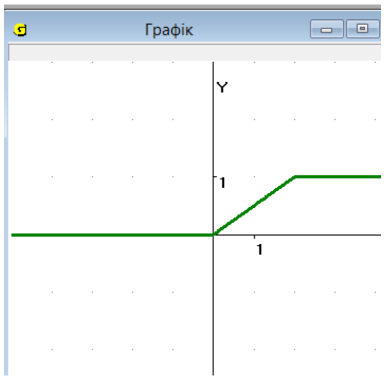


Рис. 3.2.23. Графік інтегральної функції розподілу

Ймовірність того, що X прийме значення не більше за 1,5 визначають, використовуючи прийом інтегрування. У даному випадку потрібно обчислити визначений інтеграл із межами від 0 до 1,5. У вікні **Графік** результат буде відображено у вигляді заштрихованої площі криволінійної трапеції, яка обмежена функцією густини, віссю ***Ox*** та прямими ***x=0, x=1,5***.

Приклад 6. Побудувати графіки густини розподілу випадкової величини розподіленої за нормальним законом. Дослідити як зміниться вид кривої, залежно від її параметрів. Обчислити площі фігур обмежених функцією густини та віссю Ox.

Розв'язання. Випадкова величина називається розподіленою за нормальним законом з параметрами $a=M(X)$ і $\sigma=\sqrt{D(X)}$, якщо її густина має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (3.2.3.)$$

Дослідимо вплив параметра $\boldsymbol{\sigma}$ на вид графіка густини. Побудуємо графіки функції, якщо $\boldsymbol{\sigma^2=0,5;\ \sigma^2=1;\ \sigma^2=5}$ (рис. 3.2.24.). У всіх випадках приймемо ***a=0.*** На рисунку видно, що із збільшенням середнього квадратичного відхилення максимальна ордината нормальної кривої зменшується, у той же час крива стає пологою і стискається до осі *Ox*.

На рис. 3.2.25. побудована нормальна крива з параметрами *a=2*. Якщо побудувати модель зі змінним параметром *P* у формулі густини замість *a*, то легко бачити, що зміна величини параметра *a* не змінює форму нормальної кривої, а лише приводить до її зсуву вздовж осі *Ox*. Слід підкреслити, що площі фігур обмежених нормальною кривою та віссю *Ox* при будь-яких значеннях параметрів *a* і *σ*, залишаються рівними **1**. Це легко перевірити, використавши операцію інтегрування.

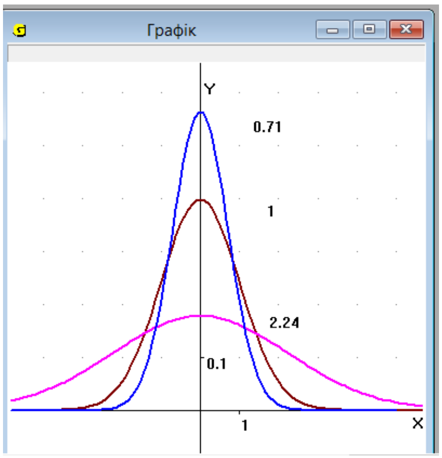


Рис. 3.2.24. Графіки нормальної кривої з різними параметрами

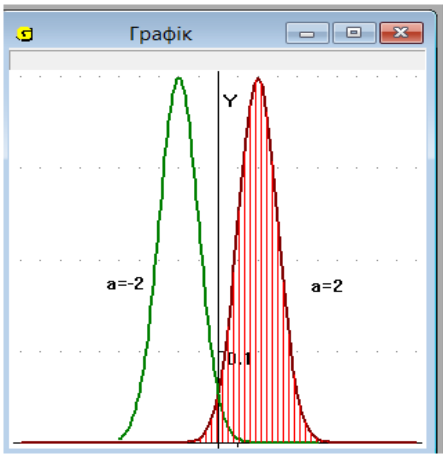


Рис. 3.2.25. Графіки нормальної кривої зі змінним параметром *P*

Приклад 7. Випадкова величина розподілена за показниковим (експоненціальним) законом. Побудувати графік інтегральної та диференціальної функції розподілу ймовірностей з параметрами $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$.

Розв'язання. Неперервна випадкова величина *X* називається розподіленою за показниковим законом з параметром $\lambda>0$, якщо густина розподілу її ймовірностей дорівнює:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases} \qquad (3.2.4.)$$

Відповідна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases} \qquad (3.2.5.)$$

Побудуємо графік диференціальної функції розподілу з параметрами $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ (рис. 3.2.26.), використовуючи формулу (3.2.4.).

Побудуємо графік інтегральної функції розподілу з параметрами λ_1=1, λ_2=2 (рис. 3.2.27.), використовуючи формулу (3.2.25.).

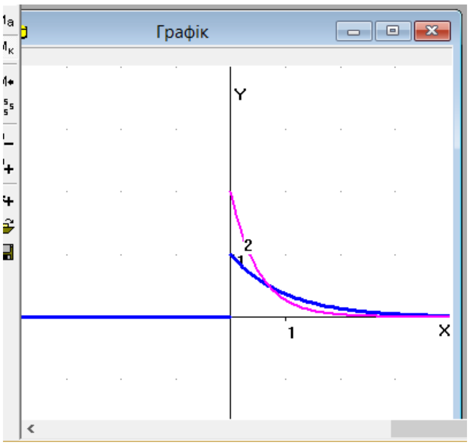


Рис. 3.2.26. Скріншот побудови графіків диференціальної функції показникового розподілу з параметрами λ_1=1, λ_2=2

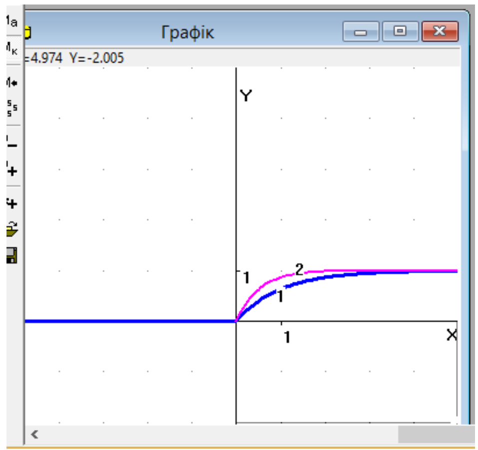


Рис. 3.2.27. Скріншот побудови графіків інтегральної функції показникового розподілу з параметрами λ_1=1, λ_2=2

Використання Gran 1 під час навчання теорії ймовірностей сприяє підвищенню мотивації творчої діяльності та пізнавального інтересу студентів, надає можливість концентруватися на вивченні нових понять, припускаючи, що попередній матеріал було засвоєно у повній мірі; дозволяє інтенсифікувати навчальну та розумову діяльність студентів на занятті, що сприяє розширенню кола задач для розв’язання; формує позитивне ставлення до дисципліни.

Сторінки історії

GeoGebra – це вільно-поширюване динамічне геометричне середовище, яке дає можливість виконувати геометричні побудови на комп’ютері таким чином, що під час руху вибраних об’єктів фігура зберігає свою цілісність, володіє можливостями для роботи з функціями, статистичними та ймовірнісними інструментами. Написана Маркусом Хохенвартером мовою Java (працює повільно, але у великій кількості операційних систем). Перекладена на 39 мов світу. Нині активно розробляється.

3.3. Віртуальний експеримент з випадковими величинами та його візуалізація засобами Geogebra

Розвиток інформаційного суспільства вплинув на сферу освіти. Цей вплив виявився не лише у активному оснащенні навчальних закладів комп’ютерною технікою, а і у розумінні потреби переосмислити усталені підходи до навчання. Особливо це стосується математики, класичний курс якої є не лише системно і фундаментально побудованим, а і досить гнучким стосовно упровадження сучасної інформаційної підтримки. Така підтримка полягає у спрощенні і пришвидшенні розрахунків, візуалізації та моделюванні математичних об'єктів, можливості їх динамічно змінювати тощо.

Одним із потужних засобів щодо моделювання процесів з випадковими подіями і величинами шляхом проведення віртуального експерименту та його опрацювання є середовище GeoGebra, виконання завдань у якому сприяє розширенню кола навчальних завдань, у тому числі, дослідницького характеру.

Інструментарій GeoGebra передбачає швидке опрацювання статистичних даних та аналіз розподілів, дозволяє здійснити з випадковими величинами, що є незаперечною перевагою при формуванні уявлень про процеси навколишнього світу, їх математичне підґрунтя.

Для організації ймовірнісних та статистичних обчислень у програмі GeoGebra передбачено вікно зі спеціальним набором інструментів, який можна знайти у вкладці **Таблицы и графики** на бічній панелі **Перспективы** або обрати **Таблицу** з меню **Вид**. Таблиця подібна до електронних таблиць MS Excel. Імена комірок можна використовувати у виразах та командах. У комірки можна вводити не лише числа, але й інші типи математичних об'єктів, які підтримуються у середовищі (координати точок, функції, команди). Якщо це потрібно, є можливість відразу виводити на екран графічний аналог об'єкта. Інструмент **Калькулятор вероятностей** дозволяє моделювати різні види розподілів, зокрема, біноміальний, Пуассона, нормальний, χ-квадрат для статистичного супроводу педагогічних експериментів.

Також у середовищі передбачено роботу з параметром як змінним об'єктом, на який можна накласти певні умови і вибір значень якого може бути «автоматично» випадковим. Саме це стоїть в основі ідеї візуалізації експериментальних випробувань на основі випадкових подій, що яскраво демонструється на задачах, де використовується геометричне і статистичне означення ймовірності. Це одночасно спрощує побудову математичної моделі задачі, забезпечує достатню кількість випадкових випробувань, візуалізує ці випадкові події і надає навчальному процесу дослідницького характеру.

Розглянемо задачі з використанням статистичного означення ймовірності на основі серії випадкових випробувань.

Приклад 1. На відрізку [-2; 2] навмання обирають число *x*. Яка ймовірність того, що $|x| < 1$?

Розв'язання. Наведемо аналітичне розв'язування задачі та запропонуємо спосіб використання середовища GeoGebra для візуалізації випадкової події.

Нехай *A* – шукана подія. За умовою задачі допустима множина точок задається нерівністю $-2 \le x \le 2$, що визначає відрізок довжиною 4 лін. од. Множина точок, що сприяє появі події *A*, задається нерівністю $-1 \le x \le 1$, що визначає відрізок довжиною 2 лін. од.

Тоді $P(A) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

Для візуалізації обчислень пропонуємо використати параметр точки на відрізку $a \in [-2; 2]$. Побудуємо точку з координатами (a; 0) та задамо логічну функцію $Если[-1 < a < 1, 1, 0]$. У аргументах функції «*Если*» вкажемо умову за якої подія відбудеться: $(-1 < a < 1)$, наступний аргумент – 1 , визначає значення функції, якщо виконується умова (число належить відрізку [-1; 1]), і 0, якщо число не належить відрізку [-1; 1].

Наступним кроком оберемо у властивостях функції послугу **Запись в таблицу** – для запису експериментальних даних у електронну таблицю. Під час анімації параметра *a* значення цієї функції будуть заноситися у перший стовпчик таблиці.

Для обчислення відносної частоти значень 1 виділимо усі отримані значення та скористаємося інструментом **Среднее арифметическое** на панелі вікна **Таблица**.

Якщо провести 228 експериментів, то тримаємо відносну частоту значень або ймовірність попадання випадкового числа 0,4159, при збільшенні кількості випробувань ймовірність шуканої події прямує до 0,5.

Після одержання результатів комп’ютерного експерименту розв’яжемо задачу за допомогою полотна CAS, отримаємо результат 0,5, який співпадає з результатом, одержаним завдяки випадковому вибору точок на відрізку [-1; 1] (рис. 3.3.1.).

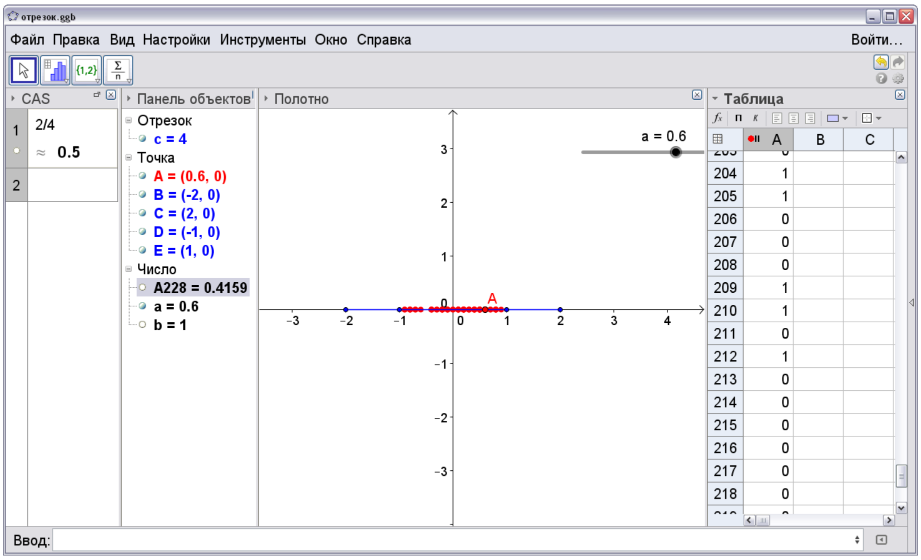


Рис. 3.3.1. Слід точки з координатами (a; 0)

Приклад 2. У прямокутнику зі сторонами 5 і 7 навмання обирають точку. Яка ймовірність того, що відстань від обраної точки до кожної зі сторін прямокутника виявиться меншою від 4?

Розв’язання. Нехай A – шукана подія. За умовою задачі допустима множина точок задається системою $\begin{cases} 0 \le x \le 7; \\ 0 \le y \le 5. \end{cases}$ Вона визначає прямокутник з довжиною 7 та шириною 5 лінійних одиниць, площа якого рівна 35 кв. од.

Множина точок, що сприяє появі події A, задається системою $\begin{cases} 7 - x < 4; \\ x < 4; \\ 5 - y < 4; \\ y < 4. \end{cases}$,

що визначає прямокутник з довжиною 3 та шириною 1 (лін. од.), площа якого дорівнює 3 (кв. од.).

Тоді,використовуючи геометричне означення ймовірності події $P(A) = \frac{3}{35} = 0{,}086.$

Для візуалізації значень випадкової величини у програмі GeoGebra побудуємо випадкову точку *A* зі змінними параметрами *(a;b)*, що належить прямокутнику, тобто $a \in [0, 7]$, $b \in [0, 5]$. Врахувавши умову задачі, задамо логічну функцію $Если((7 - a < 4) \wedge (a < 4) \wedge (5 - b < 4) \wedge (b < 4), 1, 0)$. Анімувавши параметри *a* та *b*, можна спостерігати слід випадкової точки (рис. 3.3.2.).

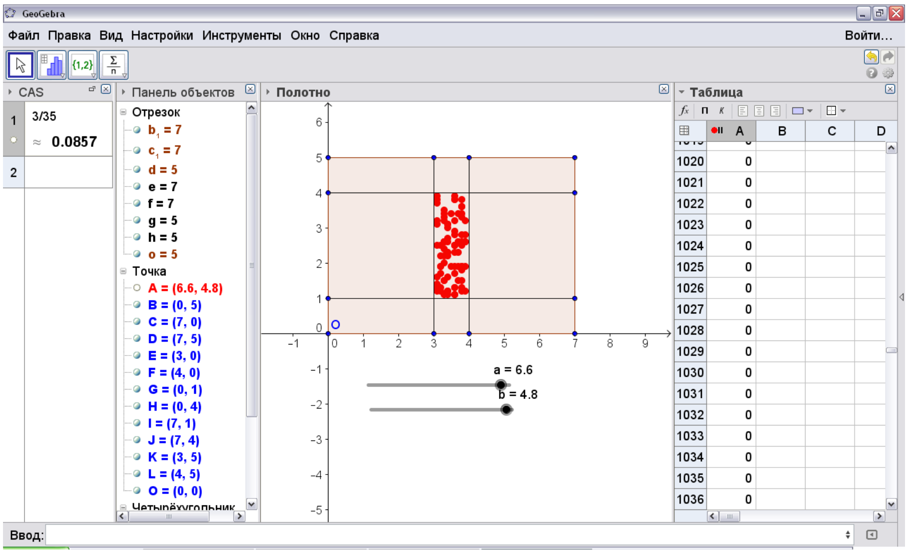


Рис. 3.3.2. Слід точки *A (a;b)*

Аналогічно до попереднього прикладу, після одержання результатів комп'ютерного експерименту, розв'яжемо це ж завдання за допомогою полотна *CAS* отримаємо – 0,0857. Цей результат співпадає з результатом, одержаним завдяки випадковому вибору точок.

Приклад 3. Навмання взято два додатних числа *a* і *b*, кожне з яких не перевищує двох. Знайти ймовірність того, що добуток $a \cdot b$ буде не більше одиниці, а частка $\frac{b}{a}$ не більша двох.

Розв'язання. Нехай *A* – шукана подія. Відповідно до умови задачі допустима множина точок, що задана нерівностями $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$ відповідає квадрату зі стороною 2.

Визначимо аналітично множину точок, що сприяють появі події A.

1) $a \cdot b \le 1;$

$0 \le a \cdot b \le 1;$

$0 \le b \le \frac{1}{a}.$

2) $\frac{b}{a} \le 2;$

$0 \le \frac{b}{a} \le 2;$

$0 \le b \le 2a.$

Задамо параметри a і b, використовуючи інструмент **Ползунок**, встановивши позначку **Случайное число.**

Враховуючи аналітичні умови, за яких відбудеться подія A, побудуємо точку з координатами *(a;b)* та зазначимо властивості точки у вкладці **Дополнительно/Условия отображения объекта**, вказавши умови $(0 \le b \le \frac{1}{a}) \wedge (0 \le b \le 2a)$. Оскільки визначені умови мають відбутися одночасно, використаємо оператор і ($\wedge$) (рис. 3.3.3.).

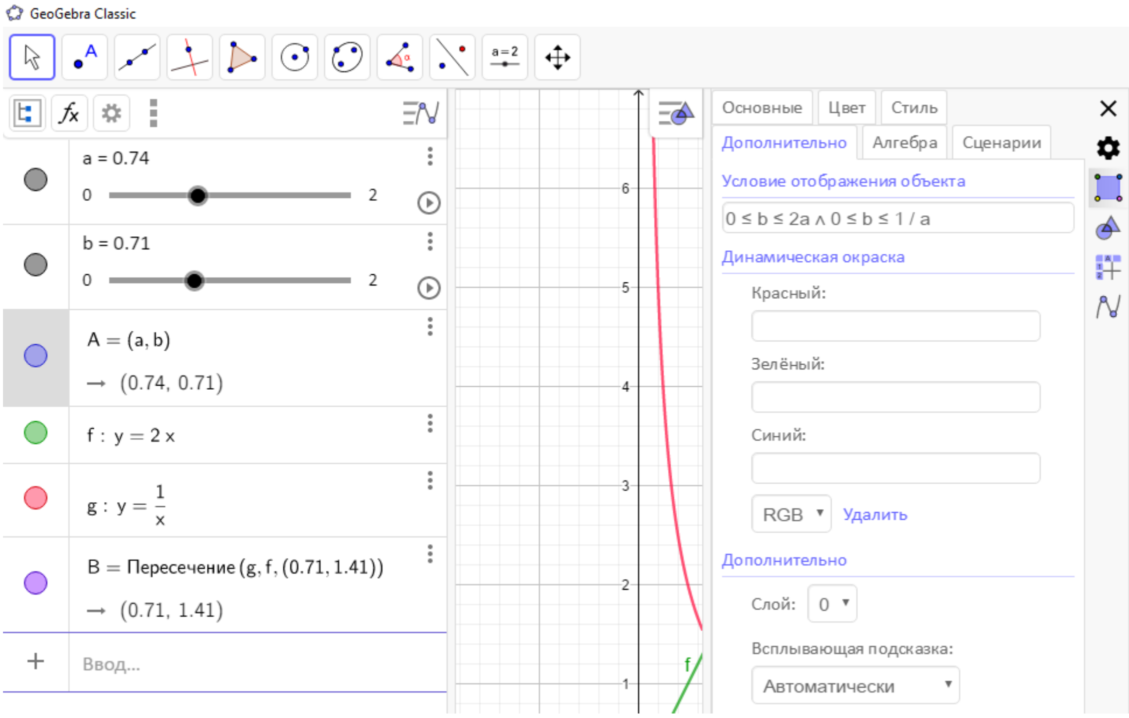


Рис. 3.3.3. Вікно діалогу властивостей випадкової точки

Вкажемо у властивостях точки **Оставить след** та анімуємо параметри a і b. Отримаємо результат, який наочно показує, де має знаходитись точка, для того, щоб виконалась задана умова (рис. 3.3.4.).

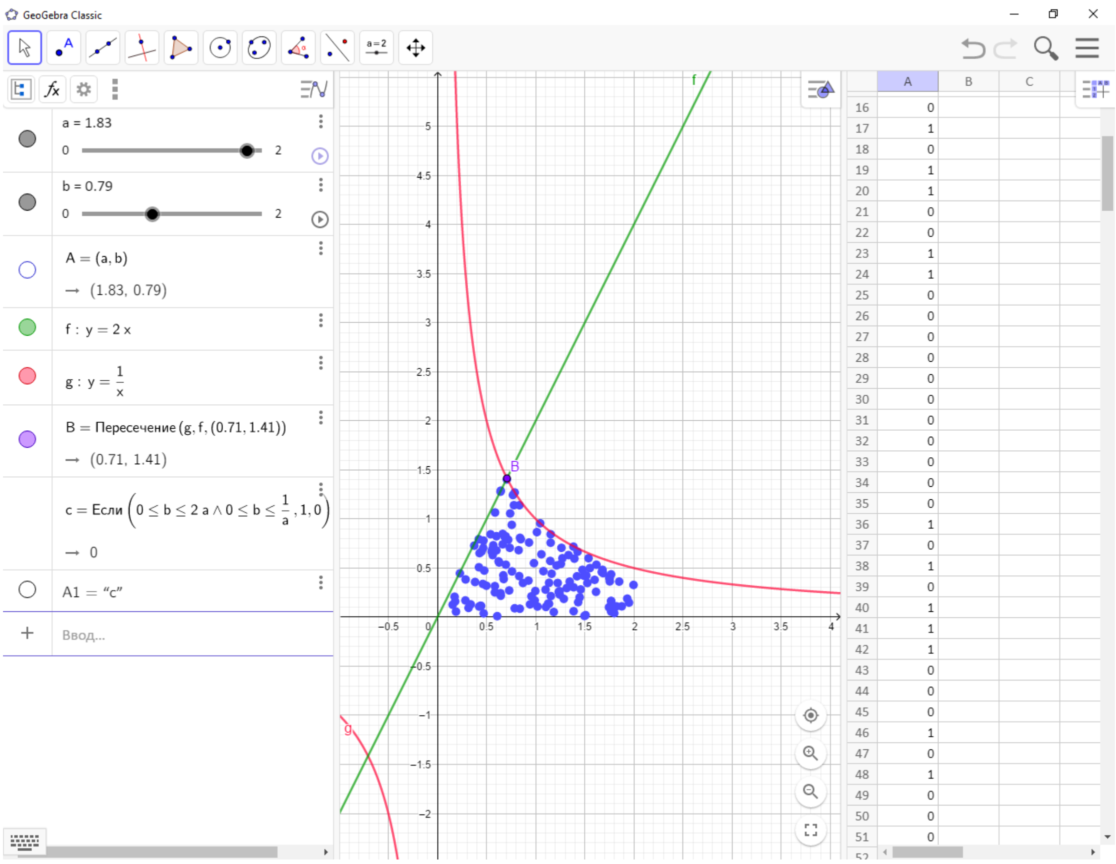


Рис. 3.3.4. Слід точки *A (a;b)*

Через командний рядок задамо логічну функцію, яка дорівнює 1, якщо умови виконуються, і яка дорівнює 0, якщо не виконуються $Если\left((0 \le b \le 2a) \wedge (0 \le b \le \frac{1}{a}), 1, 0\right)$. На наступному кроці у властивостях даної функції оберемо послугу **Запись в таблицу** для запису експериментальних даних. Під час анімації параметрів *a* і *b* значення цієї функції будуть заноситися у перший стовпчик таблиці. У комірці **B1** обчислимо відносну частоту того, що добуток $a \cdot b$ буде не більше одиниці, а частка $\frac{b}{a}$ не більша двох, для цього скористаємося інструментом **Среднее арифметическое** на панелі вікна **Таблица.** Експериментально можна перевірити, що точність залежить від кількості експериментів: чим більше випробувань, тим менше відхилення.

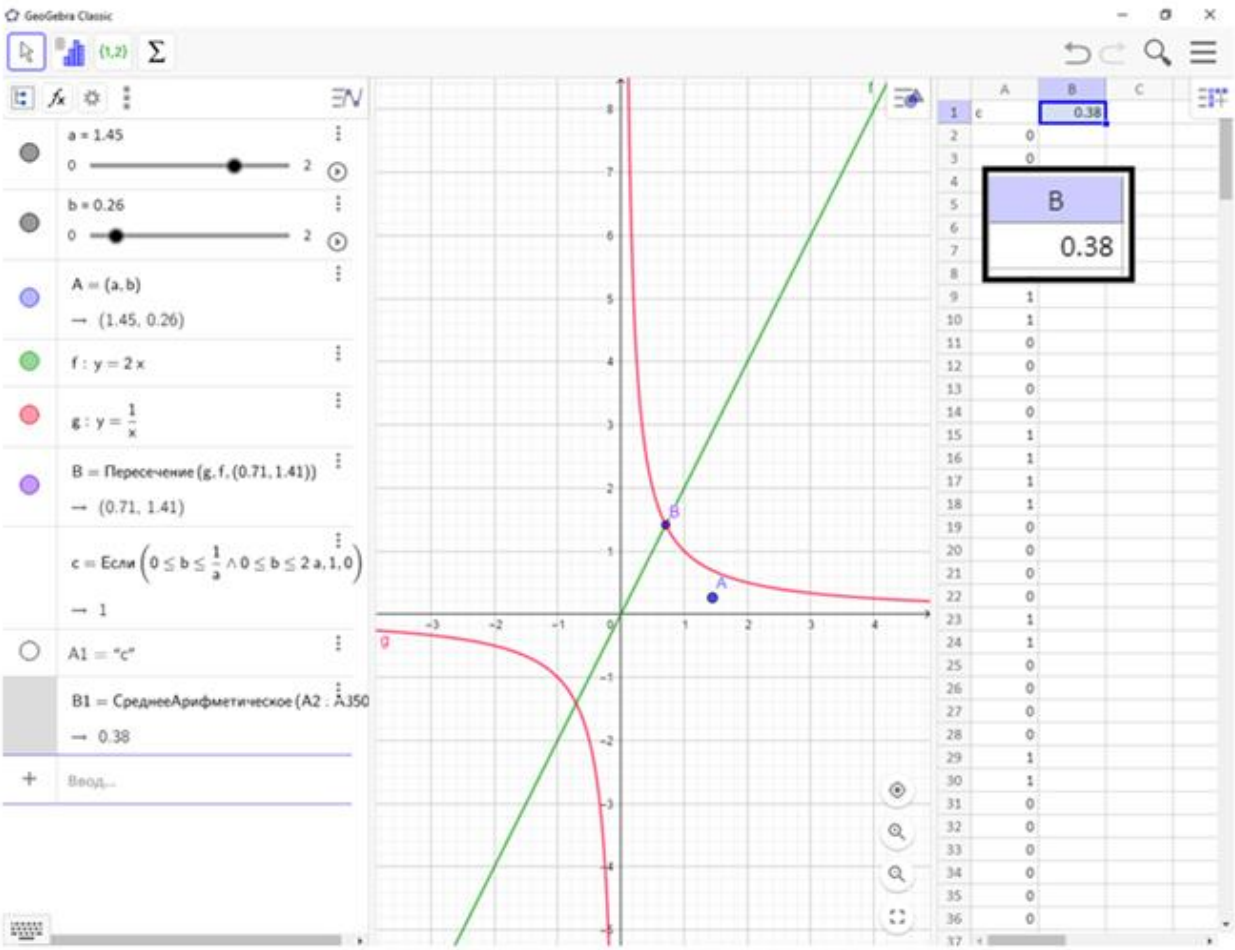


Рис. 3.3.5. Обчислення ймовірності події *A*

Як бачимо, у наведеній задачі ймовірність події *A* прямує до 0,38 (рис. 3.3.5.).

Приклад 4 (задача про зустріч). Юнак та дівчина домовилися про побачення з 15.00 до 16.00. Відомо, що кожен з них приходить у будь-який момент з 15.00 до 16.00 незалежно від іншого. Якщо юнак прийде і не зустріне дівчину, то він буде чекати її ще протягом 20 хв. Дівчина в аналогічній ситуації буде чекати юнака протягом лише 10 хв. Яка ймовірність того, що побачення відбудеться?

Розв'язання. Нехай *A* – шукана подія. Нехай *a* та *b* – час (у хвилинах) приходу на побачення юнака і дівчини відповідно, відраховані від 15.00. Задамо відповідні параметри *a* та *b*, використовуючи інструмент **Ползунок.** За умовою $a \in [0; 60]$, $b \in [0; 60]$. У властивостях точки встановимо позначку **Случайное число**. Уквадраті, побудованому на осях з вершиною в початку координат і довжиною сторони 60, координати точки *(a;b)* можуть характеризувати час приходу юнака і дівчини відповідно.

За умовою задачі побачення відбудеться, якщо виконуються аналітичні умови $(a < b \le a + 20) \vee (b \le a \le b + 10)$. Ці умови потрібно відобразити під час побудови точки *A (a;b)* у вкладці **Дополнительно,** поле **Условия отображения объекта** (рис. 3.3.6.).

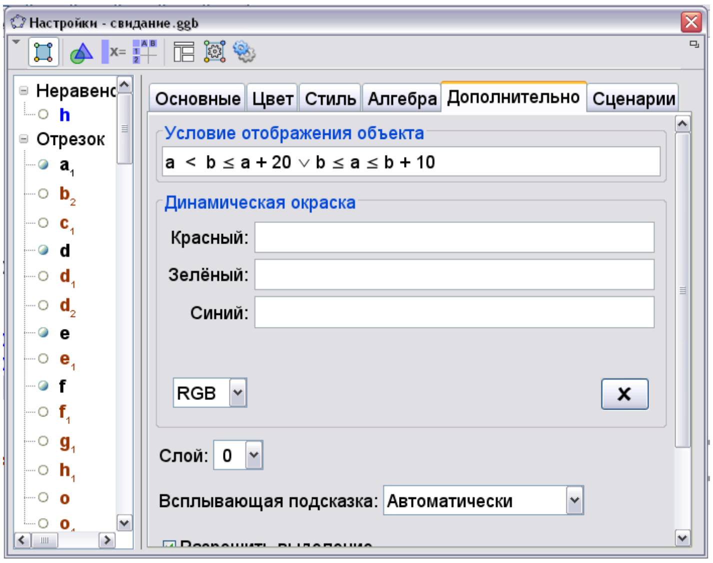


Рис. 3.3.6. Встановлення умов відображення точки *A (a;b)*

Для візуалізації експерименту вкажемо у властивостях точки **Оставлять след** і анімуємо параметри *a* та *b*. Отримаємо результат, який наочно показує, положення точки *A (a;b)* із зазначеними умовами зустрічі (рис. 3.3.7.).

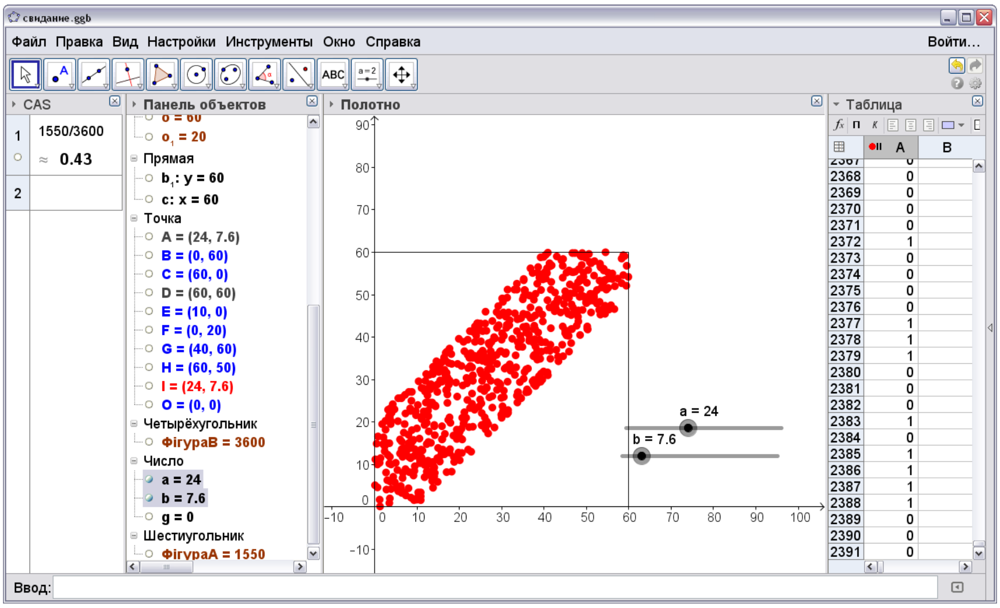


Рис. 3.3.7. Слід точки з координатами *A (a;b)*

Через командний рядок задамо логічну функцію, яка дорівнює 1, якщо виконуються умови для побачення, і яка дорівнює 0, якщо побачення не відбудеться $Если\,(a < b \leq a + 20 \vee b \leq a \leq b + 10, 1, 0)$. Для запису експериментальних даних у властивостях цієї функції оберемо послугу **Запись в таблицу.** Під час анімації параметрів a та b значення функції будуть заноситися у перший стовпчик таблиці.

Для обчислення ймовірності шуканої події виділимо усі отримані значення і обчислимо відносну частоту того, що зустріч відбудеться, тобто відносну частоту значень 1 для заданої функції. Для цього скористаємося інструментом **Среднее арифметическое** на панелі вікна **Таблица.**

Якщо провести 408 експериментів, то тримаємо відносну частоту значень або ймовірність зустрічі 0,4606; при кількості експериментів 594 – 0,4476; при 806 – 0,4353; при 1041 – 0,4306. Як бачимо, при збільшенні кількості випробувань ймовірність зустрічі прямує до 0,4306.

Для порівняння результатів, розв’яжемо задачу, використовуючи геометричне означення ймовірності.

Побудуємо фігуру *A*, точки якої задовольняють нерівності $x < y \leq x + 20 \vee y \leq x \leq y + 10 \vee 0 \leq x \leq 60 \vee 0 \leq y \leq 60$. Побудуємо також квадрат *B* зі сторонами на осях координат, вершиною в початку координат і довжиною сторони 60. Юнак і дівчина зустрінуться тоді і лише тоді, коли навмання вибрана в квадраті точка належатиме фігурі *A*.

Обчислимо площі фігур *A* та *B*: площа фігури *A* – 1550, площа фігури *B* – 3600. Використовуючи геометричне означення ймовірності події, за допомогою полотна CAS отримаємо що ймовірність шуканої події $P(A) = \dfrac{1550}{3600} \approx 0{,}4306$ (рис. 3.3.8.). Цей результат співпадає з результатом, одержаним завдяки випадковому вибору точок у квадраті і визначенню відносної частоти появи зустрічі.

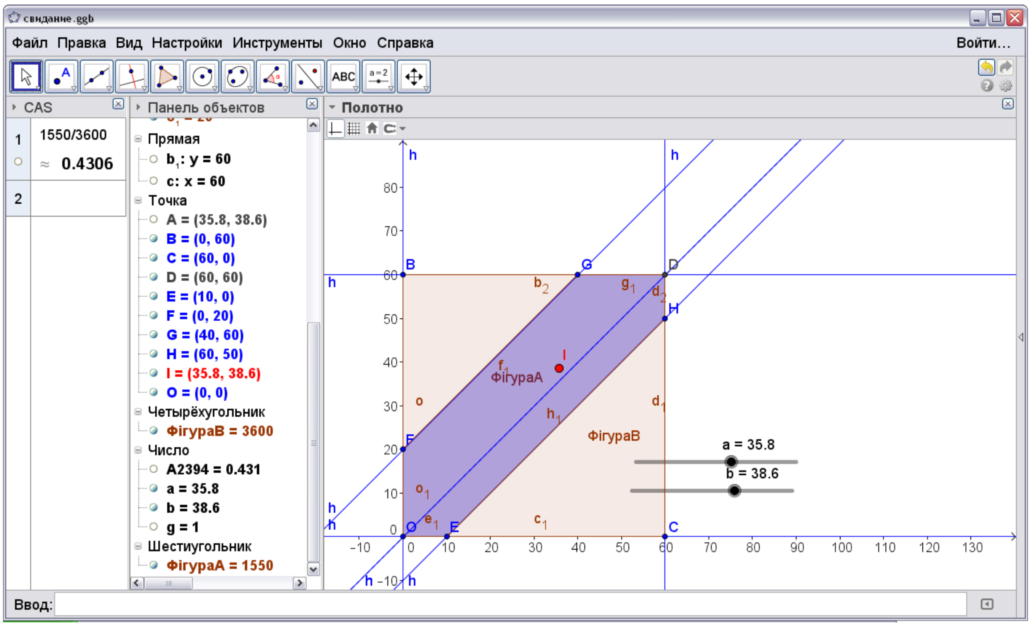


Рис. 3.3.8. Розв’язання задачі з використанням геометричного означення ймовірності події

Для закріплення ідеї візуалізації експериментальних випробувань у середовищі GeoGebra, наведемо умову наступної задачі та вказівки для самостійного розв’язування.

Приклад 5. У кулю радіуса 2 вписали куб. Яка ймовірність того, що точка, навмання обрана в кулі, потрапить до вписаного куба?

Вказівка. Побудуємо кулю з радіусом 2 та центром у початку координат. Для того, щоб точка потрапляла всередину кулі, потрібно скористатися сферичними координатами (r, θ, φ), причому виконувалися умови $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 180^\circ$, $0 \le \varphi \le 360^\circ$. Оскільки у середовищі GeoGebra можна побудувати точку лише за декартовими координатами через командний рядок, потрібно задати точку з координатами *(a, b, c)*, де $a = r\sin\theta\cos\varphi$, $b = r\sin\theta\sin\varphi$, $c = r\cos\theta$.

Наступним кроком впишемо в кулю куб. Ребро куба дорівнює $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Куб можна побудувати за двома його вершинами. Отже, побудуємо точки-вершини $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ та куб за цими двома вершинами.

Точка, навмання обрана в кулі, потрапить до вписаного куба, якщо виконуються наступні умови:

$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}<a<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\wedge\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}<b<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\wedge\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}<c<\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, які потрібно вказати під час задання функції *Если* (рис. 3.3.9.).

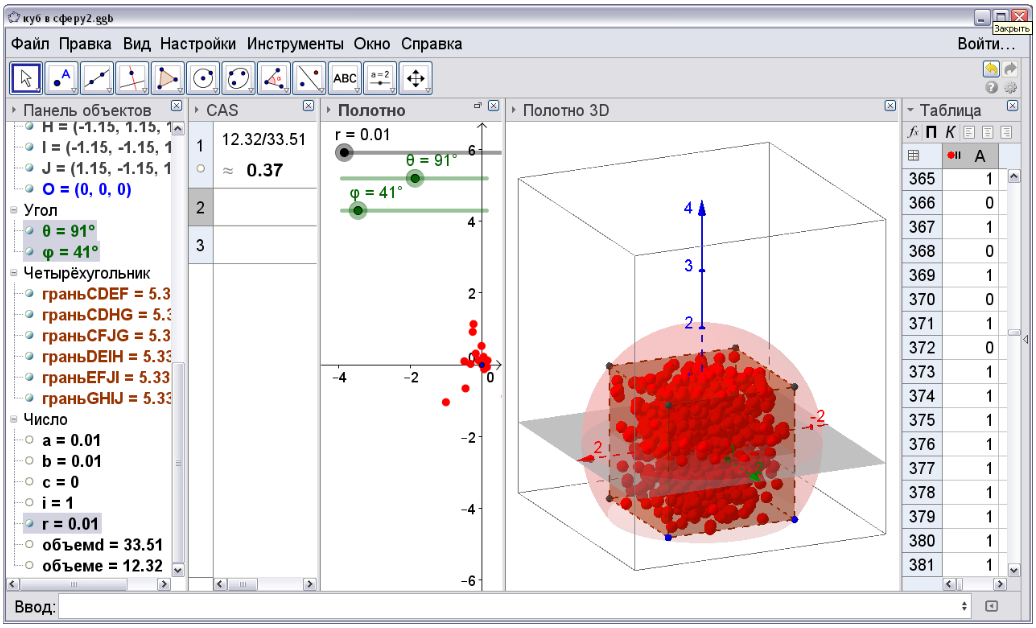


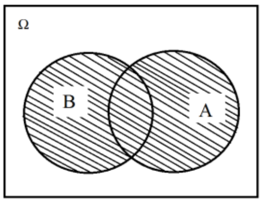
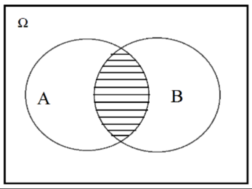
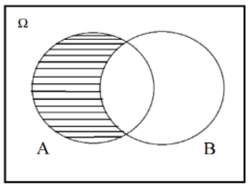
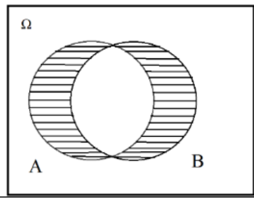
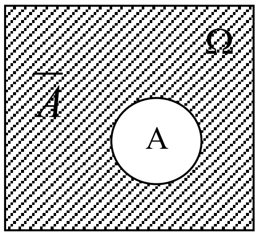
Рис. 3.3.9. Слід точки з координатами *(a;b;c)*

ОПОРНІ ФАКТИ

Простір елементарних подій

<table>
<tr><td colspan="2">Подія - це довільний результат будь-якого випробовування, який може наступити, або не наступити</td><td colspan="2" rowspan="2">Простір елементарних подій
певна множина Ω елементарних подій ω_i, кожна з яких може відбутися внаслідок проведення кожного експерименту з випадковими результатами</td></tr>
<tr><td colspan="2">Достовірна (Ω)
подія, яка обов’язково настає в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов</td></tr>
<tr><td colspan="2">Неможлива (∅)
подія, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи</td><td rowspan="2">Дискретний
кожній елементарній події ставиться у відповідність один і тільки один елемент нескінченної послідовності натуральних чисел</td><td rowspan="2">Неперервний
коли кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число</td></tr>
<tr><td colspan="2">Випадкова (A, B, C)
подія, якщо за певного комплексу умов у результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних дрібних факторів, урахувати які дослідник не в змозі</td></tr>
<tr><td>Проста (елементарна) випадкова подія
може відбутися внаслідок проведення одного і лише одного експерименту</td><td>Складена випадкова подія
якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події</td><td colspan="2">Елементарні події
сприяють появі кожної із елементарних випадкових подій ω_i, ω_j, ω_k, які належать відповідно складеним випадковим подіям A, B, C, тобто є елементами цих множин, унаслідок проведення експерименту</td></tr>
<tr><td colspan="4">Рівноможливі дві або декілька випадкових подій
якщо умови їх появи однакові і вони мають однакові шанси відбутися</td></tr>
</table>

Операції над подіями

Операції	Діаграми Ейлера
Сума (об'єднання) $A \cup B$ подій *A* та *B* є така подія *C,* яка полягає у настанні події *A,* або події *B,* або подій *A* та *B* одночасно.	
Добуток (перетин) $A \cap B$ подій *A* та *B* є така подія *C,* яка полягає в одночасному виконанні події *A* і події *B* відповідно.	
Різниця (доповнення) $A \setminus B$ подій *A* та *B* є подія *C,* яка полягає в тому, що подія *A* відбувається, а подія *B* – ні.	
Симетрична різниця $A \Delta B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ є така подія *C,* в яку входять ті елементарні події, які входять в *A* чи *B,* але не входять в їх перетин $A \cap B$.	
Протилежна $\overline{A}$ до події *A* є така подія, яка полягає в тому, що подія *A* не відбувається	
Події	
Несумісні $A \cap B = \varnothing$ - поява однієї події, виключає появу іншої	*Сумісні* $A \cap B \neq \varnothing$ - поява однієї події, не виключає появу іншої

Основні поняття комбінаторики

Множина **–** сукупність елементів довільної природи	
Впорядкована множина якщо кожному елементу цієї множини поставлено відповідно номер елемента від 1 до *n* так, що різним елементам відповідають різні числа	*Невпорядкована множина* якщо кожному елементу цієї множини не поставлено відповідно номер елемента від 1 до *n* так, що різним елементам не відповідають різні числа

Основні правила комбінаторики

Правило суми	*Правило добутку*
Якщо предмет A_1 може бути вибраним m_1 способами, предмет A_2 іншими m_2 способами,…, предмет A_r іншим m_r способами, то вибір одного з предметів або A_1, або A_2 …, або A_r може бути виконаним $\sum_{i=1}^{r} m_i$ способами.	Якщо предмет A_1 можна вибрати m_1 способами, предмет A_2 – m_2 способами,…, предмет A_r - m_r способами, причому вибір кожного з них не впливає на вибір іншого, то вибір впорядкованої системи предметів $(A_1, A_2,\dots, A_r)$ може бути виконаний $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$ способами

Основні елементи комбінаторики

Назва	Формули для обчислення
Перестановки із n елементів є такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення	$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \dots (n-1)\, n$
Розміщення із n елементів по $m(0\le m\le n)$ є такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом	$A_n^m = n\,(n-1)(n-2)\,\dots\,(n-m+1)$ або $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$
Комбінації з n елементів по $m(0\le m\le n)$ є невпорядковані множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом	$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)}$

Класичне, геометричне та статистичне означення ймовірності події

Означення	Формули для обчислення ймовірності події	Властивості ймовірності події
Класичне Імовірністю випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m $(0\le m\le n)$, які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω	$P(A) = \frac{m}{n}$	1. $0 \le P(A) \le 1$. 2. $A=B$, *то* $P(A) = P(B)$. 3. $P(\Omega) = 1$. 4. $P(\varnothing) = 0$. 5. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Означення	Формули для обчислення ймовірності події	Властивості ймовірності події
Геометричне Ймовірність випадкової події *A* дорівнює відношенню міри *A* до міри Ω	$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$	1. $A\subset\Omega$: $0\le P(A)\le 1$. 2. $P(\Omega)=1$. 3. $P(\varnothing)=0$. 4. Якщо *A* і *B* є несумісними, то $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. 5. $A,B\subset\Omega$: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
Статистичне Ймовірність – це відносна частота випадкової події *A* або число близьке до неї, тобто відношення кількості експериментів *m*, при яких подія *A* спостерігалася, до загальної кількості *n* проведених експериментів	$W(A)=\frac{m}{n}$	1. $0\le W(A)\le 1$. 2. $W(\Omega)=1$. 3. $W(\varnothing)=0$. 4. $W(\overline{A})=1-W(A)$. 5. Якщо *A* і *B* несумісні, то $W(AUB) = W(A)+W(B)$. 6. $W(AUB)=W(A) + W(B) - W(A\cap B)$. 7. Якщо $A\subseteq B$, то $W(A)\le W(B)$.

Відповідності основних понять теорії множин в теорії ймовірностей

Позначення	Термінологія в теорії множин	Термінологія в теорії ймовірностей
Ω	простір (основна множина)	простір елементарних подій, достовірна подія
ω, ω∈Ω	елемент простору *ω*	елементарна подія *ω*
A, A⊆Ω	множина *A*	подія *A*
A∪B, A+B	сума або об'єднання множин *A* і *B*	сума подій *A* і *B*
A⋂B, AB	перетин множин *A* і *B*	добуток подій *A* і *B*
A\B	різниця множин *A* і *B*	різниця подій *A* і *B*
∅	пуста множина	неможлива подія
Ā	доповнююча множина *A*	протилежна до *A* подія
AB=∅	*A* і *B* не перетинаються	*A* і *B* несумісні
A⊆B	*A* є підмножиною *B*	з *A* випливає *B*
A=B	*A* і *B* рівні	*A* і *B* рівнозначні

Основні поняття про незалежність подій

Повна група випадкових подій якщо при кожному повторенні випробування повинна відбутися хоча б одна з них	*Протилежні* дві рівноможливі події, що утворюють повну групу. Якщо одну з протилежних подій позначити через A, то другу подію позначають як $\bar{A}$.
Залежні дві випадкові події А та В якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи другої події	*Незалежні дві випадкові події А та В* якщо ймовірність появи однієї з них не впливає на ймовірність настання чи не настання іншої події
Умовна ймовірність якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася, обчислюється за формулою $\mathrm{P}(\mathrm{A} / \mathrm{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	*Зауваження:* 1. $P(A / B) = 0$, якщо $A \cap B = \varnothing$. 2. $P(A / B) = 1$, якщо $A \cap B = B$. 3. У решті випадків $0 < P(A / B) < 1$.

Основні теореми теорії ймовірностей та наслідки з них

Теореми	**Формули для обчислення ймовірностей подій**	**Наслідки теорем**
Теореми додавання ймовірностей несумісних подій **Теорема 1.** Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій	$P(A+B)=P(A)+P(B)$	$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$
Теорема 2. Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, дорівнює сумі ймовірностей цих подій	$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=$ $=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$	$P(A)+P(\bar{A})=1$

Теорема суми ймовірностей сумісних подій Ймовірність суми двох подій рівна сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку	*P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)*	
Теореми множення ймовірностей **Теорема 1.** Ймовірність одночасної появи двох незалежних випадкових подій *А* та *В* дорівнює добутку ймовірностей цих подій	$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_n) =$ $= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ...$ $\cdot P(A_n)$
Теорема 2. Ймовірність сумісної появи двох подій рівна добутку ймовірності однієї з них на умовну імовірність іншої події обчислену в припущенні, що перша подія вже відбулася	$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B / A) =$ $= P(B) \cdot P(A / B)$ *формула множення ймовірностей залежних випадкових подій*	$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)$ $P(A_2 / A_1)\ P(A_3 / A_1A_2) \ldots P(A_n / A_1A_2 \ldots A_{n-1})$
Теорема 3. Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних у сукупності подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ... \overline{A}_n$	$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ...$ $\cdot P(\overline{A}_n).$	$P(A) = 1 - q^n$

Формула повної ймовірності та Байєса

Назва	Формула для обчислення ймовірності
Формула повної ймовірності випадкової події	$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2) + ... + P(B_n) \cdot P(A / B_n) =$ $= \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P}(\mathrm{B}_i)\ \mathrm{P}(\mathrm{A} / \mathrm{B}_i)$
Формула Байєса	$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\ P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P(A / B_i)}$

Повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі

Формула Бернуллі	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$
Імовірність появи події *A* в *n* випробуваннях схеми Бернуллі менше *m* разів	$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1)$
Ймовірність появи події *A* не менше *m* разів	$P_n(k \geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k)$
Ймовірність появи події *A* хоча б один раз у *n* випробуваннях	$P_n(1 \leq m \leq n) = 1 - q^n$
Кількість *n* випробувань, які необхідно здійснити, щоб з імовірністю *P* можна було стверджувати, що подія *A* з’явиться хоча б один раз (ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює *p*)	$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$
Локальна теорема Муавра-Лапласа Якщо ймовірність *p* появи події *A* в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія *A* з’явиться в *n* випробуваннях рівно *m* разів, приблизно дорівнює значенню функції $P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m)$ де $x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *Функція Гауса* $\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$	**Інтегральна теорема Муавра-Лапласа** Якщо ймовірність *p* появи події *A* в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то ймовірність $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ того, що подія *A* з’явиться в *n* випробуваннях від m_1 до m_2 разів, приблизно рівна визначеному інтегралу $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$. *Функція Лапласа* $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$
Теорема Пуассона Якщо ймовірність *p* появи події *A* в кожному випробуванні при необмеженому збільшенні числа випробувань *n* змінюється таким чином, що при $np=\lambda$, $\lambda=\text{const}$, то ймовірність того, що деяка подія *A* з’явиться *m* разів в *n* випробуваннях обчислюється за формулою $P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	**Найімовірніше число появ випадкової події** $np - q \leq m_0 \leq np + p$ або $(n+1)p - 1 \leq m_0 \leq (n+1)p$ - якщо $np - q$ - неціле, то є одне значення m_0, - якщо $np - q$ - ціле, то таких значень є два: $m_1 = (n+1)p - 1$ та $m_2 = (n+1)p$

Дискретна випадкова величина

<table>
<tr><th>Способи задання закону розподілу</th><th>Числові характеристики</th></tr>
<tr><td>

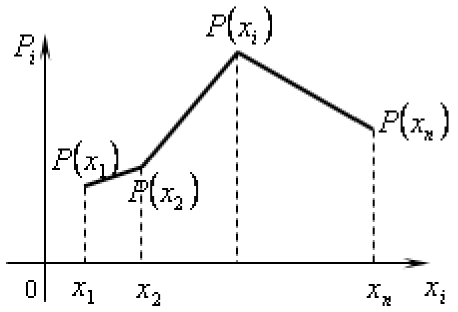
1. *Табличний:*

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

2. *Аналітичний:*

$P(X = x_i) = \varphi(x_i).$

3. *Графічний:*



</td><td>

Математичне очікування:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Дисперсія:

1. $D(X) = M(X - M(X))^2$.
2. $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

   де $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$.

3. $D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

</td></tr>
</table>

Неперервна випадкова величина

<table>
<tr><th>Способи задання:</th><th>Числові характеристики:</th></tr>
<tr><td>

Інтегральною функцією розподілу ймовірностей (функцією розподілу ймовірностей) називається функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше від x, тобто, $F(x) = p(X < x)$.

Щільність (густина) розподілу ймовірностей (диференціальна функція розподілу) – функція, яка позначається $f(x)$ і визначається рівністю:

$$f(x) = F'(x).$$

</td><td>

Математичне очікування:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Дисперсія:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

</td></tr>
</table>

Основні закони розподілу ДВВ

Назва закону	Формула для обчислення ймовірностей	Математичне очікування і дисперсія
Біноміальний	$p(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.	$M(X) = np$, $D(X) = npq.$
Пуассонівський	$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}.$	$M(X) = D(X) = np.$
Геометричний	$P(X = m) = pq^{m-1}.$	$M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Гіпергеометричний	$p(X = m) = \frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}.$	$M(X) = \frac{kn}{N}, D(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$

Основні закони розподілу НВВ

Назва розподілу	Щільність розподілу ймовірностей	Числові характеристики
Рівномірний	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\notin[a,b],\\ 0, x\notin[a,b].\end{cases}$	$M(X)=\dfrac{a+b}{2}; D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}.$
Показниковий	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0,\\ 0, x<0.\end{cases}$	$M(X)=\dfrac{1}{\lambda}; D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}.$
Нормальний	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$	$a\epsilon(-\infty;+\infty), \sigma>0-$ параметри розподілу.

Граничні теореми теорії ймовірностей

Закон великих чисел	Центральна гранична теорема теорії ймовірності
Теорема Чебишова Нехай випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно незалежні, мають скінченні математичні очікування $M(X_i)=a_i$ та обмежені в сукупності дисперсії $D(X_i)\leq\sigma_i^2\leq\sigma^2, i=1,.2,...$. Позначимо $\overline{X}_n=\dfrac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$, $\overline{a}_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, $n=1,2,...$. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$: $\lim_{n\to\infty} p(\lvert\overline{X}_n-\overline{a}_n\rvert<\varepsilon)=1.$ **Теорема Бернуллі** Нехай m – число появи події A в n незалежних випробуваннях Бернуллі, $W_n(A)=\dfrac{m}{n}$ – відносна частота цієї події, $p(A)=p-$ ймовірність появи події A в одному випробуванні. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$: $\lim\limits_{n\to\infty} p(\lvert W_n(A)-p\rvert<\varepsilon)=1$.	**Теорема Ляпунова** Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними математичними очікування $a_i=M(X_i)$ і дисперсіями $\sigma_i^2=D(X_i), i=1,2,...$. Введемо нові випадкові величини $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, для яких $M(Y_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, $D(Y_n)=\sigma^2(Y_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2$. Тоді, якщо виконана умова $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2)^{\frac{3}{2}}}=0$, де $b_i=M\lvert X_i-a_i\rvert^3$, то для будь-якого числа x виконується така гранична рівність: $\lim\limits_{n\to\infty} p(\dfrac{Y_n-M(Y_n)}{\sigma(Y_n)}<x)==\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0{,}5+\Phi(x).$

Глосарій

Біноміальним називається закон розподілу ДВВ, яка приймає значення з ймовірностями, що обчислюються за схемою Бернуллі.

Біномними коефіцієнтами називають числа виду C_n^k.

Випадковою величиною називають таку змінну величину, яка внаслідок випробування може приймати тих чи інших значень з певними ймовірностями.

Випадковою називається подія, якщо за певного комплексу умов у результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних дрібних факторів, урахувати які дослідник не в змозі. Випадкові події позначають символами *A, B, C*, … або $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k; B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Відносною частотою випадкової події A називають відношення кількості експериментів m, при яких подія A спостерігалася, до загальної кількості n проведених експериментів: $W(A) = \frac{m}{n}$.

Достовірною називається певна подія, яка обов'язково настає в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов. Достовірна подія позначається символом Ω («омега»).

Впорядкованою називається множина, якщо кожному елементу цієї множини поставлено відповідно номер елемента від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа. В протилежному випадку множина називається **невпорядкованою.**

Геометричний закон розподілу ймовірності - це закон у якому ймовірності можливих значень випадкової величини визначається за формулою

$$P(X = m) = pq^{m-1}, m = 1,2,3,\ldots.$$

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність появи m елементів з певною властивістю серед n елементів, взятих із сукупності N елементів, яка містить саме k елементів такої властивості.

Граничні теореми теорії ймовірностей - група теорем, що встановлює відповідність між теоретичними і експериментальними характеристиками випадкових величин і випадкових подій при великому числі випробувань над ними, а також зв'язаних з ними граничних законів розподілу.

Дискретним називають простір елементарних подій, якщо множина є зчисленною (зліченною), тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати (кожній елементарній події поставити у відповідність один і тільки один елемент нескінченної послідовності натуральних чисел 1, 2, 3, …).

Дискретною (перервною) випадковою величиною називають таку ВВ, множина значень якої або скінченна, або злічена.

Дисперсією ДВВ називають математичне очікування квадрата відхилення дискретної випадкової величини від її математичного очікування.

Дисперсією НВВ *X* називається число $D(X) = M(X - M(X))^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$, за умови, що невласний інтеграл збіжний.

Діаграми Ейлера – це плоскі фігури (круги, прямокутники, еліпси тощо), які застосовуються для геометричної ілюстрації операцій над подіями.

Добутком подій *A* та *B* називається така подія *C*, яка полягає в одночасному виконанні події *A* і події *B* відповідно.

Добуток (переріз) $A \cap B$ множин *A* і *B* є множина тих, і тільки тих елементів, які належать *A* і *B*.

Добуток подій A_1, A_2,...A_n полягає в одночасному настанні всіх *n* подій і записується так: $C = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ або $C = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$..

Доповнення $\overline{A}$ до множини *A* є множина тих, і тільки тих елементів множини Ω, які не належать *A* ($\overline{A}$ =Ω/A).

Експериментом (випробуванням, спостереженням) називають послідовність операцій, виконуваних з додержанням певного комплексу умов.

Елементарними подіями, які сприяють появі кожної із зазначених подій внаслідок проведення експерименту (ω_i сприяють появі події *A*, ω_j - події *B*, ω_k - події *C*) називають елементарні випадкові події $\omega_i \in A$, $\omega_j \in B$, $\omega_k \in C$, які належать відповідно складеним випадковим подіям *A*, *B*, *C*, тобто є елементами цих множин.

Закон великих чисел об’єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних невипадкових, сталих величин.

Законом розподілу ДВВ називають відповідність між можливими значеннями цієї величини та їх ймовірностями.

Залежними називають випадкові події *А* та *В*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або не появи другої події.

Ймовірністю здійснення події *A* називається один і той самий ліміт (границя), який має відносна частота здійснення події *A* у будь-якій нескінченній серії випробувань.

Ймовірність випадкової події *A* дорівнює відношенню міри *A* до міри Ω: $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

Ймовірністю випадкової події *A* називається невід’ємне число *P(A)*, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \le m \le n$), які сприяють появі *A*, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Імовірністю події називають таке певне число *p*, пов’язане з кожною подією для порівняння випадкових подій за степенем їх можливості, яке повинно бути тим більше, чим більш можлива подія.

Імовірність події є численна міра степеню об’єктивної можливості цієї події.

Інтегральною функцією розподілу ймовірностей (функцією розподілу ймовірностей) називається функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення *x* ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше від *x*.

Комбінаторика – це розділ математики, що вивчає способи підрахунку числа можливих вибірок із деякої скінченої множини згідно із заданими правилами вибору.

Комбінаціями з *n* елементів по $m(0 \le m \le n)$ називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом. Кількість таких множин $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)}$.

Математичне очікування НВВ X, яка має щільність ймовірностей $f(x)$, визначається формулою: $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$, за умови, що такий невласний інтеграл збіжний.

Математичним очікуванням ДВВ X називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм ймовірності.

Найімовірнішим числом появи події *A* називається число m_0, при якому при заданому n відповідає максимальна біномна ймовірність $P_n(m_0)$.

Незалежними називаються такі дві події, якщо ймовірність появи однієї з них не впливає на ймовірність настання чи не настання іншої події.

Незалежними називають послідовні випробування, в кожному з яких ймовірність події A не залежить від результату інших випробувань, що проводяться при однакових умовах і при кожному з яких може відбутися або певна подія A, або $\overline{A}$.

Неможливою називається подія, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом $\varnothing$ (порожня множина).

Неперервним називають простір елементарних подій, якщо кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число.

Неперервною випадковою величиною називають ВВ, значення якої суцільно заповнюють деякий числовий проміжок.

Несумісними називають такі випадкові події A і B, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Нормально розподіленою називається неперервна випадкова величина X, щільність розподілу ймовірностей якої має вигляд: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Операцією впорядкування *n*-елементної множини називають операцію присвоєння кожному елементу одного із *n* різних номерів, наприклад, із сукупності {1,2,…,n}.

Перестановкою із *n* елементів називають такі впорядковані множини з *n* елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення. Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 ... (n-1)\, n$, де *n* набуває лише цілих невід'ємних значень.

Повну групу утворюють випадкові події, якщо при кожному повторенні випробування повинна відбутися хоча б одна з них.

Повну групу утворюють такі випадкові події, якщо $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ldots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, тобто внаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.

Подією в теорії ймовірності називають довільний наслідок або результат будь-якого випробування, спостереження, стохастичного експерименту (який можна повторити будь-яку кількість раз), який може наступити (відбутись, здійснюватися), або не наступити, тобто результат випробування не можна напевне передбачити.

Порожньою Ø називається множина, яка не містить жодного елемента.

Правило добутку. Якщо предмет *A* може бути вибраним *m* способами і після кожного такого вибору предмет *B* може бути вибраним *n* способами (незалежно від того, який предмет *A* обрано), то сумісний вибір *A* і *B*, тобто впорядкована пара (*A*,*B*) може бути виконано $n\cdot m$ способами.

Правило суми. Якщо предмет *A* може бути вибраним *m* способами, а предмет *B* іншими *n* способами (тобто ці вибори взаємовиключні), та вибір одного з предметів або *A*, або *B* може бути виконаним $m+n$ способами.

Простором елементарних подій називається певна множина Ω елементарних подій ω_i, кожна з яких може відбутися (настати) внаслідок його проведення: $\omega_i \in \Omega$, яка відповідає кожному експерименту (спробі) з випадковими результатами (наслідками).

Простою (елементарною) випадковою подією називається подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту). Елементарні події позначаються ω_i (i = 1, 2, 3).

Протилежними називають дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу.

Протилежними називають дві рівноможливі події, що утворюють повну групу. Якщо одну з протилежних подій позначити через A, то другу подію позначають як $\bar{A}$.

Протилежною подією до події *A* називається така подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що подія A не відбувається.

Пуассонівський закон – це закон розподілу випадкової величини, заданий таблицею, у якій ймовірності обчислюються за формулою Пуассона.

Рівними (*A*=*B*) називаються множини A і B, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Рівномірно розподіленою на відрізку $[a;b]$ називається неперервна випадкова величина, усі можливі значення якої належать цьому відрізку, і її щільність розподілу ймовірностей на цьому відрізку стала.

Рівноможливими називаються дві або декілька випадкових подій, якщо умови їх появи однакові і вони мають однакові шанси відбутися.

Різницею подій *A* і *B* називається подія C, яка полягає в тому, що подія A відбувається, а подія B – ні.

Різниця *A\B* множин A і B є множина тих, і тільки тих елементів, які належать A і не належать B.

Розміщенням із *n* елементів по *m* $(0 \le m \le n)$ називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом. Кількість таких множин обчислюється за формулою $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-m+1)$.

Середнім квадратичним відхиленням ВВ називають арифметичний квадратний корінь з дисперсії.

Симетрична різниця *A* Δ *B* множин A і B є множина $(A/B) \cup (B/A)$.

Симетрична різниця $C=A\Delta B$ є такою подією, в яку входять ті елементарні події, які входять в A чи B, але не входять в їх перетин $A\cap B$: $C=A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

Складеною називається випадкова подія, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події. Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами: $A, B, C, D, \ldots$.

Статистична ймовірність – це відносна частота або число близьке до неї.

Сума (об'єднання) $A\cup B$ множин A і B є множина тих, і тільки тих елементів, які належать принаймні одній з множин A і B.

Сумісними називають випадкові події A і B, якщо $A\cap B\neq\varnothing$.

Сумою або об'єднанням будь-якого числа подій $A_1, A_2,\ldots A_n$ називається подія C, яка полягає в настанні хоч би однієї з цих подій і записується так: $C=\sum_{i=1}^{n}A_i$ або $C=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$.

Сумою або об'єднанням подій A та B називається така подія C, яка полягає у настанні події A, або події B, або подій A та B одночасно.

Схемою Бернуллі (найпростішою схемою незалежних випробувань) називаються такі незалежні випробування, якщо в кожному з них ймовірність настання події A одна й та сама і дорівнює $p(0<p<1)$, тобто $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q=1-p$ і не залежить від номера випробування.

Теорія ймовірностей – це математична наука про оцінювання, співставлення масових випадкових подій та про закономірності в множинах таких подій.

Узагальнене правило добутку. Якщо предмет A_1 можна вибрати m_1 способами, предмет A_2 – m_2 способами,…, предмет A_r - m_r способами, причому вибір кожного з них не впливає на вибір іншого, то вибір впорядкованої системи предметів ($A_1, A_2,\ldots, A_r$) може бути виконаний $m_1 m_2\ldots m_r$ способами.

Узагальнене правило суми. Якщо предмет A_1 може бути вибраним m_1 способами, предмет A_2 іншими m_2 способами,…, предмет A_r іншим m_r

способами, то вибір одного з предметів або A_1, або A_2, …, або A_r може бути виконаним $\sum_{i=1}^{r} m_i$ способами.

Умовною називається ймовірність, якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася.

Числовими характеристиками ВВ називають числа, які описують випадкову величину.

Щільністю (густиною) розподілу ймовірностей називається функція, яка визначається рівністю $f(x) = F'(x)$.

Список рекомендованої літератури

1. Бобик О. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник / О. І. Бобик, Г. І. Берегова, Б. І. Копитко. – К. : Професіонал, 2007. – 560 с.
2. Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика / Я. С. Бродский. – М. : Оникс, Мир и Образование, 2008. – 544 с. : ил. –
3. Булига К. Б. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / К. Б. Булига. – К : Європейський ун-т, 2000. – 173 с.
4. Булига К. Б. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / К. Б. Булига. – К. : Європейський ун-т, 2001. – 173 с.
5. Венецкий И. Г. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / И. Г. Венецкий, Г. С. Кильдишев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Статистика, 1975. – 264 с.
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учебник / Е. С. Вентцель. – 4-е изд., стер. – М. : Наука, 1969. – 576 с.
7. Гихман И. И. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1979. – 408 с.
8. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 2-е изд., доп. – М. : Высшая школа, 1975. – 333 с.
9. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 5-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2001. – 400 с.
10. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. – М. : Высшее образование, 2007. – 404 с.
11. Гмурман В. Е. Теория вероятностй и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 4-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
12. Гнєденко Б.В. О работах М.В. Остроградского по теории вероятностей // Историко-матемаитические исследования. – 1951. - № 14. – С.120.
13. Грищенко В. О. Теорія ймовірностей і математична статистика для економістів : навч. посібник / В. О. Грищенко, А. І. Юхименко. – К. : КНТЕУ, 2000. – 170 с.
14. Грищенко В. О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Практикум : навч. посібник / В. О. Грищенко. – К. : КНТЕУ, 2002. – 164 с.
15. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики : учеб. пособие / Е. И. Гурский. – М. : Высшая школа, 1971. – 328 с. : ил.

16. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статитика : навч. посібник. У 2-х ч. Ч.2. Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2001. – 336 с.
17. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : Збірник задач. Навч. посібник. У 2-х ч. Ч.1. Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – К. : КНЕУ, 2000. – 304 с.
18. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв’язування задач : навч. посібник / Г. І. Кармелюк. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.
19. Карташова С. С. Теорія ймовірностей та математична статистика. Практикум : навч. посібник / С. С. Карташова, В. В. Рязанцева. – К. : КНТЕУ, 2011. – 240 с.
20. Копич І. М. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики : Теорія та практикум / І. М. Копич, В. М. Сороківський. – Львів : ЛКА, 2001. – 336с .
21. Крестова А. П. Теория вероятностей и математическая статистика. Ответы на экзаменационные вопросы : учеб. пособие / А. П. Крестова. – М. : Экзамен, 2008. – 190 с. – (Студенту на экзамен).
22. Руденко В.М. Математична статистика : навч. посібник / В. М. Руденко. – К. : Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.
23. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / П. С. Сеньо. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.
24. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник тестових завдань / уклад. О. А. Антонюк. – К. : КНТЕУ, 2008. – 53 с.
25. Черняк І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика : Збірник задач. Навч. посібник / І. О. Черняк, А. В. Ставицький. – К. : Знання, 2001. – 199 с.
26. Чжун К. Л. Элементарный курс теории вероятностей = Kai Lai Chung, Farid AitSahlia; Elementary probabilaty theory. With stochastic proctsses and an introduction to mathematical finance : Стохастические процессы и финансовая математика / К. Л. Чжун, Ф. АитСахлиа ; Пер с англ. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 455 с. : ил.
27. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей : Учебник / В. П. Чистяков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М : Наука, 1982. – 251 с.
28. Яковлев В. П. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. П. Яковлев. – М. : Дашков и К, 2008. – 184 с.

Додаток А

Значення функції $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	**0,3989**	**3989**	**3989**	**3988**	**3986**	**3984**	**3982**	**3980**	**3977**	**3973**
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2878	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	**0,2420**	**2396**	**2371**	**2347**	**2323**	**2299**	**2275**	**2251**	**2227**	**2203**
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	11,27
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0790	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0854
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	**0,0540**	**0529**	**0519**	**0508**	**0498**	**0488**	**0478**	**0468**	**0459**	**0449**
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	**0,0044**	**0043**	**0042**	**0040**	**0039**	**0038**	**0037**	**0036**	**0035**	**0034**
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0555	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток В

Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{X} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	***Ф(x)***	***x***	***Ф(x)***	***x***	***Ф(x)***	***x***	***Ф(x)***	***x***	***Ф(x)***	***x***	***Ф(x)***
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162	1,83	0,4664	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236	1,88	0,4699	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319	1,94	0,4738	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429	2,06	0,4803	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441	2,08	0,4812	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452	2,10	0,4821	3,00	0,49865
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463	2,12	0,4830	3,20	0,49931
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838	3,40	0,49966
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846	3,60	0,499841
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854	3,80	0,499928
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505	2,20	0,4861	4,00	0,499968
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515	2,22	0,4868	4,50	0,499997
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4528	2,24	0,4875	5,00	0,499997
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881		
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887		
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893		
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4898		
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904		
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909		
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591	2,38	0,4913		
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918		
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922		
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927		
0,43	0,1666	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4627	2,46	0,4931		
0,44	0,1700	0,89	0,3135	1,34	0,4099	1,79	0,4638	2,48	0,4934		

Додаток С

Розподіл Пуассона $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	***λ***				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0.5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,90048	0,16375	0,22223	0,266813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01204
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001
k	***λ***				
	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112	
5	0,00036	0,0007	0,00123	0,00200	
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	
7		0,00001	0,00002	0,00004	
k	***λ***				
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13634	0,04979	0,00674	
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16880	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА: ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Редактор: Фатєєва Т. Д.
Комп'ютерна верстка: Тертична Я. М.

Підп. до друку 29.10.2018 р. Формат 60х84/16. Папір офсетний
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 12,09.
Обл.-вид. арк.6,52 Тираж 300. Зам. № 477

Видавничо-редакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ
21000, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 25