МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Ф. Е. ГЕЧЕ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Ужгород

2019

УДК 519.21 (075.8)

ББК 22.17

Г - 45

Рецензенти:

В. В. Маринець, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики;

П. В. Слюсарчук, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу.

Шече Ф. Е.

Г - 45 Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібн. / Ф. Е. Гече. – Ужгород : ПП «АУТДОР-ШАРК», 2019. – 235 с.

Навчальний посібник містить 8 розділів, з яких сім присвячено теорії ймовірностей, а останній – математичній статистиці. Книжка розрахована на студентів нематематичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю прикладів і задач. У кінці кожного розділу наведено питання для самоконтролю і комплекс завдань.

Навчальний посібник призначається для студентів вищих навчальних закладів, аспірантів та викладачів, які організовують навчальний процес за кредитно-модульною системою.

Рекомендовано до друку Вченою радою Ужгородського національного університету як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (протокол № 10 від 30.10.2018)

ISBN 978-617-7132-93-5

ББК 22.17

ВСТУП

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає закономірності масових випадкових явищ. Під **масовими випадковими явищами** розуміють явища з невизначеними результатами, які відбуваються при багаторазовому відтворенні одного й того самого випробування (спроби, експерименту). Наприклад, не можна передбачити при підкиданні монети, яким боком вона впаде, при підкиданні грального кубика, яке число випаде на його верхній грані, якщо грані пронумеровані числами 1,2,3,4,5,6, результати зважувань одного й того ж тіла і т. д. Неоднозначність результату в наведених прикладах пояснюється тим, що при збереженні основних умов випробування не враховується зв'язок з багатьма другорядними факторами, які змінюються від спроби до спроби й вносять елементи невизначеності до їхніх результатів.

Теорія ймовірностей започаткована у XVII столітті в працях П. Ферма (1601 – 1665), Б. Паскаля (1623 – 1662), Х. Гюйгенса (1629 – 1695), Я. Бернуллі (1654 – 1705), П. Лапласа (1749 – 1827) та К. Гаусса (1777 – 1855). Вона розвивалася спочатку як прикладна наука. Полем її застосування були в той час азартні ігри, страхування та демографія.

Подальший розвиток теорії ймовірностей показав її тісний зв’язок з фундаментальними і прикладними задачами, а саме: теорії похибок спостережень, теорії стрільби, загальної теорії зв’язку, теорії надійності, теорії масового обслуговування, статистики, автоматичного керування тощо.

Значний внесок у розвиток теорії ймовірностей зробили П. Л. Чебишев (1821 – 1894), А. А. Марков (1856 – 1922), А. М. Ляпунов (1857 – 1918), А. М. Колмогоров (1903 – 1987), О. Я. Хінчин (1894 – 1959), Б. В. Гнеденко (1912 – 1995), В. С. Королюк (1925), В. С. Михалевич (1930 – 1994), А. В. Скороход (1930 – 2011), М. Й. Ядренко (1932 – 2004) та інші.

Нині основні методи теорії ймовірностей широко використовують при розв'язуванні різних фундаментальних і прикладних задач, коли необхідно врахувати дію випадкових факторів. Вони служать надійною теоретичною базою для математичної статистики.

Математична статистика – це розділ математики, який безпосередньо пов'язаний з теорією ймовірностей, у якому вивчаються методи обробки й аналізу експериментальних даних, отриманих у результаті спостережень над масовими випадковими явищами.

Методи математичної статистики можна поділити на два класи. До першого класу, як правило, відносять описові (дескриптивні) методи, які дають змогу описати реальні спостереження за допомогою таблиць, графіків, характеристик розсіювання тощо. До другого класу – аналітичні методи, які надають можливість на підставі вибіркових спостережень зробити статистично значущі висновки про наявність закономірностей для всієї сукупності.

Математична статистика дає математично обґрунтований апарат для розв'язку задач керування й прогнозування за відсутності явних закономірностей (в умовах невизначеностей) у досліджуваних процесах.

Розділ 1. Випадкові події та їх ймовірності

1.1. Основні поняття та визначення теорії ймовірностей

На практиці часто мають місце такі ситуації, коли результат випробування (експерименту) неможливо передбачити. Наприклад, якщо підкинути монету, то вона має впасти або „цифрою”, або „гербом” догори, якщо підкинути гральний кубик, грані якого пронумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, то неможливо наперед передбачити, яке число буде на верхній грані кубика. Аналогічно, неможливо передбачити, чи не перегорить куплена нами електрична лампа після ста годин роботи, яке число буде виграшним на лотерейному білеті тощо. У всіх цих випадках результат експерименту залежить від багатьох факторів, певних обставин.

Подія називається **випадковою** відносно деякого випробування (експерименту), якщо при здійсненні цього експерименту вона може настати, а може і не настати.

Прикладом випадкової події може бути поява „герба” при підкиданні монети, виграш по даному лотерейному білету, збіг дати народження у двох навмання вибраних людей з певного міста.

Випадкові події позначаються великими буквами латинського алфавіту.

Наприклад : A – попадання у ціль, B – поява „герба”, C – поява бракованого виробу.

Серед випадкових подій розрізняють такі: вірогідні, неможливі, сумісні, несумісні, протилежні і рівні (рівноможливі).

Подія називається **вірогідною** у даному експерименті, якщо вона обов’язково настане в результаті його проведення.Наприклад, якщо в урні лише червоні кульки, то подія „з урни взяли кульку червоного кольору” – вірогідна.

Подія називається **неможливою** у даному експерименті, якщо вона не може настати при його здійсненні.Так, якщо в урні є лише зелені кульки, то подія „з урни взяли червону кульку” є неможливою.

Дві випадкові події називаються **сумісними** в даному експерименті, якщо настання однієї з них не виключає настання іншої в цьому ж експерименті.

Так, при підкиданні грального кубика, грані якого пронумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, випадкові події A (на верхній грані кубика випало парне число) та випадкова подія B (на верхній грані кубика випало число, більше 3) є сумісними.

Дві випадкові події називаються **несумісними** в даному експерименті, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в цьому ж експерименті.

Так, при підкиданні грального кубика, грані якого пронумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, випадкова подія A (на верхній грані кубика випало парне число) та випадкова подія B (на верхній грані кубика випало непарне число) – несумісні.

Дві випадкові події називаються **протилежними** в даному експерименті, якщо настання однієї з цих подій означає ненастання іншої в цьому ж експерименті. Наведемо приклади протилежних подій: попадання та промах при стрільбі, „герб” та „цифра” при підкиданні монети, чорна та біла кулька при виборі однієї кульки серед двох таких кульок.

Дві випадкові події A і B називаються **еквівалентними** у даному експерименті, якщо кожного разу, коли настає одна з них, настане й інша.

Наприклад, такі випадкові події : не всі студенти даного курсу успішно склали іспит з теорії ймовірностей і хоча б один студент даного курсу отримав незадовільну оцінку на іспиті з теорії ймовірностей.

Слід зазначити, що в теорії ймовірностей розглядаються тільки масові випробування (експерименти), тобто такі випробування, які можуть бути проведені безліч разів (в таких самих умовах). Отже, теорія ймовірностей вивчає закономірності масових випадкових подій.

1.2. Операції над випадковими подіями

Над випадковими подіями A і B, які пов'язані з одним експериментом, визначені операції: додавання, віднімання, множення і заперечення (протилежна подія).

Додавання. Сумою двох випадкових подій A та B називається така випадкова подія $C = A + B$ $(C = A \cup B)$, яка внаслідок експерименту має місце з настанням принаймні однієї з подій : A або B.

Якщо настання події позначимо знаком „$+$", а ненастання – знаком „$-$", то сума двох подій визначається такою таблицею:

Таблиця 1.1. Додавання двох випадкових подій

A	B	$A + B$
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$+$
$-$	$-$	$-$

Аналогічно визначається сума трьох випадкових подій, чотирьох і т. д.

Віднімання. Різницею двох випадкових подій A і B називається випадкова подія $C = A - B$ $(C = A \setminus B)$, яка внаслідок експерименту має місце з настанням події A і одночасним ненастанням події B (табл. 1.2).

Таблиця 1.2. Віднімання двох випадкових подій

A	B	$A - B$
$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$

Множення. Добутком двох випадкових подій A і B називається випадкова подія $C = AB$ $(C = A \cap B)$, яка внаслідок експерименту має місце з одночасним настанням подій A та B (табл. 1.3).

Таблиця 1.3. Добуток двох випадкових подій

A	B	AB
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$

Протилежна подія (заперечення). Протилежною подією випадкової події A називається випадкова подія $\overline{A}$, яка внаслідок експерименту має місце з ненастанням події A і навпаки (табл. 1.4).

Таблиця 1.4. Протилежна випадкова подія

A	$\overline{A}$
$+$	$-$
$-$	$+$

Якщо через Ω і $\emptyset$ відповідно позначити вірогідну і неможливу події відносно деякого експерименту, то основні властивості вищенаведених операцій можуть бути записані так:

I. **Комутативний закон**:

1. $A + B = B + A$
2. $AB = BA$

II. **Асоціативний закон**:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A(BC) = (AB)C$

III. **Дистрибутивний закон**:

1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $A + (BC) = (A + B)(A + C)$

IV. **Властивості $\emptyset$ і Ω:**

1. $A + \emptyset = A$
2. $A\emptyset = \emptyset$
3. $\overline{\emptyset} = \Omega$
4. $\mathrm{A} + \Omega = \Omega$
5. $\mathrm{A}\Omega = A$
6. $\overline{\Omega} = \emptyset$
7. $A + \overline{A} = \Omega$
8. $A\overline{A} = \emptyset$

V. **Закон іденпотентності:**

1. $A + A = A$
2. $AA = A$

VI. **Закон поглинання:**

1. $A + AB = A$
2. $A(A + B) = A$

VII. **Формули де Моргана:**

1. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$
2. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

VIII. **Властивості доповнення, різниці і рівності:**

1. $\overline{A} = \Omega \setminus A$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $\mathrm{A} \setminus B = A\overline{B}$
4. $(A = B) \Leftrightarrow (A\overline{B} + \overline{A}B = \emptyset)$, де символ „$\Leftrightarrow$” – знак еквівалентності.

Якщо розглядати декілька випадкових подій A, B, C, D відносно деякого експерименту і застосовувати до них у будь-якому порядку операції додавання, множення, віднімання, а також використати перехід до протилежних випадкових подій, то можна скласти різні комбінації випадкових подій, наприклад: $AC + \overline{B}$, $\left(A\overline{C} + \overline{B}\right)D$, і різні формули: $\overline{(A + B)C} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}$, $\overline{AC + B} =$

$= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{B}$ у множині випадкових подій.

Для встановлення випадків настання чи ненастання комбінації випадкових подій можна застосовувати табл. 1.1 – табл. 1.4. Наприклад, знайти настання і ненастання комбінації $AB + \overline{C}$, де A, B і C – випадкові події відносно деякого експерименту (табл.1.5).

Таблиця 1.5. Настання і ненастання випадкової події $AB + \overline{C}$

A	B	C	$\overline{C}$	$AB + \overline{C}$
$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

За допомогою табл. 1.1 – 1.4 можна перевірити рівність випадкових подій. Для цього будують таблицю всіх випадків настання (ненастання) однієї випадкової події, а потім таку ж таблицю для іншої випадкової події і якщо настання і ненастання цих випадкових подій збігаються, то вони рівні. Покажемо цей підхід на прикладі першої формули де Моргана: $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Таблиця 1.6. Настання і ненастання $\overline{A + B}$

A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$
$+$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$
$-$	$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$	$+$

Таблиця 1.7.Настання і ненастання $\overline{A}\,\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
+	+	−	−	−
+	−	−	+	−
−	+	+	−	−
−	−	+	+	+

Як бачимо з табл. 1.6 та табл. 1.7, варіанти настання і ненастання випадкових подій збігаються, тому вони рівні.

Для доведення рівностей (еквівалентностей) двох випадкових подій можна використовувати основні властивості операцій над випадковими подіями. Наприклад: довести, що

$$(A+B)\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)=\emptyset.$$

Користуючись основними властивостями операцій над випадковими подіями, отримуємо:

$$(A+B)\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)=\left(A+B\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\overline{B}\right)=$$

$$=B\overline{B}+A\overline{A}=\emptyset.$$

Розглянемо ще приклади на комбінації випадкових подій.

Приклад 1.1. Придбано три лотерейні білети. Подія A_1 означає виграш за першим білетом, A_2 – виграш за другим, A_3 – за третім. За допомогою цих подій утворюємо нову подію A:

$$A=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3.$$

Згідно з операціями додавання і множення, подія A настане, якщо: виграшними є 1-й і 2-й білети, або виграшними є 1-й і 3-й, або виграшними є 2-й і 3-й. Іншими словами, випадкова подія A означає виграш не менше ніж за двома білетами.

Очевидно, що випадкова подія

$$B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$$

означає виграш по двом білетам.

Приклад 1.2. Електричний ланцюг між двома точками M і N складено за схемою, яку наведено на рис. 1.1. Розрив ланцюга (подія D) може відбутися внаслідок виходу з ладу елементів a_1, a_2

– відповідні події A_1, A_2, елемента c – подія C та елементів b_1, b_2 – відповідні події B_1, B_2. Записати відповідні вирази для подій D і $\overline{D}$.

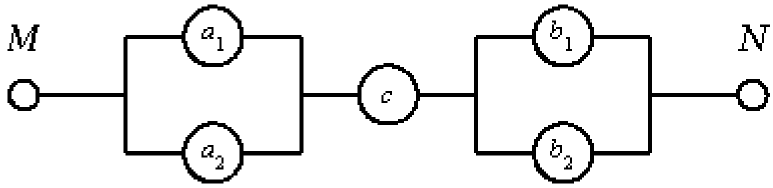

Рис. 1.1. Схема електричного ланцюга

Розрив ланцюга відбувається у разі, якщо вийдуть із ладу обидва елементи a_1 і a_2 (подія A_1A_2), або елемент c (подія C), або обидва елементи b_1 і b_2 (подія B_1B_2), тому

$$D = A_1A_2 + C + B_1B_2.$$

Ланцюг буде замкнений, якщо не вийде з ладу хоча б один з елементів a_1, a_2 (подія $\overline{A}_1 + \overline{A}_2$), елемент c (подія $\overline{C}$) і хоча б один з елементів b_1, b_2 (подія $\overline{B}_1 + \overline{B}_2$). Отже,

$$\overline{D} = (\overline{A}_1 + \overline{A}_2)\overline{C}(\overline{B}_1 + \overline{B}_2).$$

Вираз для події $\overline{D}$ безпосередньо можна отримати з D за допомогою формул де Моргана і основних властивостей операцій над випадковими подіями.

Дійсно,

$$\overline{D} = \overline{A_1A_2 + C + B_1B_2} = \overline{(A_1A_2 + C) + B_1B_2} =$$

$$= \overline{(A_1A_2 + C)}\,\overline{B_1B_2} = \overline{A_1A_2}\,\overline{C}\,\overline{B_1B_2} = (\overline{A}_1 + \overline{A}_2)\overline{C}(\overline{B}_1 + \overline{B}_2).$$

У цьому прикладі показали, як використовувати формули де Моргана до трьох випадкових подій. Аналогічно можна узагальнити ці формули для n $(n \geq 3)$ випадкових подій:

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n,$$

$$\overline{A_1A_2 \ldots A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \cdots + \overline{A}_n.$$

Зауваження. Для наглядного зображення операцій над випадковими подіями часто використовують діаграму Ейлера – Венна. У цьому разі кожна випадкова подія задається деякою фігурою (областю точок) на площині. При такому підході операції додавання відповідає **об'єднання** фігур, операції множення –

переріз фігур, протилежній події $\overline{A}$ – доповнення до фігури A (рис. 1.2).

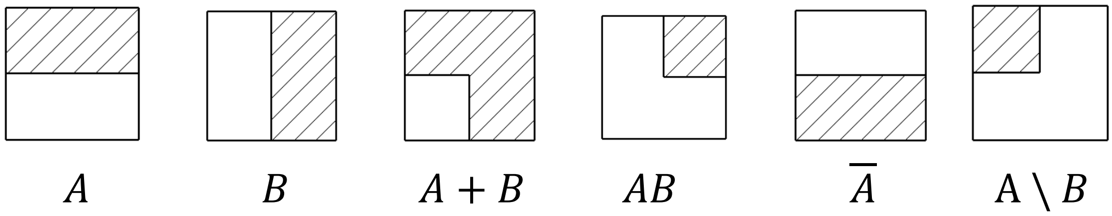

Рис. 1.2. Операції над випадковими подіями

Далі ми побачимо, що такий підхід є універсальним у певному розумінні.

Випадкові події A_1, A_2, …, A_n відносно деякого експерименту утворюють **повну групу** подій, якщо їх сума є вірогідною подією, тобто

$$\Omega = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

1.3. Статистичне визначення ймовірності

Щоб дати це визначення, попередньо введемо поняття відносної частоти випадкової події. **Відносною частотою** настання випадкової події A називається відношення числа випробувань, у яких має місце ця подія, до числа всіх зроблених випробувань.

Позначимо через $W_n(A)$ відносну частоту події A. Тоді згідно з визначенням

$$W_n(A) = \frac{n(A)}{n}, \tag{1.1}$$

де $n(A)$ – число випробувань, у яких настала подія A, n – число всіх зроблених випробувань.

Очевидно, що формулу (1.1) можна використати тільки в тому разі, коли випробування були проведені фактично.

Я. Бернуллі довів, що при необмеженому збільшенні числа випробувань ($n \to \infty$) відносна частота $W_n(A)$ виявляє властивість стійкості в околі якоїсь постійної величини, що і беруть за ймовірність випадкової події A. Тому $W_n(A)$ при досить великій кількості випробувань (при великому натуральному числі n) називають статистичною (апостеріорною) ймовірністю.

У наведених експериментах Ж. Бюффона і К. Пірсона визначення відносної частоти появи „герба” при підкиданні монети були отримані результати, які наведені у табл. 1.8.

Таблиця 1.8. Відносна частота за експериментальними даними.

Експериментатор	n	$n(A)$	$W_n(A) = n(A)/n$
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
К. Пірсон	24000	12012	0,5005

На основі даних табл. 1.8 можна стверджувати, що відносна частота появи „герба” групується в околі числа $1/2$. Це число і є статистичною ймовірністю появи „герба” у незалежних експериментах.

Виходячи з формули (1.1) маємо:

1) $0 \leq W_n(A) \leq 1$, де A – випадкова подія в серії n незалежних випробувань;

2) $W_n(\Omega) = 1$, де Ω – вірогідна подія;

3) $W_n(\emptyset) = 0$, де $\emptyset$ – неможлива подія;

4) якщо під випадковими несумісними подіями A і B відповідно розуміти скінченні множини точок на площині, які не перетинаються (кожна точка є результатом одного незалежного експерименту), то

$$W_n(A + B) = W_n(\mathrm{A}) + W_n(B). \tag{1.2}$$

Дійсно, якщо $n(A)$, $n(B)$ – кількість точок, які відповідають несумісним випадковим подіям A і B, то $n(A + B) = n(A) + n(B)$ і

$$W_n(A + B) = \frac{n(A + B)}{n} = \frac{n(A) + n(B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} =$$
$$= W_n(\mathrm{A}) + W_n(B);$$

5) якщо A і B – сумісні випадкові події відносно деякого експерименту ($A \cap B \neq \emptyset$) (під A і B, як і вище, розуміємо скінченні множини точок на площині), то з урахуванням $AB = A \cap B$ маємо:

$$W_n(A+B) = W_n(\mathrm{A}) + W_n(B) - W_n(AB).$$

З того, що $A \cap B \neq \emptyset$ безпосередньо випливає:

$$n(A+B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Тоді

$$W_n(A+B) = \frac{n(A+B)}{n} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n} =$$
$$= \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} - \frac{n(A \cap B)}{n} =$$
$$= W_n(\mathrm{A}) + W_n(B) - W_n(AB).$$

1.4. Простір елементарних випадкових подій

Для визначення поняття випадкових елементарних подій розглянемо ряд прикладів, в яких подіями вважатимемо результати випробувань.

Приклад 1.3. Підкидаємо гральний кубик, зроблений з однорідного матеріалу, грані якого пронумеровані числами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

При одному підкиданні кубика на його верхній грані може випасти будь-яке число очок від 1 до 6. Подію „ при одному підкиданні випало i очок ” позначимо через ω_i ($i = 1,2, \dots ,6$). Події ω_i вичерпують всі можливі результати даного випробування і задовольняють такі умови:

1) між собою вони несумісні;
2) у кожному експерименті обов'язково настане одна і тільки одна з цих подій (утворюють повну групу подій);
3) усі вони рівноможливі.

Випадкові події, які настають в одному експерименті і задовольняють вищенаведені три умови, називаються **елементарними рівноймовірними подіями**. Зрозуміло, що жодну елементарну подію не можна записати у вигляді суми інших елементарних подій, тобто вони є нерозкладними.

Множину всіх елементарних випадкових подій $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$ відносно даного експерименту називають **простором елементарних рівноймовірних подій** і позначають $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$. Довільну випадкову подію A ($A \subset \Omega$) можна записати у вигляді суми деяких елементарних випадкових подій $\omega_{i_1},\ \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}$, тобто $A = \omega_{i_1} +\ \omega_{i_2} + \cdots + \omega_{i_r}$ $(i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\})$. Подію A називають **складеною (розкладною) випадковою подією** щодо даного експерименту. Очевидно, що $\omega_i \omega_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$.

Розглянемо складені випадкові події B і C. Нехай подія B полягає в тому, що при одному підкиданні кубика випало парне число очок, подія C – в тому, що випало число очок, кратне 3. Зрозуміло, що ці події є складеними, вони можуть бути розкладені на елементарні події: подія B настає тоді і тільки тоді, коли настає одна з елементарних подій $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ ($B = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$); так само настання події C еквівалентне настанню однієї з подій ω_3, ω_6 ($C = \omega_3 + \omega_6$). Природно розглядати події B і C як відповідні множини елементарних подій: $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $C = \{\omega_3, \omega_6\}$.

Приклад 1.4. Якщо двічі підкинути монету, то при кожному підкиданні вона може впасти догори або „гербом”, або „цифрою”, тому можливі всього 4 результати випробування – елементарні події: $\omega_1 = (\text{г}, \text{г})$, $\omega_2 = (\text{г}, \text{ц})$, $\omega_3 = (\text{ц}, \text{г})$, $\omega_4 = (\text{ц}, \text{ц})$ (г – це випадання „герба”, ц – „цифри”).

Розглянемо приклади складених подій: нехай подія A полягає в тому, що випав принаймні один „герб”, подія B – випала тільки одна „цифра”, тоді $A = \{\omega_1 = (\text{г}, \text{г}), \omega_2 = (\text{г}, \text{ц}), \omega_3 = (\text{ц}, \text{г})\}$, $B = \{\omega_2 = (\text{г}, \text{ц}), \omega_3 = (\text{ц}, \text{г})\}$.

1.5. Класичне визначення ймовірності

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ – скінченний простір елементарних випадкових подій відносно певного експерименту.

Припустимо, що кожній елементарній події ω_i поставлено у відповідність деяке невід’ємне число $P(\omega_i) \geq 0$, таке, що

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1.$$

Нехай $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\} \subset \Omega$ – довільна випадкова подія.

Ймовірністю $P(A)$ випадкової події A називається сума ймовірностей елементарних подій, тобто

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \dots + P(\omega_{i_k}) \qquad (1.3)$$

Нехай Ω – розглянутий вище скінченний простір елементарних подій. Поставимо у відповідність кожній елементарній події $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ однакову ймовірність $P(\omega_i) = {}^1\!/_n$, $i = 1, 2, \dots, n$. У результаті одержимо простір з рівноймовірними елементарними подіями. У цьому просторі, якщо подія A є сумою k елементарних подій: $A = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k}$(їх далі будемо називати сприятливими для A), то відповідно до рівності (1.3)

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ разів}} = \frac{k}{n}, \qquad (1.4)$$

де k – кількість елементарних подій, сприятливих для A, а n – кількість всіх можливих елементарних подій даного експерименту.

Визначення ймовірності за формулою (1.4) отримало назву **класичного означення ймовірності**. При виникненні теорії ймовірностей воно було в основі визначення ймовірності (звідки й термін „класичне"). Як випливає з означення, ймовірність випадкової події – завжди безрозмірна величина.

Розгляд задач, пов'язаних з обчисленням ймовірності за класичним визначенням, зручно проводити за такою схемою:

1) з'ясувати, з чого складається випробування;

2) підібрати для цього випробування простір Ω так, щоб він складався тільки з рівноможливих елементарних подій;

3) знайти число всіх елементів простору елементарних випадкових подій Ω;

4) описати випадкову подію, ймовірність якої потрібно знайти;

5) указати, які елементарні події із числа рівноможливих є сприятливими для даної випадкової події, і підрахувати їх;
6) за формулою (1.4) обчислити шукану ймовірність.

Приклад 1.5. Підкидають два гральні кубики. Знайти ймовірність таких подій: A– число очок на обох кубиках збігається, B – число очок на першому кубику більше, ніж на другому, C– сума очок парна, D – сума очок більше дев'яти, E – хоча б на одному кубику з'явиться число 6, F – добуток очок є парним.

Розв'язання. Кожен з кубиків може впасти шістьма різними способами. Тоді простір елементарних випадкових подій Ω запишеться так:

$$\Omega = \{\omega_1 = (1,1), \omega_2 = (1,2), \dots, \omega_5 = (1,5), \omega_6 = (1,6),$$
$$\omega_7 = (2,1), \omega_8 = (2,2), \dots, \omega_{11} = (2,5), \omega_{12} = (2,6),$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$\omega_{31} = (6,1), \omega_{32} = (6,2), \dots, \omega_{35} = (6,5), \omega_{36} = (6,6)\},$$

де елемент (i, j) означає, що на першому кубику випало число i, а на другому – число j, $n = 36$ – кількість всіх елементарних випадкових подій.

Очевидно, що для події A сприятливими будуть:
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6). Отже, $k = 6$ і $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Для події B сприятливими будуть:
(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5). Отже, $k = 15$ і $P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

$C = \{$(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)$\}$ і $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

$D = \{$(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$\}$ і $P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$E = \{$(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$\}$ і $P(E) = \frac{11}{36}$.

$F = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ і $P(F) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

1.6. Основні властивості ймовірності

Ймовірність випадкової події має такі властивості:

1. Ймовірність вірогідної події Ω дорівнює одиниці. Оскільки для Ω всі елементарні події є сприятливими, тобто $k = n$, тому $P(\Omega) = 1$.
2. Ймовірність неможливої події $\emptyset$ дорівнює нулю. Оскільки для $\emptyset$ немає жодної сприятливої елементарної події, тобто $k = 0$ і $P(\emptyset) = 0$.
3. Ймовірність будь-якої випадкової події A задовольняє нерівність $0 \le P(A) \le 1$.

У будь-якій випадковій події A число елементарних подій дорівнює k, що задовольняє нерівність $0 \le k \le n$, тому $0 \le k/n \le 1$ і $0 \le P(A) \le 1$.

4. Якщо A і B – несумісні випадкові події ($AB = \emptyset$), то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (1.5)$$

Нехай $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$; $B = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_s}\}$ і $A \cap B = \emptyset$. Тоді $A + B = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}, \ \omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_s}\}$ і згідно з (1.4) маємо

$$P(A + B) = \frac{k + s}{n} = \frac{k}{n} + \frac{s}{n} = P(A) + P(B).$$

Цю властивість можна узагальнити на будь-яке число попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_m$, тобто

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m). \qquad (1.6)$$

5. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (1.7)$$

Протилежні події A і $\overline{A}$ несумісні і утворюють повну групу подій, тобто $A+\overline{A}=\Omega$. Тоді відповідно до властивостей 1 і 4, маємо:

$$P\left(A+\overline{A}\right)=P(\Omega)=1,$$

$$P\left(A+\overline{A}\right)=P(A)+P\left(\overline{A}\right).$$

Отже, $P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1$.

6. Для довільних випадкових подій A і B має місце рівність

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.8)$$

Дійсно, представимо суму випадкових подій $A+B$ у вигляді $A+B=B+A\overline{B}$ (рис. 1.2). Випадкові події B і $A\overline{B}$ є несумісними. Тоді

$$P\left(B+A\overline{B}\right)=P(B)+P(A\overline{B}) \text{ і}$$

$$P(A+B)=P(B)+P\left(A\overline{B}\right). \qquad (1.9)$$

З іншого боку, можна записати:

$$A=A\Omega=A\left(B+\overline{B}\right)=AB+A\overline{B}. \qquad (1.10)$$

Випадкові події AB і $A\overline{B}$ несумісні, тому

$$P\left(AB+A\overline{B}\right)=P(AB)+P\left(A\overline{B}\right). \qquad (1.11)$$

Тоді з (1.10) і (1.11) маємо

$$P(A)=P(AB)+P\left(A\overline{B}\right).$$

Звідси

$$P\left(A\overline{B}\right)=P(A)-P(AB). \qquad (1.12)$$

Підставляємо отримане значення $P\left(A\overline{B}\right)$ з (1.12) в (1.9):

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Ймовірність від суми трьох довільних випадкових подій A, B, C знаходимо за формулою

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$$
$$-P(BC)+P(ABC).$$

Дійсно,

$$P(A+B+C) = P[(A+B)+C] =$$
$$= P(A+B) + P(C) - P[(A+B)C] =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC+BC) = P(A) + P(B) +$$
$$+P(C) - P(AB) - \big(P(AC) + P(BC) - P(ACBC)\big) = P(A) +$$
$$+P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

У доведенні формули використали властивості операції над випадковими подіями: $ACBC = ABCC = ABC$.

Аналогічно можна знайти ймовірність від суми чотирьох, п'яти і т. д. довільних випадкових подій.

7. Для довільних випадкових подій A і B має місце рівність

$$P(A+B) = 1 - P\big(\overline{A}\,\overline{B}\big). \qquad (1.13)$$

Випадкові події $A+B$ і $\overline{A+B}$ є протилежними, тобто

$$(A+B) + \big(\overline{A+B}\big) = \Omega.$$

Тоді

$$P(A+B) + P\big(\overline{A+B}\big) = P(\Omega) = 1. \qquad (1.14)$$

З останньої рівності, враховуючи формулу де Моргана $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$, маємо:

$$P(A+B) + P\big(\overline{A}\,\overline{B}\big) = 1.$$

Звідси

$$P(A+B) = 1 - P\big(\overline{A}\,\overline{B}\big). \qquad (1.15)$$

Формулу (1.15) можна узагальнити для довільної скінченної кількості випадкових подій $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ \dots\ \overline{A_n}). \qquad (1.16)$$

Класичне означення ймовірності випадкових подій є гарною математичною моделлю при розв'язанні задач зі сфери азартних ігор, лотерей, організації вибіркового контролю тощо. Це означення базується на тому, що число елементарних подій є скінченним. Однак на практиці трапляються задачі, коли простір елементарних випадкових подій Ω містить нескінченно багато елементів.

Застосувати класичне означення ймовірності у таких випадках не можна.

Часто неможливо подати елементарні події певного експерименту у вигляді рівноможливих і несумісних подій. Тому поруч із класичним визначенням ймовірності використовують й інші: статистичне, яке було наведено вище, окрім цього – геометричне та аксіоматичне.

1.7. Геометрична ймовірність

Для обчислення ймовірності настання події A в тому разі, коли число елементарних подій нескінченно, часто використовують деякі поняття геометрії, якщо це уможливлюють обставини експерименту. Передбачається можливість проведення будь-якого числа випробувань, а поняттю рівноможливості приділяється головна роль.

Нехай Ω – простір елементарних випадкових подій, що містить нескінченну кількість елементів відносно деякого експерименту, і A – випадкова подія ($A \subset \Omega$) відносно цього ж експерименту.

Під **геометричною ймовірністю** $P(A)$ випадкової події A розуміють відношення

$$P(A) = \frac{\text{mes}\, A}{\text{mes}\, \Omega}, \tag{1.17}$$

де $\text{mes}\, A$ ($\text{mes}\, \Omega$) – міра множини A (простору Ω). Слово mes від англійського слова mesure – міра. Міру визначають так:

- якщо результати експерименту можна задати на прямій (одновимірний випадок), то під мірою розуміють довжину відрізка;

- якщо результати експерименту можна задати точками на площині (двовимірний випадок), то під мірою розуміють площу фігури;

- якщо для представлення результатів експерименту потрібні точки тривимірного простору (тривимірний випадок), то під мірою множини розуміють об’єм тіла.

Приклад 1.6. Задача про зустріч. Два студенти домовилися про зустріч у деякий проміжок часу, причому кожен з них приходить на місце зустрічі незалежно від іншого у випадковий момент часу між 12 і 13 годинами. Той, хто приходить першим, чекає 20 хв. і, якщо другий за цей час не прийде, перший залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язання. Позначимо моменти приходу студентів відповідно через x і y. Тоді за простір елементарних випадкових подій Ω можна взяти квадрат у площині XOY:

$$\Omega = \{(x, y) \in XOY \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Згідно з умовою студенти зустрінуться тоді і тільки тоді, якщо $|y - x| \leq 1/3$ (різниця між моментами приходу не перевищує 20 хв.). Це означає, що зустрічі (подія A) відповідають точки Ω, для яких виконується зазначена нерівність, тобто

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega \mid |y - x| \leq \frac{1}{3}\right\}.$$

Враховуючи властивість нерівності $|z| \leq a \Leftrightarrow -a \leq z \leq a \; (a \geq 0)$, точки події A визначаються так:

$$\left(|y - x| \leq \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3} \leq y - x \leq \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3} \leq y \leq x + \frac{1}{3}\right).$$

Їй відповідає область, заштрихована на рис. 1.3:

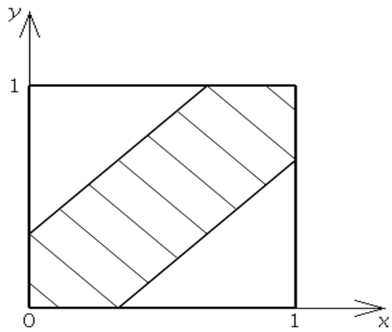

Рис. 1.3. Геометрична інтерпретація події A

Очевидно, що $\operatorname{mes}\Omega = 1$ (кв. од.) і $\operatorname{mes} A = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ (кв. од.). Тоді згідно з визначенням (1.17)

$$P(A) = \frac{5}{9}.$$

Приклад 1.7. Олівець завдовжки l довільним чином розломлюють на три частини. Яка ймовірність того, що з цих частин можна побудувати трикутник?

Розв'язання. Позначимо через x, y і $l-(x+y)$ відповідні довжини відрізків. Тоді простір елементарних подій на площині XOY задається так:

$$\Omega = \{(x,y) \in XOY \mid 0 < x < l, 0 < y < l, 0 < x+y < l\}.$$

Точки Ω задають трикутник (рис. 1.4), який заштрихований один раз.

Для того щоб з трьох частин олівця можна було побудувати трикутник (подія A), необхідно і достатньо, щоб сума двох частин була більша за третю частину, тобто

$$A: \begin{cases} x + l - (x+y) > y, \\ y + l - (x+y) > x, \\ x + y > l - (x+y). \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} y < l - y, \\ x < l - x, \\ l - (x+y) < (x+y). \end{cases}$$

З останньої системи нерівностей безпосередньо випливає, що

$$A = \left\{(x,y) \in \Omega \mid 0 < x < \frac{l}{2}, 0 < y < \frac{l}{2}, x + y > \frac{l}{2}\right\}.$$

На рис. 1.4. множина A заштрихована двічі

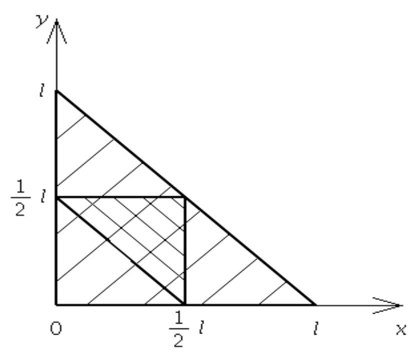

Рис. 1.4. Простір Ω і подія A

Знаходимо міри (площі) Ω і A:

$$\text{mes}\,\Omega = \frac{1}{2}l \cdot l = \frac{1}{2}l^2; \quad \text{mes}\,A = \frac{1}{2}\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}.$$

Тоді згідно з (1.17) маємо:

$$P(A) = \frac{l^2/8}{l^2/2} = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{2}{l^2} = \frac{1}{4}.$$

1.8. Аксіоматичне визначення ймовірності

Теорію ймовірностей, як і будь-яку іншу науку, можна будувати **аксіоматичним методом**. Він полягає в тому, що на самому початку фіксують первинні поняття даної теорії, які не підлягають визначенню. Основні властивості цих понять задають як низку аксіом. Після цього всі твердження теорії виводять з аксіом строго логічним шляхом. Сучасна аксіоматика теорії ймовірностей була розроблена на початку 30-х років XX століття А.М.
Колмогоровим.

1.8.1. Аксіоми подій. Нехай Ω – довільний простір елементарних подій. Систему підмножин S простору Ω називають **алгеброю подій**, якщо виконуються такі умови (аксіоми):

1) якщо $A \in S$, $B \in S$, то $A + B \in S$, тобто якщо A і $B -$ події (елементи системи S називаються подіями), то їх сума також є подією;

2) якщо $A \in S$, то $\overline{A} \in S$, тобто якщо $A -$ подія, то $\overline{A} = \Omega \setminus A$ також є подією.

З першої аксіоми випливає: якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (n – скінченне число) – події, то їх сума $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ також є подією, тобто $A_1 + A_2 + \cdots + A_n \in S$.

Покажемо деякі наслідки аксіом 1 і 2.

Система S містить простір елементарних подій Ω. Дійсно, якщо $A \in S$, то за другою аксіомою випливає, що $\overline{A} \in S$. Тоді за першою аксіомою $\Omega = A + \overline{A} \in S$.

Система *S* містить добуток двох подій. Нехай $A \in S$ і $B \in S$. Тоді $\bar{A} \in S$, $\bar{B} \in S$ і $\overline{A} + \overline{B} \in S$. Використовуючи знову другу аксіому, маємо $AB = \overline{\overline{A} + \overline{B}} \in S$. Аналогічно можна показати, що для скінченного числа подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ із S має місце $A_1 A_2 \ldots A_n \in S$.

Система *S* містить різницю двох подій. Нехай $A \in S$ і $B \in S$. Тоді $\overline{B} \in S$ і $A \setminus B = A\overline{B} \in S$.

1.8.2. Аксіоми ймовірностей. Наведемо аксіоми, які задають саме поняття ймовірності:

1) кожній події $A \in S$ поставимо у відповідність невід'ємне число $P(A)$, яке називається ймовірністю події A;
2) якщо події A і $B -$ несумісні, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
3) $P(\Omega) = 1$.

Ці три аксіоми є в основі теорії ймовірностей. Всі теореми теорії ймовірностей, включаючи найскладніші, виводяться з них формально-логічним шляхом.
Наведемо приклад такого виводу.

Застосувавши другу і третю аксіоми до рівності $A + \overline{A} = \Omega$, маємо:

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1.$$

Звідси, враховуючи, що $P(A) \geq 0$ і $P\left(\overline{A}\right) \geq 0,$ випливає:

$$P(A) \leq 1,$$

де A – довільна подія. Цей факт не міститься в жодній із наведених аксіом.

Сукупність трьох об'єктів $\{\Omega, S, P(A)\}$, у якій S – алгебра подій, а функція $P(A)$ задовольняє всі аксіоми теорії ймовірностей, називається **ймовірнісним простором** (ймовірнісною схемою).

Теоретичні запитання до розділу 1

1. Що називається вірогідною, неможливою подією? Навести приклади.
2. Яка подія називається випадковою? Навести приклади.
3. Коли випадкові події A і B відносно того самого експерименту називаються несумісними? Навести приклади.
4. Що називається сумою, добутком і різницею випадкових подій A і B відносно того самого експерименту? Навести приклади.
5. Що називається протилежною подією до випадкової події A? Навести приклади.
6. Що називається повною групою випадкових подій відносно даного експерименту? Навести приклади.
7. Коли випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ відносно даного експерименту називають попарно несумісними? Навести приклади.
8. Яка подія називається елементарною, складеною випадковою подією? Навести приклади.
9. Що називається простором елементарних подій? Навести приклади.
10. Наведіть аксіоми подій.
11. Що таке алгебра подій?
12. Що називається відносною частотою випадкової події?
13. Що таке статистична ймовірність випадкової події?
14. Дати класичне визначення ймовірності випадкової події. Навести приклади.
15. Що називається геометричною ймовірністю випадкової події? Навести приклади.
16. Наведіть аксіоми теорії ймовірності.
17. Відомо, що A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ утворюють повну групу випадкових подій. Чому дорівнює $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$?
18. Нехай A і B – несумісні випадкові події. Чому дорівнює $P(A + B)$?

19. Відомо, що A, B і C – сумісні випадкові події. Чому дорівнює $P(A+B+C)$?
20. Чи є протилежні події несумісними? Навести приклади.

Приклади до розділу 1

1. Тричі кидають монету. Описати простір елементарних подій.
2. Стрілець двічі стріляє у мішень: A – влучення при першому пострілі, B – при другому. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що:
   а) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія C);
   б) стрілець влучив у мішень тільки один раз (подія D);
   в) стрілець влучив у мішень рівно два рази (подія E);
   г) стрілець не влучив у мішень.
3. В урні лежать чотири кулі, пронумеровані числами 1, 2, 3, 4. Навмання виймаються дві кулі. Описати простір елементарних подій. Записати елементарні події, сприятливі для подій:
   а) A – „вийняли дві кулі з парними номерами”;
   б) B – „сума цифр на двох кулях не менша 5”.
4. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Записати вираз для подій, які полягають у тому, що:
   а) настала тільки подія A;
   б) настали події A і B, але подія C не настала;
   в) настала принаймні одна з цих подій;
   г) не настала жодна з цих подій;
   д) настали всі три події;
   д) настало не більше двох подій.
5. Нехай A, B і C – довільні випадкові події відносно деякого експерименту. Чи справджується рівність $BC - A = B + B(C - A)$ в алгебрі випадкових подій, де A, B, C – довільні випадкові події того самого експерименту?
6. Довести, що в алгебрі випадкових подій справджується рівність $B - AC = (B - C) + B\overline{A}$, де A, B, C – довільні випадкові події відносно деякого експерименту.

7. Довести, що для довільних випадкових подій A, B і C відносно того самого експерименту має місце рівність $A - -\overline{B + C} = AB + A(C + B)$.
8. Чи справджується рівність $\overline{A}(B + C) = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A(C + B)})$ в алгебрі випадкових подій, де A, B, C – довільні випадкові події відносно певного експерименту?
9. Довести, що для довільних випадкових подій A, B, C відносно того самого експерименту має місце рівність

$$A(B + C) = \left(A - \overline{B}\right) + A(C + B).$$

10. Задано множину цілих чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Навмання з цієї множини беруть одне число. Яка ймовірність того, що:

    а) воно виявиться кратним 3 (подія A) ?

    б) воно виявиться кратним 4 (подія B) ?
11. Є дві коробки. У першій коробці 1 біла куля, 3 чорних і 4 червоних. У другій коробці – 3 білих, 2 чорних і 3 червоних. З кожної коробки навмання виймають одну кулю. Знайти ймовірності таких подій:

    а) кулі одного кольору;

    б) серед вийнятих куль є одна біла;

    в) серед вийнятих куль є хоча б одна біла.
12. Задано множину цілих чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 40\}$. Навмання з цієї множини беруть одне число. Яка ймовірність того, що:

    а) воно виявиться кратним 2 (подія A) ?

    б) воно виявиться кратним 7 (подія B) ?

    Знайти ймовірність таких подій: $\overline{A + B}$, $A - B$, $B - A$, $\overline{AB}$.
13. Гральний кубик підкидають двічі. Знайти ймовірності таких подій:

    а) у сумі випаде 7 очок (подія A);

    б) у сумі випаде не менше 10 очок (подія B);

    в) за два кидки випаде однакова кількість очок (подія C);

    г) за два кидки випаде різна кількість очок (подія D);

    Знайти $P(A + B)$, $P(C + D)$, $P(CD)$, $P(\overline{C}D)$.

14. Стрілець A влучає в мішень з ймовірністю $p_1 = 0{,}7$, стрілець B – з ймовірністю $p_2 = 0{,}6$, а стрілець C – з ймовірністю $p_3 = 0{,}4$. Стрільці зробили залп по мішені. Знайти ймовірність таких подій:
    а) у мішень є два влучення (подія A);
    б) у мішень є не більше одного влучення (подія B);
    в) у мішень нема жодного влучення (подія C);
    Знайти $P(\overline{A})$, $P(\overline{C})$, $P(A\overline{B})$.
15. Ймовірність попадання в ціль з чотирьох рушниць така: $p_1 = 0{,}7;\ p_2 = 0{,}75;\ p_3 = 0{,}9;\ p_4 = 0{,}8$. Знайти ймовірність таких подій:
    а) A – є тільки одне попадання;
    б) B – є рівно два попадання;
    в) C – є не менше двох попадань;
    г) D – є хоча б одне попадання.
16. Відомо, що $P(A) = 0{,}6;\ P(B) = 0{,}7;\ P(AB) = 0{,}5$. Знайти $P\left(A + \overline{B}\right)$.
17. Відомо, що $P(A) = 0{,}5;\ P(B) = 0{,}65;\ P(AB) = 0{,}4$. Знайти $P\left(\overline{AB}\right)$.
18. Точку $M(x, y)$ кидають в квадрат з вершинами $A(-1, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, -1)$. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $z^2 + 2xz + y = 0$ має дійсні корені.
19. Точку $M(x, y)$ кидають в прямокутну область з вершинами $A(0, -2)$, $B(0, 2)$, $C(2, 2)$, $D(2, -2)$. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $z^2 + xz + y = 0$ не має дійсних коренів.
20. З відрізка $[-2; 2]$ навмання вибирають два числа x і y. Знайти ймовірність того, що $xy > 1$ і $x < y$.
21. У трикутнику з вершинами $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$ і $C(2, 0)$ навмання вибрали точку $M(x, y)$. Знайти ймовірність того, що $y \leq \sqrt{x}$.

22. З відрізка $[-1; 1]$ навмання вибрали два числа x і y. Знайти $P(A - B)$, якщо подія A полягає в тому, що $y + 1 > x^2$, а подія B у тому, що $x + y > 1$.
23. З відрізка $[-1; 1]$ навмання вибрали два числа x і y. Знайти ймовірність того, що $y \leq 1 - x^2$.
24. Стержень завдовжки l випадковим чином розломили на дві частини. Знайти ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищуватиме $l/3$.
25. У трикутнику з вершинами в точках$(-1, -1), (1, -1), (1, 1)$ навмання вибрали точку з координатами $(x,\ y)$. Знайти ймовірність того, що $y > x^2 - 2x$.
26. У трикутнику з вершинами у точках (–1,0), (0,1), (1,0) навмання вибрали точку (x,y). Знайти ймовірність того, що $y > 2\sqrt{x^2}$.