МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВАДИМА ГЕТЬМАНА»

В. В. Вітлінський, Т. О. Терещенко, С. С. Савіна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ: ОПТИМІЗАЦІЯ

Навчальний посібник

1906
КНЕУ
КИЇВ 2016

УДК 519.86(0758)
ББК 656 63я73
В 54

Рецензенти
Н. П. Литвиненко, к.е.н., доц..
(Інститут міжнародних відносин Київського національного університету імені Тараса Шевченка)
О. В. Піскунова, д.е.н., проф..
(ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»)
І. Г. Лук'яненко, д.е.н., проф.
(Національний університет «Києво-Могилянська академія»)

Рекомендовано науково-методичною радою
Протокол № 1 від 21.09.15

Вітлінський В.В.
Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник [Електронний ресурс]
В 54 / Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. — К. : КНЕУ, 2016. — 303 с.
ISBN 978-966-926-108-3

Навчальний посібник написано відповідно до програми курсу «Економіко-математичні методи та моделі» для підготовки бакалаврів з економіки і присвячений другій частині курсу — оптимізаційним задачам.

Посібник розглядає основні математичні методи та моделі, присвячені задачам дослідження економічних систем і процесів, оскільки саме побудова адекватної математичної моделі є першоосновою для подальшого застосування комп'ютерних технологій із метою прийняття обгрунтованих управлінських рішень в реальних умовах.

Розділи 1 — 5 присвячені задачам лінійного програмування, теорії двоїстості, економічному аналізу оптимальних планів. У розділах 6 — 9 розглядаються складніші оптимізаційні задачі: цілочислові, нелінійні, динамічні, стохастичні, дробово-лінійні, задачі теорії ігор.

Теоретичний матеріал ілюструється числовими прикладами, крім того, описано процес застосування комп'ютерних технологій (Matcad і Microsoft Excel Solver) для розв'язування основних типів оптимізаційних задач. Укожному розділі наведено цікавий понадпрограмний матеріал.

Для студентів економічних спеціальностей, аспірантів, фахівців-економістів.

УДК 519.86(0758)
ББК 656 63я73

ISBN 978-966-926-108-3

ЗМІСТ

ВСТУП

Основне завдання фахівців з економіки та підприємництва — керувати економічними системами, розробляючи й упроваджуючи стратегічні та тактичні плани. Керування економічними системами — це, по суті, використання знань про системи, здобуття нової інформації та застосування з метою пошуку найефективніших способів досягнення заданих результатів. Для керування економічними системами необхідна інформація, особливо у XXI столітті, коли стрімко відбуваються процеси інформатизації суспільства, його інтелектуалізації.

Знання та індивідуальний підхід перетворюються на основну цінність інформаційного суспільства. Більш того, головним фактором для людини стає не абсолютний дохід, а статус і якість життя. Прагнення до матеріальних цінностей змінюється на прагнення самовираження, пошуку сенсу життя, бажання залишити свій слід у ньому. Дедалі більше людей на Заході надають перевагу роботам не найдохіднішим, а творчо цікавим, які дозволяють самореалізовуватися.

Ми стаємо свідками інтелектуалізації та інформатизації західного суспільства. Можемо бути впевненими, що цей процес не обмине й Україну. Наша країна має до цього готуватись, розвивати наукові дослідження, виховувати відповідних фахівців і, що найважливіше, таких, котрі мають відповідний рівень знань.

На наших очах відбулася комп’ютерна революція. У домівках з’явилися комп’ютери, оснащені сучасним програмним забезпеченням з широкими можливостями. Завдяки Інтернету наше суспільство має змогу використовувати у своїй діяльності світові досягнення науки, культури тощо.

Інформатизація суспільства — закономірний процес. Наприклад, у США злам припав на 1991 рік, коли вперше витрати на придбання інформаційної техніки (112 млрд дол.) перевищили витрати на промислове обладнання (107 млрд дол.)[1]. Цей рік можна вважати першим роком інформаційної ери. Відтоді різниця між зазначеними витратами постійно збільшується.

Зростання ролі знань, високих технологій, добування нової вагомої для керування інформації притаманне інформаційним суспільствам. С. Л. Удовик удало на прикладі компаній IBM і Microsoft показав сутність і переваги використання інформаційних технологій. Наприкінці 1996 року ринкова вартість компанії Microsoft становила 85,5, а IBM — 70,7 млрд дол., хоча остання продавала набагато більше продукції. Крім того, основні виробничі засоби та устаткування IBM досягають 16,6 млрд дол., а Microsoft — не перевищують 930 млн дол. Отже, з позиції індустріального суспільства основною вартістю Microsoft є «повітря» — ідеї, думки, набутий працівниками досвід, престижне ім’я, можливості, особливо можливості перспективні, а також розумні і творчі голови службовців. Як удало висловився Д. Танскотт з приводу Microsoft, «активи компанії щовечора розходяться по домівках». Більш того, з погляду матеріальних активів інша добре відома у нас компанія VisaInternational просто не існує, хоча й здійснює фінансові угоди на третину трильйона доларів на рік»[2].

Зауважимо, що в розвинених країнах кількість працівників, зайнятих у сфері виробництва, з року в рік зменшується. Так, нині у США частка таких працівників становить близько 10 %, а в інтелектуальних сферах зайнято вже майже 60 %[1].

Принагідно зазначимо, що рентабельність у виробничій сфері не перевищує 5—15 %, а в інтелектуальній — 1000—2000 %. Саме тому високотехнологічні й інтелектуальні суспільства практично не потрапляють у зону кризи — норма рентабельності їх продукції витримує багаторазове зниження цін.

За умов інформатизації суспільства основним його надбанням стає інтелектуальний продукт, отримуваний завдяки високим технологіям та інвестиціям у знання.

---

[1] *Удовик С. Л.* — С. 28.
[2] *Удовик С. Л.* — С. 27—28.
[1] *Танскотт Д.* Электронно-цифровое общество. — К.: INT; М.: Рефл-бук, 1999. — С. 10.

Підкреслимо, що коли йдеться про інформатизацію суспільства, керівник має відповідати за використання й ефективність знань. Отже, у таких суспільствах змінюються сутність і методи керування економічними системами.

Інформаційна та комп'ютерна революція прискорює розвиток суспільства, яке буде не капіталістичним і не комуністичним, а інформаційним. Ефективність сягне так високо, що всі члени суспільства в матеріальному плані будуть повністю задоволені. Проте це не означає, що в суспільстві не буде суперечностей. Суспільство в результаті такої революції поділиться на два «ворожі» класи, а саме: на тих, хто опанував комп'ютерні технології, і на тих, хто цього не зробив або не зміг. Виникає реальне протистояння в суспільстві, яке може мати негативніші наслідки, ніж перехід наших предків від кустарного до фабричного виробництва. Річ у тім, що промислова революція, яка розтягнулася в часі, давала можливість людям адаптуватися до нових умов, при цьому створювалися нові робочі місця. Комп'ютерна революція проходить стрімко, загрожує зруйнувати більше робочих місць, ніж створити, формуються нові жорсткі класові бар'єри, особливо між високо- і малоосвіченими членами суспільства.

Принагідно зазначимо, що українське суспільство значною мірою відстає від світового рівня у процесах інформатизації, використання комп'ютерної техніки. Важливою для нашого суспільства є проблема вдосконалення керування економічними системами на базі комп'ютерних технологій, тобто інтенсивного впровадження систем підтримки прийняття рішень (СППР), які продовж трьох десятиліть широко застосовуються у розвинених країнах. Наприклад, для розробки програмного забезпечення СППР США щорічно витрачає понад 1 млрд доларів. Хоча в Україні такі системи ще практично не використовуються, але інтелектуальна діяльність нашого суспільства є доволі прогресуючою і динамічною, його інформатизація забезпечить використання СППР. Фахівці-економісти мають бути готовими до такого перебігу процесів інформатизації.

СППР окрім програмного забезпечення містять банк економіко-математичних методів і моделей. Щоб ефективно застосовувати СППР, необхідно володіти методом математичного моделювання, вміти будувати економіко-математичні моделі, знати методи оптимізації економічних процесів та явищ. Усе це вивчається в дисциплінах економіко-математичного циклу. Отже, глибоке вивчення цього циклу дисциплін дасть змогу фахівцеві-економісту вступити в інформаційне суспільство, допоможе здобувати нові знання та унікальну інформацію. Тільки з допомогою методів математичного моделювання можна збагатитися знаннями про системи, у тому числі економічні.

Економіко-математичні методи є базовим курсом у підготовці економістів і підприємців.

У пропонованому навчальному посібнику на прикладі економічних задач досить популярно викладені основні методи та моделі оптимізації, освоєння яких не потребує особливих математичних знань, а лише старанної роботи. У посібнику подано теоретичні основи, алгоритми розв'язування задач, домашні завдання тощо.

Проте окрім загальнодоступного подання матеріалу в підручнику є окремі параграфи, частини тексту, що дають ґрунтовніші знання розглянутого матеріалу, наведено також доведення всіх теорем і тверджень, які використовуються в підручнику. Всі наведені положення належать до поглибленого розуміння матеріалу і дають додаткову інформацію для студентів, що цікавляться прикладною математикою.

Увагу допитливого студента звернемо на той факт, що розвиток математичного програмування почався лише шістдесят років тому. У 1939 році академік Л. В. Канторович, досліджуючи деякі задачі економічного змісту, розробив методи чисельного розв'язування екстремальних задач. Цей науковий напрям розвивається досить бурхливо, ряд учених за розробку методів оптимізації здобули Нобелівські премії, у тому числі академік Л. В. Канторович. Отже, працьовиті і талановиті студенти мають можливість ознайомитися у періодичній пресі з останніми досягненнями у сфері оптимізації функціонування і розвитку економічних процесів. Опанувати математичне моделювання і методи оптимізації студенти мають неодмінно, щоб стати фахівцями високого рівня в інформаційному суспільстві.

Розділ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ І МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1. Область застосування оптимізаційних задач в економічних дослідженнях.
1.2. Сутність оптимізаційних моделей і методів. Математичне програмування.
1.3. Математична постановка оптимізаційних задач.
1.4. Класифікація задач математичного програмування.
1.5. Приклади побудови лінійних оптимізаційних математичних моделей економічних систем.

Стислі висновки
Запитання і завдання для самостійної роботи
Основні терміни і поняття

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:
- ✓ сутність оптимізаційних методів і моделей;
- ✓ зв'язок економічних оптимізаційних задач з математичним програмуванням;
- ✓ класифікацію задач математичного програмування;
- ✓ особливості математичних оптимізаційних моделей економічних задач;

а також УМІТИ:
- математично формулювати оптимізаційні економічні задачі;
- будувати лінійні оптимізаційні моделі економічних систем.

1.1. Область застосування оптимізаційних задач в економічних дослідженнях

Кожне підприємство, фірма, компанія повинні розробляти план виробництва продукції чи послуг на перспективу за певних умов господарювання. Ці умови включають потужності підприємства (технології, обладнання, робочу силу), а також оборотні кошти, необхідні для закупівлі сировини, матеріалів, палива, електроенергії і т. п. Однак жоден план не може розроблятись без урахування кон'юнктури ринку (попит, ціна, пропозиція). Тому вихідні економічні умови задачі для формування оптимального плану повинні включати параметри ринку для товару, що випускається, а також усі внутрішні ресурси підприємства.

Господарська діяльність підприємства спрямовується на досягнення найкращих фінансових результатів (максимізації доходу, прибутку, рентабельності, мінімізації витрат). Наведені економічні умови математично записуються як задача оптимального планування, що має три структурні частини:

1) цільова функція;
2) система обмежень;
3) умова невід'ємності змінних.

Зауважимо, що розрахувати найкращий план підприємства за заданих внутрішніх і ринкових умов можна лише на основі теорії оптимального планування, оскільки кожна з економічних задач такого типу має дуже багато розв'язків.

Оптимальний план підприємства за заданих умов дозволяє збалансувати ресурси підприємства між собою. Це збалансування є надзвичайно важливим, воно вказує на можливі зміни у формуванні ресурсів підприємства стосовно максимізації фінансового результату.

Задача оптимізації плану підприємства дозволяє також узгодити заздалегідь внутрішні та ринкові умови функціонування підприємства, коли внутрішні ресурси спрямовані на сформований портфель угод щодо продукції чи послуг і дозволяють оптимізувати фінансовий результат.

У суто математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в Стародавній Греції. Проте оскільки дане видання перш за все розглядає властивості і розв'язки математичних моделей економічних процесів, цікаво розглядати історію розвитку задач оптимізації як самостійного наукового напряму, починаючи з часів перших спроб застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. Тому справжнім початком розвитку оптимізаційних моделей і методів у сучасному розумінні вважають праці радянського вченого Л. В. Канторовича. Наприкінці 1930-х років у Ленінградському університеті ним уперше були сформульовані і досліджувались основні задачі, критерій оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язування, геометрична інтерпретація результатів розв'язування задач лінійного програмування. (У 1939 р. опубліковано монографію Л. В. Канторовича «Математичні методи організації і планування виробництва».) Термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше — у 1951 р. у роботах американських учених Дж. Данцинга і Т. Кумпанса, однак у своїй монографії Дж. Данцинг відмічає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широкий клас важливих виробничих задач може бути поданий у чіткому математичному формулюванні, яке дає можливість підходити до задач з кількісної сторони та розв'язувати їх чисельними методами.

Дж. Данцингом також був розроблений у 1947 р. основний метод розв'язування задач лінійного програмування — симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напряму в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947) з розвитку концепції двоїстості, що забезпечило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку досліджень оптимізаційних задач є 1950-ті роки. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних класів методів і моделей. У 1951 р. — робота Г. Куна і А. Таккера, в якій наведені необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 р. — Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом і лінійними обмеженнями; 1955 р. — ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. Також у 1950-х роках сформувався ще один з напрямів — динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

На жаль, у період найбурхливішого розвитку такого напряму математичного моделювання, як оптимізаційні методи та моделі за кордоном, у Радянському Союзі не спостерігалось значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень почалось в 1960—1980-ті роки і стосувалося опису «системи оптимального функціонування соціалістичної економіки». Серед радянських учених того періоду слід згадати праці В. С. Немчинова, В. В. Новожилова, Н. П. Федоренко, С. С. Шаталіна, В. М. Глушкова, В. Михайлевич, Ю. М. Єрмольєва та інших.

На сучасному етапі напрям оптимізаційних методів і моделей містить широкий клас задач із відповідними методами розв'язування, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку і функціонування реальних економічних систем. Ведуться розробки банків економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою і сучасними програмними продуктами складатимуть системи підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

1.2. Сутність оптимізаційних моделей і методів. Математичне програмування

Термін «математичне програмування» у сучасної людини асоціюється перш за все з програмуванням як процесом створення програм для ПЕОМ за допомогою спеціальної мови. Проте насправді це лише не дуже вдалий переклад з англійського терміна *mathematical programming*, що означає розробку на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети. В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, схожі за постановкою, що мають ряд спільних ознак і розв'язуються подібними методами.

Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватись за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги і недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч і необхідно з усіх можливих варіантів обрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи знаходження найкращої дії.

Сутність задачі економічного вибору та пов'язаною з цим необхідністю використання моделей і методів математичного програмування проілюструємо на прикладі.

Приклад 1.1. Фірма спеціалізується на виготовлені та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут усієї продукції необмежений, однак обсяги ресурсів праці та основних матеріалів є обмеженими. Задача полягає у визначенні такого плану виробництва продукції на місяць, за якого виручка буде найбільшою.

Нормативи використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціна одиниці кожного виду продукції наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Показники	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	Робочий час, люд.-год	Листове залізо, м^2	Скло, м^2	
Морозильна камера, шт	9,2	3	—	300
Електрична плита, шт	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	40	—

Розглянемо кілька можливих варіантів виробничої програми.

Перша виробнича програма. Очевидно, що найпростішим з усіх можливих варіантів є виробництво одного виду продукції. Припустимо, що виготовляються лише морозильні камери. Ресурс робочого часу 520 люд.-год дає можливість виготовляти $520 : 9{,}2 = 56$ морозильних камер. Наявна кількість листового заліза забезпечує виготовлення $240 : 3 = 80$ морозильних камер. Останній ресурс (скло) для виготовлення даного виду продукції не використовується. Отже, кожного місяця можна випускати лише 56 морозильних камер, що дасть виручку у розмірі $56 \cdot 300 = 16800$ ум. од.

Зазначимо, що у разі реалізації такої виробничої програми загальний запас листового заліза використовується не повністю, а скло не використовується взагалі.

Друга виробнича програма. Визначимо кількість електроплит, які можна виготовляти за даних обсягів ресурсів:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{робочий час}: \ 520{:}4 = 130 \\ &\textit{листове залізо}: 240{:}6 = 40 \\ &\textit{скло}: \qquad 40{:}2 = 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 20\,\textit{електоплит}$$

На виробництво 20 електроплит буде використано таку кількість ресурсів:

	використано	*залишок*
робочий час:	$20 \cdot 4 = 80$	$520 - 80 = 440$(*люд.* – *год.*)
листове залізо:	$20 \cdot 6 = 120$	$240 - 120 = 120(м^2)$
скло:	$20 \cdot 2 = 40\ (м^2)$	

Залишки першого і другого ресурсів забезпечать виробництво морозильних камер обсягом:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{робочий час}: \ 440 : 9{,}2 = 47 \\ &\textit{листове залызо}: 120{:}3 = 40 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 40\ \textit{морозильних камер}$$

Таким чином, друга виробнича програма передбачає виробництво 20 електроплит і 40 морозильних камер. Виручка буде такою:

$$20 \cdot 200 + 40 \cdot 300 = 16000 \text{ ум. од.}$$

Порівнюючи першу та другу виробничі програми, бачимо, що за першою виручка більша, отже, вона краще за другу.

Зрозуміло, що розглянуті програми не вичерпують усіх можливих варіантів. Наприклад, доцільно було б розглянути програму виробництва 41 морозильної камери і можливої кількості електроплит; 42 морозильні камери і можлива кількість електроплит; 43 морозильні камери і можлива кількість електроплит і т. д. Іншими словами, для того, щоб знайти найкращий варіант виробництва продукції, слід перебрати досить велику кількість усіх можливих варіантів (у більшості випадків кількість таких варіантів дуже багато, або нескінченна кількість).

Зауважимо, що дана задача є надто спрощеною порівняно до реальних економічних задач, в яких кількість ресурсів і видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність розробки спеціальних математичних методів розв'язування таких задач, тобто математичне обґрунтування виробничих програм. Саме зі словом «програма» і пов'язана назва предмета — математичне програмування.

Пошук реального оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких треба встановити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначених обмежень.

Математичне програмування — один із напрямів прикладної математики, *предметом* якого є теорія і методи розв'язування задач знаходження екстремуму деякої функції за заданих умов.

Об'єктом математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях потрібно зробити вибір найкращого із можливих варіантів дій. Основою такого вибору є розв'язок екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв'язування екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, складання оптимального плану, економічного аналізу одержаних результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об'єкта (*системи*) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

1.3. Математична постановка оптимізаційних задач

Представимо схематично довільну економічну систему у вигляді (рис. 1.1):

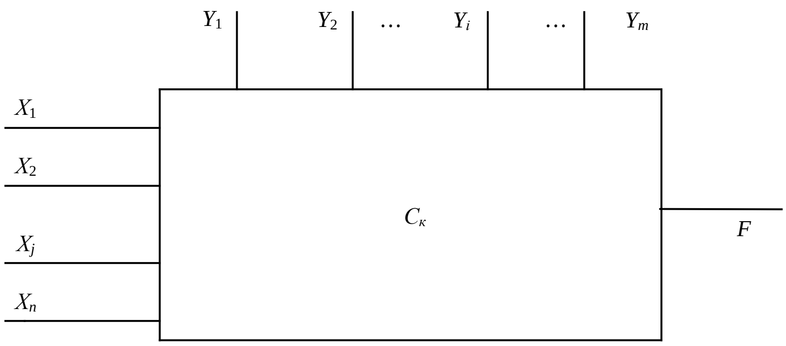


Рис. 1.1. Схема економічної системи

Параметри c_k ($k = 1, 2,..., l$) є кількісними характеристиками системи. Наприклад, якщо йдеться про таку економічну систему, як сільськогосподарське підприємство, то значення c_k характеризують наявність ресурсів (земельних угідь, живої праці, сільськогосподарської техніки, тваринницькі та складські приміщення), рівень урожайності сільськогосподарських культур, продуктивності свійських тварин, норми витрат ресурсів, ціну і собівартість проміжної та кінцевої продукції, норми податків, відсотки за кредит, ціни на куповані ресурси тощо.

Частина параметрів c_k для певної системи може бути сталою, наприклад, норми висіву насіння сільськогосподарських культур, споживання тваринами кормів і та ін., а частина залежатиме від певних умов, як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції, реалізаційні ціни на рослинницьку та тваринницьку продукції.

Інші кількісні характеристики є змінними величинами, які бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими чи випадковими. Наприклад, залежною змінною є обсяг чистого прибутку, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною — початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість корів, неперервною — площа посіву озимої пшениці, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою є кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Незалежні змінні бувають двох видів: керовані x_j ($j = 1, 2,..., n$), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; некеровані змінні y_i ($i = 1, 2,..., m$), значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, площі посіву зернових культур — керовані, а погодні умови — некеровані змінні. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити до групи некерованих, і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива будуть керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Кожна економічна система має мету (ціль) розвитку і функціонування. Це може бути, наприклад, одержання максимуму чистого прибутку. Рівень досягнення мети здебільшого має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F — обрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F, якою вимірюється рівень досягнення мети змінними і параметрами системи:

$$F = f(x_1, x_2,..., x_n;\ \ y_1, y_2,..., y_m, c_1, c_2,..., c_l). \tag{1.1}$$

Функцію F називають *цільовою функцією*, або *функцією мети*. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображає рівень досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так.

Знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (*максимального чи мінімального значення*).

Отже, потрібно відшукати значення

$$max\ (min)\ F^* = f\,(x_1, x_2, ..., x_n;\quad y_1, y_2, ..., y_m, c_1, c_2, ..., c_l). \tag{1.2}$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми до системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи і т. ін.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей і нерівностей вигляду

$$\underset{(r=1,\,2,\,...,\,S)}{q_r\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n;\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_m;\ c_1,\ c_2,\ ...,\ c_l\right)\{\le,\ =,\ \ge\}0} \tag{1.3}$$

Тут набір символів (>, =, <) означає, що для деяких значень поточного індексу r виконуються нерівності типу >, для інших — рівності (=), а для решти — нерівності типу <.

Система (1.3) називається *системою обмежень*, або *системою умов задач*, що описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування і розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні X_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,\ 2,\ ...,\ n)\,. \tag{1.4}$$

Залежності (1.2)—(1.4) становлять *економіко-математичну модель* цієї економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил.

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, несуттєвим. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням і переускладненням. Дійсно, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і оптимальні розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Потрібно забезпечити, щоб множина наборів X_j була непорожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях по змозі слід уникати обмежень на зразок «=», а також обмежень суперечливих. Наприклад, ставиться обмеження до виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (1.3) має єдиний розв'язок, то не існує задачі вибору оптимального плану.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, що задовольняє умови (1.3) і (1.4), називають *допустимим планом*, або *планом*. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною *стратегією економічної системи, програмою дій*. Кожному допустимому плану відповідає значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1.1).

Сукупність усіх розв'язків систем обмежень (1.3) і (1.4), тобто множина всіх допустимих планів, становить *область існування планів*.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*. Оптимальний план є *розв'язком задачі математичного програмування* (1.2)—(1.4).

Повертаючись до наведеного прикладу 1.1, побудуємо економіко-математичну модель даної задачі.

Позначимо через x_1 кількість вироблених морозильних камер, а через x_2 — кількість вироблених електроплит. Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів.

Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, що наведені в табл. 1.1, запишемо сумарні витрати робочого часу: $9{,}2x_1 + 4x_2$. За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто 520 люд.-год. Така вимога описується такою нерівністю:

$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520.$$

Аналогічно запишемо умови з використання листового заліза і скла:

$$3x_1 + 6x_2 \le 240;$$
$$2x_2 \le 40.$$

Необхідно серед множини усіх можливих значень x_1 і x_2 знайти такі, за яких сума прибутку буде максимальна, тобто $\max F = 300x_1 + 200x_2$.

Таким чином, умова задачі прикладу 1.1 описується економіко-математичною моделлю вигляду

$$\max F = 300x_1 + 200x_2$$
$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 240$$
$$2x_2 \le 40$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Остання умова фіксує неможливість набуття змінними від'ємних значень, так як виробництво продукції не може бути від'ємним. Розв'язуючи задачу методами математичного програмування, матимемо такий розв'язок: для максимальної виручки від реалізації продукції треба виготовляти морозильних камер 50 шт., електроплит — 15 шт. ($x_1 = 50$, $x_2 = 15$).

Перевіримо виконання умов задачі:

$$9{,}2 \cdot 50 + 4 \cdot 15 = 520;$$
$$3 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 240;$$
$$2 \cdot 15 = 30 < 40.$$

Усі умови задачі виконуються, до того ж оптимальний план дає змогу повністю використати два види ресурсів із мінімальним надлишком третього.

Виручка становить $F = 300 \cdot 50 + 200 \cdot 15 = 18000$ ум. од.

Знайдений оптимальний план порівняно з першим варіантом виробничої програми збільшить виручку на $18000 - 16800 = 1200$ ум. од., тобто на $\frac{1200}{16800}100\% = 7{,}1\%$.

1.3.1. Багатокритеріальна оптимізація. Зауважимо, що в класичній постановці задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно визначена. У реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують кілька десятків показників. Наприклад, максимум чистого доходу від виробленої продукції у вартісному вираженні, або максимум рентабельності, мінімум собівартості виробленої продукції, або мінімум витрат дефіцитних ресурсів. Крім того, бажаним є застосування кількох критеріїв одночасно, причому вони можуть бути взагалі несумісними. Наприклад, вимога досягти максимальної ефективності виробництва за мінімальних витрат ресурсів як постановка математичної задачі є некоректною. Мінімальні витрати ресурсів є нульові, що має місце за повної відсутності будь-якого процесу виробництва. Аналогічно максимальна ефективність може бути досягнута лише у разі використання певних обсягів ресурсів (звичайно ж не нульових). Тому коректними є постановки задач такого типу: досягти максимальної ефективності за заданих витрат чи досягти заданого ефекту за мінімальних витрат.

Оскільки не існує єдиного універсального критерію економічної ефективності, то досить часто вдаються до розгляду багатокритеріальної оптимізації. Хоча задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, утім розроблено математичні методи, що дозволяють будувати компромісні плани, тобто провадити багатокритеріальну оптимізацію.

Найчастіше способи використання багатьох критеріїв у задачах математичного програмування зводяться до штучного об'єднання кількох обраних показників в один критерій. Наведемо такі способи як приклад.

Нехай у задачі обрано m критеріїв оптимальності F_i $(i=\overline{1,m})$. Загальний критерій може мати вигляд суми окремих показників ефективності з відповідними коефіцієнтами:

$$F^* = k_1 F_1 + k_2 F_2 + ... + k_m F_m, \tag{1.5}$$

де $k_1,...,k_m$ — додатні чи від'ємні коефіцієнти. Додатні коефіцієнти відповідають тим критеріям, які потрібно максимізувати, від'ємні — тим, які мінімізуються. Абсолютні значення коефіцієнтів $k_1,...,k_m$ відповідають пріоритету (важливості) того чи іншого показника.

Наприклад, якщо розв'язується виробнича задача, тоді з додатними коефіцієнтами ввійдуть такі величини, як імовірність виконання попередніх замовлень чи обсяг прибутку, одержаного від реалізації товарів і послуг, з від'ємними — затрати ресурсів часу, праці, собівартість одиниці продукції.

Узагальнений критерій може подаватись у вигляді дробу, де в чисельнику — добуток показників, які треба максимізувати, припустимо, $F_1,...,F_n$, а в знаменнику ті, які потрібно мінімізувати $F_{n+1},...,F_m$:

$$F^* = \frac{F_1...F_n}{F_{n+1}...F_m}. \tag{1.6}$$

Загальним недоліком критеріїв (1.5)—(1.6) є те, що існує можливість недостатню ефективність одного критерію компенсувати іншим. Наприклад, значення низької імовірність виконання попередніх замовлень (для (1.6) знаходитиметься в чисельнику) може бути компенсоване за рахунок зменшення використання ресурсів (знаменник дробу (1.6)). Оскільки окремі величини в чисельнику і знаменнику пропорційно зменшилися, то значення дробу не змінюється, проте зроблені на основі таких розрахунків плани можуть викликати негативні наслідки.

Такі критерії порівнюють із запропонованим жартома Львом Толстим «критерієм оцінки людини» у вигляді дробу, де чисельник — справжні достоїнства людини, а знаменник — його думка про себе. Отже, якщо людина майже немає достоїнств (чисельник дробу буде малим числом), проте зовсім відсутня зарозумілість (у знаменнику – нуль), тоді вона буде мати нескінченно велику цінність (так як будь-яке поділене на нуль число дасть нескінченність).

Отже, до використання вказаних способів слід підходити зважено і продумано.

Наступний метод запропоновано І. Ніковським. Оптимальний план знаходять окремо за кожним із критеріїв, отримаємо множину значень F_i^* $\left(i=\overline{1,m}\right)$. На останньому етапі розв'язується початкова задача з єдиним критерієм вигляду

$$\min F = \left|\frac{F_1^* - \overline{F}_1}{F_1^*}\right| = \left|\frac{F_2^* - \overline{F}_2}{F_2^*}\right| = ... = \left|\frac{F_m^* - \overline{F}_m}{F_m^*}\right|, \tag{1.7}$$

де $\overline{F}_i$ $(i=\overline{1,m})$ — значення i-го критерію оптимальності в оптимальному компромісному плані. За такого підходу розв'язок задачі визначається як мінімальне значення модулів відхилень частки кожної цільової функції від її оптимального значення, що робить всі критерії рівноправними. Для урахування переваг одних критеріїв над іншими доцільно застосовувати узагальнений критерій такого вигляду:

$$\min F = k_1\left|\frac{F_1^* - \overline{F}_1}{F_1^*}\right| = k_2\left|\frac{F_2^* - \overline{F}_2}{F_2^*}\right| = ... = k_m\left|\frac{F_m^* - \overline{F}_m}{F_m^*}\right|. \tag{1.8}$$

Недоліками вказаних способів є, по-перше, жорстке співвідношення між значеннями відхилень критеріїв оптимальності, що значно звужує множину допустимих планів; по-друге, одному значенню деякого критерію може відповідати множина інших, причому таких, при яких оптимальний план з економічної позиції ефективніший; по-третє, відсутня методика визначення коефіцієнтів $k_1,...k_m$.

Зведення багатокритеріальної задачі до задачі з одним критерієм може також відбуватися за рахунок виділення з обраного набору показників одного, який вважають найважливішим, — F_k, і намагаються досягти його максимального значення (якщо треба знайти мінімум досить змінити знак показника). Усі інші показники (критерії) є другорядними і на них накладаються обмеження вигляду $F_i \geq z_i$, де z_i — нижня межа значення відповідного показника, або аналогічно $F_i \leq z_i$, якщо треба зафіксувати значення показника на рівні не вище як z_i.

Для виробничої задачі можна виділити як найважливіший показник ефективності прибуток і, максимізуючи його величину, додатково вимагати забезпечення рентабельності виробництва не нижче, а собівартості не вище від указаного рівня. Такі обмеження входять до системи початкових умов задачі.

Останнім розглянемо так званий *метод послідовних поступок*. Усі обрані критерії слід ранжувати у порядку їх важливості: спочатку головний, наприклад, F_1, потім менш важливий — F_2, і т. д. Вважатимемо, що необхідно досягти максимального значення за всіма критеріями (якщо треба знайти мінімум — змінюється знак показника).

Спочатку розв'язується задача з одним головним критерієм (знаходиться значення $\max F_1$), потім призначають деяку невелику за абсолютним значенням поступку ΔF_1, на яку можна змінити (зменшити) значення критерію $\max F_1$ для того, щоб досягти максимального значення за наступним критерієм F_2. Величина поступки залежить від потрібної точності розрахунків і достовірності початкових даних. Далі до системи початкових обмежень задачі приєднуємо обмеження, що встановлює рівень можливого відхилення показника $F_1 \leq \left(\max F_1 - \Delta F_1\right)$ і розв'язуємо нову задачу єдиним критерієм оптимальності F_2 і т. д. Процес розв'язування задачі зазначеним способом вказує, ціною яких поступок досягається потрібний результат.

Із наведених способів очевидно, що багатокритеріальні задачі математичного програмування не мають універсального способу розв'язування. Отже, вибір і коректне застосування будь-якого з них залишається за суб'єктом прийняття рішень. Завдання математичного програмування полягає в представленні потрібної кількості науково обґрунтованої інформації, на основі якої робиться подальший вибір.

1.4. Класифікація задач математичного програмування

У математичному програмуванні виділяють два напрями задач: *детерміновані* і *стохастичні*.

Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, і вся початкова інформація — повністю визначена. У стохастичних задачах використовується початкова інформація, яка містить елементи невизначеності або деякі параметри набувають значень відповідно до встановлених функцій розподілу. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо врожайності задані функціями розподілу, наприклад, нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють суттєвої ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. В іншому випадку адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура і розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається *стохастичним програмуванням*.

Кожен із названих напрямів включає класи задач математичного програмування, які поділяються на інші класи. Схематично класифікацію задач зображено на рис. 1.2. (Поділ, наведений для детермінованих задач, повністю аналогічний для стохастичних.)

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути *статичними* (*однокрокові*) чи *динамічними* (*багатокрокові*). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (системи, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку України до 2015 р., мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2015 рік, а й на всі проміжні роки, тобто враховано динаміку розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним*. У ньому має бути обґрунтована оптимальна (раціональна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих факторів реальні показники щороку можуть відхилятися від планових. Отже, постає потреба коригувати кожний річний план, який має назву *тактичний план*. Тактичні плани визначаються в результат реалізації статичної економіко-математичної моделі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- і багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування викликана насамперед багатовимірністю задачі й означає, що, послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних, причому взятий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умови оптимальності щодо розв'язку, взятого на попередньому кроці. Така процедура може бути більш-менш тісно пов'язана з часом.

Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються одночасно на останній ітерації (кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто якимось чином задаємо допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій дістаємо оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не інтерпретується як багатокроковість економічного процесу (явища).

Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- чи багатокрокові залежно від способу їх розв'язування. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, аби не застосовувати для знаходження оптимального плану складніших методів.

Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі і залежать від рішень керівництва, що їх доводиться приймати з метою досягнення розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначається стратегічним планом.

Далі *задачі математичного програмування* поділяють на *дискретні* і *неперервні*. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. Серед них окремий клас становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень, вони мають назву *задач цілочислового програмування*. Якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення в деяких інтервалах числової осі, то задача є *неперервною*.

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі згадані вище класи задач поділяються на *лінійні* і *нелінійні*. Якщо цільова функція (1.2) та обмеження (1.3) є лінійними функціями, тобто містять змінні x_j у першому або нульовому степені. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих класів є статичні, детерміновані, неперервні лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний спосіб, який називається *симплексним методом*. Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких класів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язування, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються в умовах невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто неадекватні, і тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше за лінійні, оскільки немає універсального методу розв'язування. Для окремих типів нелінійних задач розроблено численні спеціальні ефективні методи розв'язування. Однак на практиці застосовують здебільшого лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід на практиці є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють такі підкласи: *опукле програмування* — цільова функція *вгнута*, якщо вона мінімізується, та *опукла*, якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу ($\leq$) або рівняння, в яких ліві частини є опуклі функції, а праві частини — сталі величини. У разі обмежень типу ($\geq$) ліві їх частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум.

Квадратичне програмування — цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише найбільші класи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підкласи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмувань. Наприклад, як окремий клас розглядають *дробово-лінійне програмування*, коли обмеження лінійні, а цільова функція — дробово-лінійна.

Особливий клас становлять задачі *теорії ігор*, які широко застосовуються в ринковій економіці, адже тут діють дві чи більше конфліктні сторони, які мають частково чи повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор також виокремлюють певні підкласи, наприклад, *ігри двох осіб із нульовою сумою*.

1.5. Приклади побудови лінійних оптимізаційних математичних моделей економічних систем

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об'єкта досліджень вимагає їх ретельного вивчення для з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між елементами системи. У результаті приймаються можливі спрощення і допущення, що, очевидно, погіршує адекватність отриманих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень дає можливість формалізації будь-якої економічної ситуації та її моделювання.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному випадку вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов дослідження.

У процесі використання математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом досліджень, вимагає ґрунтовних знань перш за все економічної суті процесів, які моделюються. Однак удало створена математична модель може бути в подальшому застосована для інших задач, які не стосуються ситуації, що початково моделювалась. Починаючи з робіт Л. В. Канторовича у математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися у наступних розділах).

Усі розглянуті задачі залежно від наявності і точності початкової інформації, мети дослідження, рівня врахування впливу невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульованими як у найпростішому вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності, використовуються нелінійні залежності, необхідне визначення розв'язків з деякої дискретної множини.

Задача визначення оптимального плану виробництва. Для деякої виробничої системи (цех, підприємство, галузь) треба визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання ресурсів системи. У виробництві задіяний встановлений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення та ін. Відомі загальні запаси ресурсів, нормативи витрат кожного ресурсу, прибуток на одиницю виготовленої продукції. Задаються також обмеження на виробництво продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність).

Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про дієту. Деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість кожного за одиницю, кількість необхідних організму поживних речовин і його потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини.

Знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму потрібною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності: мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача. Розглядається певна кількість пунктів виробництва і споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва і споживання не збігаються). Відомі обсяг продукції в кожному пункті виробництва і потреби кожного пункту споживання, також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання.

Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких найкраще врахована необхідність вивезення продукції від виробників і забезпечення вимог споживачів.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей. Розглядається кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляється на кожному підприємстві, а також собівартість виробництва одиниці продукції кожного підприємства.

Необхідно розподілити виробництво продукції по підприємствах у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств.

Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення. Нехай набір видів робіт може виконувати певна кількість кандидатів, причому кожного кандидата може бути призначено лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана лише одним кандидатом. Відома матриця, елементи якої є ефективністю (в обраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. У задачі визначається оптимальний розподіл кандидатів на посади.

Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект виконання робіт.

Задача комівояжера. Розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не повертаючись нікуди двічі, всі міста і повернутись в початкове. Відома матриця, елементи якої — це вартість пересування (чи відстань) між усіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом певного періоду, який розділено на якусь кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом усього часу планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) по кожному з підприємств групи у кожному з підперіодів.

Необхідно визначити, у який спосіб розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Стислі висновки

Специфіка усіх задач математичного програмування пов'язана з тим, що до них, як правило, не можна застосувати методи класичного аналізу під час визначення умовних екстремумів. Навіть у найпростіших задачах лінійний екстремум знаходиться в кутових точках множини розв'язків, тобто в точках, в яких порушується диференційованість. Більш того, класичний метод розв'язання екстремальних задач — метод множників Лагранжа — розроблений на випадок, коли множина умов задана системою рівнянь, а не системою нерівностей.

Друга специфічна особливість задач математичного програмування пов'язана з розміром задач. У практичних задачах кількість змінних і обмежень досить велике та аналізувати екстремальність усіх кутових точок множини умов просто неможливо.

Ці дві специфічні особливості задач математичного програмування і зумовили пошук ефективних методів розв'язання. Звідси мета математичного програмування — розробити аналітичні методи розв'язання задач або створити ефективні обчислювальні схеми, щоб одержати наближений розв'язок.

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Наведіть основні складові оптимізаційної математичної моделі.
2. Розкрийте сутність оптимізаційних задач.
3. Дайте тлумачення такого напряму математичного моделювання, як математичне програмування.
4. Наведіть математичну постановку оптимізаційної задачі.
5. Дайте коротку характеристику класам оптимізаційних задач.
6. Наведіть приклади економічних постановок задач, що приводять до оптимізаційних математичних моделей.

Основні терміни та поняття

- Оптимізація
- Математична модель
- Обмеження задачі
- Цільова функція
- Функціонал
- Критерій оптимальності
- Математичне програмування

Розділ 2

ЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:

- ✓ різні форми запису математичних моделей оптимізаційних економічних задач;
- ✓ геометрично інтерпретувати лінійні оптимізаційні моделі основні властивості розв’язків задачі лінійного програмування;
- ✓ алгоритм симплексного методу розв’язку задач лінійного програмування;
- ✓ комп’ютерні технології розв’язку оптимізаційних задач в універсальному інтегрованому середовищі Mathcad;

а також УМІТИ:

- графічно розв’язувати оптимізаційні економічні задачі;
- розв’язувати економічні задачі симплексним методом;
- застосовувати комп’ютерні програми розв’язку на основі симплекс-методу.

2.1. Область застосування лінійної оптимізаційної математичної моделі в економіці

Переважна кількість економічних задач оптимізації на певному проміжку часу може бути представлена як задачі лінійного програмування. Це означає, що математична формалізація основних економічних закономірностей, що застосовуються у визначенні оптимальних планів, не суперечить лінійній формі рівнянь і нерівностей. Такі твердження протягом півсторічних теоретичних і практичних досліджень у різних країнах світу повністю підтверджені. Світова практика задач оптимізації майже завжди починається з побудови і розв’язку лінійних задач в економіці.

Перелік різних типів економічних задач оптимізації, їх особливості наведені нижче у даному розділі. При цьому подається економічна та математична постановки задач. Безумовно, математичне моделювання в економіці доцільно застосовувати тоді, коли існують розв’язки побудованих математичних моделей задач і дослідник може здобути реальні результати і використати їх на практиці. Тому дуже важливо вивчити методи розв’язку таких задач і реалізацію їх за допомогою комп’ютерних програм.

У даному розділі розглядається найпростіший клас задач. Як було з’ясовано раніше, такі задачі є статичними, використовують детерміновані дані та лінійні функції для опису взаємозв’язків між елементами в моделі. Розв’язок знаходиться на деякій неперервній множині. Наведемо кілька типових задач математичного програмування, сформульованих у термінах лінійного програмування.

Задача визначення оптимального плану виробництва. Для деякої виробничої системи (цех, підприємство, галузь) потрібно визначити план випуску кожного з n видів продукції $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ за умови найкращого способу використання ресурсів системи. У процесі виробництва задіяні m ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення тощо. Відомі загальні запаси кожного ресурсу $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, нормативи витрат кожного ресурсу і прибуток на одиницю виготовленої продукції, відповідно, $a_{ij}\left(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\right)$; $c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Критерій оптимальності: максимум прибутку.

Позначимо $x_1, x_2, ..., x_n$ — кількість першого, другого і т. д. видів продукції відповідно.

Оскільки на одиницю продукції 1-го виду витрачається a_{11} ресурсу 1-го виду, то на виробництво 1-го виду продукції в кількості x_1 необхідно витратити $a_{11}x_1$. На 2-й вид продукції у кількості x_2 витрати 1-го ресурсу будуть $a_{12}x_2$ і т. д.

На виробництво всіх видів продукції буде використано таку кількість 1-го ресурсу: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$. Ця величина має не перевищувати загального обсягу 1-го ресурсу b_1. Отже, обмеження на використання 1-го ресурсу матиме вигляд $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$. Аналогічно записуємо використання всіх виробничих ресурсів. Прибуток від реалізації продукції становитиме $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Таким чином, лінійна економіко-математична модель даної задачі матиме вигляд:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{31}x_2 + ... + a_{3n}x_n \le b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Математична модель виробничої задачі може бути застосована для різних економічних задач, у яких виникає проблема вибору найкращого варіанта розподілу обмеженої кількості ресурсів, хоча на перший погляд постановка задачі не стосується виробничих процесів. Наведемо кілька конкретних прикладів виробничих задач:

Приклад 2.1. Фірма має в розпорядженні оборотні кошти 1 млн грн. Відомі витрати у кожному місяці, а також потрібна обов’язкова кількість оборотних коштів на кінець кожного місяця. Передбачається, що для успішного функціонування фірма витрачатиме суму значно меншу, ніж 1 млн грн. Отже, решту коштів можна вкладати у кредити.

Необхідно визначити оптимальний розподіл оборотних коштів протягом кварталу для досягнення максимального прибутку по відсотках, якщо відомі витрати і потреби в резервах.

1.01 — 30.01: витрати — 80 000 грн;
необхідний запас на 30.01 — 300 000 грн;
1.02 — 28.02: витрати — 30 000 грн;
необхідний запас на 28.02 — 200 000 грн;
1.03 — 31.03: витрати — 50 000 грн;
необхідний запас на 31.03 — 190 000 грн.

Кредит строком на 1 місяць дає 2 % прибутку, строком на 2 місяці — 5 %, і строком на 3 місяці — 8 %.

Побудова математичної моделі. Кредити строком на один місяць можливо надавати у кожному місяці протягом усього періоду, тому позначимо через $x1_1$ — суму кредиту, що надано на один місяць з 1.01, аналогічно $x1_2, x1_3$ — суми одномісячних кредитів, що надані у другому і третьому місяцях відповідно.

Кредити строком на два місяці протягом I кварталу року можливо надавати лише в першому і другому місяці, тому позначимо через $x2_1$ — суму кредиту, що надано на два місяці в січні; $x2_2$ — сума кредиту, що надана в лютому на два місяці. Нарешті, кредит на три місяці може бути видано лише один раз з 1.01, тоді $x3_1$ — сума кредиту наданого в першому місяці на квартал. Домовимося, що кредити надаються першого числа кожного місяця і погашаються першого числа наступного місяця.

Розглянемо ситуацію на початку першого місяця періоду: початкова сума 1 млн грн витрачатиметься на вкладення коштів у всі види кредитів, також у першому місяці потреби в оборотних коштах для господарської діяльності фірми становитимуть 80 000 грн, на кінець місяця фірма розраховує мати резерв 300 000 грн. Отже, перше обмеження моделі описуватиме використання коштів у січні:

$$1000000 - x1_1 - x2_1 - x3_1 - 80000 \geq 300000,$$

в кінці місяця наявні оборотні кошти визначаються

$$S1 = 1000000 - (x1_1 + x2_1 + x3_1) - 80000 - 300000 = 620000 - (x1_1 + x2_1 + x3_1).$$

На початку другого місяця сума $S1$ знову вкладається в кредити, але лише двох видів і забезпечує витрати діяльності. Разом з тим на початку другого місяця повертаються кошти, що є відсотками за одномісячний кредит, який було надано в першому місяці. Враховуючи необхідність резерву на кінець місяця, маємо

$$S1 - (x1_2 - x2_2) + 1{,}2x1_1 - 300000 \geq 200000,$$

що наприкінці другого місяця становитиме суму

$$S2 = S1 - (x1_2 - x2_2) + 1{,}2x1_1 - 500000.$$

Аналогічно запишемо використання коштів у третьому місяці періоду:

$$S2 - x1_3 + 1{,}2x1_2 + 1{,}5x2_1 - 50000 \geq 190000.$$

Загальна сума коштів отриманих по відсотках за кредити буде

$$P = 0{,}2(x1_1 + x1_2 + x1_3) + 0{,}5(x2_1 + x2_2) + 0{,}8x3_1.$$

Таким чином, математична модель матиме вигляд

$$\max P = 0{,}2(x1_1 + x1_2 + x1_3) + 0{,}5(x2_1 + x2_2) + 0{,}8x3_1$$

$$\begin{cases} 1000000 - x1_1 - x2_1 - x3_1 - 80000 \geq 300000, \\ S1 - x1_2 - x2_2 + 1{,}2x1_1 - 300000 \geq 200000, \\ S2 - x1_3 + 1{,}2x1_2 + 1{,}5x2_1 - 50000 \geq 190000. \end{cases}$$

$$xi_j \geq 0, (i = \overline{1,3}), (j = \overline{1,3}).$$

Приклад 2.2. На ринок доставляється картопля з трьох фермерських господарств за ціною за 1 кг 80, 75 і 65 коп. відповідно. На завантаження 1 т картоплі у фермерських господарствах витрачається по 1, 6, 5 хв. відповідно. Замовлено 12 т картоплі і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалось не більше як 40 хв.

Визначити, з яких фермерських господарств і в якій кількості треба доставити картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо колгоспи можуть виділити для продажу 10, 8 і 6 т картоплі.

Побудова математичної моделі. Позначимо x_1 — кількість картоплі, що буде закуплено у першому господарстві, т; x_2, x_3 — кількість картоплі, закупленої у другого і третього господарств, т.

Зафіксуємо потрібну кількість поставок картоплі: $x_1 + x_2 + x_3 = 12$. Наступне обмеження описує затрати часу на завантаження потрібної кількості продукції $x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 40$, враховуємо загальні обмеження по можливості поставок продукції у кожному господарстві:

$$x_1 \le 10;$$
$$x_2 \le 8;$$
$$x_3 \le 6.$$

Вартість закупленої продукції визначається як сума добутків ціни на кількість $F = 80x_1 + 75x_2 + 65x_3$.

Таким чином, математична модель задачі матиме вигляд

$$\min F = 80x_1 + 75x_2 + 65x_3;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 40, \\ x_1 \le 10, \\ x_2 \le 8, \\ x_3 \le 6. \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

Задача про дієту. Деякий раціон складається з *n* видів продуктів. Відомі вартість кожного за одиницю $c_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, кількість необхідних організму поживних речовин *m* і його потреба в кожній *i*-й речовині $b_i \left(i = \overline{1,m}\right)$. В одиниці *j*-го продукту міститься $a_{ij} \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ поживної речовини *i*. Необхідно знайти оптимальний раціон $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму потрібною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності: мінімальна вартість раціону.

Позначимо $x_1, x_2, ..., x_n$ — кількість відповідного *j*-го виду продукції $\left(j = \overline{1,n}\right)$. Система обмежень описуватиме забезпечення в раціоні кожної поживної речовини не нижче від вказаного рівня $b_i \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Економіко-математична модель матиме вигляд

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{31}x_2 + ... + a_{3n}x_n \ge b_3, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Аналогічно до випадку виробничої задачі математична модель задачі про дієту (або про суміш) також може використовуватися для інших постановок економічних задач, які не мають метою безпосередньо складання раціону. По суті цей тип задач дозволяє знаходити оптимальне поєднання відомого набору компонент в одне ціле, причому таке поєднання має задовольняти певні характеристики.

Приклад 2.3. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим як 76, а вміст сірки не більш як 0,3 %. Для виготовлення такого бензину на заводі використовується суміш чотирьох компонентів. Дані про ресурси компонент, які змішуються, їх собівартості, октановому числі та вмісту сірки наведено в таблиці.

Характеристики	Компоненти бензину			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Ресурс, т	700	600	500	300
Собівартість, гр. од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компоненту потрібно використати для того, щоб мати 1000 т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Побудова математичної моделі. Позначимо x_j — кількість *j*-го компоненту в суміші, т, *j*=1, 2, 3, 4.

Перше обмеження забезпечує потрібне значення октанового числа в суміші $68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000$; вміст сірки у суміші не повинен перевищувати 0,3 %: $0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \cdot 1000$; загальна маса утвореної суміші — 1000 т: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$, використання кожного компоненту має не перевищувати його наявного обсягу:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 700, \\ x_2 &\leq 600, \\ x_3 &\leq 500, \\ x_4 &\leq 300. \end{aligned}$$

Собівартість суміші $F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$.

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$$\min F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000, \\ 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \geq 0{,}3 \cdot 1000, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000, \\ x_1 \leq 700, \\ x_2 \leq 600, \\ x_3 \leq 500, \\ x_4 \leq 300. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1{,}4}).$$

Приклад 2.4. Учасник експедиції складає рюкзак і йому необхідно розв’язати питання про те, які скласти продукти. У розпорядженні є м’ясо, мука, сухе молоко, цукор. У рюкзаку залишилось для продуктів лише 45 дм^3 об’єму, до того ж необхідно, щоб сумарна маса продуктів не перевищувала 35 кг. Лікар експедиції рекомендував, щоб м’яса (за масою) було більше муки принаймні в два рази, муки не менше від молока, а молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру. Скільки і яких продуктів потрібно покласти в рюкзак для того, щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Характеристики продуктів наведено в таблиці.

Характеристики	Продукти			
	м’ясо	мука	молоко	цукор
Об’єм (дм^3/кг)	1	1,5	2	1
Калорійність (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Побудова математичної моделі. Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 — маса (в кг) м’яса, муки, молока і цукру відповідно.

Сумарна маса продуктів має не перевищувати 35 кг: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 35$, а об’єм, який вони повинні займати, — не більше від 45 дм^3: $x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 45$.

Крім того, мають виконуватися співвідношення стосовно пропорцій по масі продуктів:

а) м’яса принаймні (в масі) більше в два рази від муки, отже, $x_1 \geq 2x_2$;

б) муки не менше молока $x_2 \geq x_3$;

в) молока хоча б у вісім раз більше від цукру: $x_3 \geq 8x_4$.

Калорійність всього набору продуктів:

$$F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4.$$

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$$\max F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 35, \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 45, \\ x_1 \ge 2x_2, \\ x_2 \ge x_3, \\ x_3 \ge 8x_4. \end{cases}$$
$$x_4 \ge 0\,.$$

Транспортна задача. Розглядається m пунктів виробництва і n пунктів споживання деякої однорідної продукції. Відома кількість виробництва продукції для кожного i-го пункту — $a_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ і потреби кожного j-го $\left(j = \overline{1,n}\right)$ пункту споживання — $b_j\left(j = \overline{1,n}\right)$. Також задана матриця розмірності $m \times n$, елементи якої $c_{ij}\left(i = \overline{1,m} : j = \overline{1,n}\right)$ є вартості транспортування одиниці продукції з i-го пункту виробництва до j-го пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції $X = x_{ij}, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$, за яких найкраще врахована необхідність вивезення продукції від виробників і забезпечення вимог споживачів.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень.

Позначимо x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться від i-го виробника до j-го споживача.

Можна вивезти від кожного виробника продукції не більше ніж є у наявності. Тому для кожного $i\left(i = \overline{1,m}\right)$ має виконуватись умова $x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} \le a_i$.

Забезпечення кожного споживача потрібною кількістю продукції дає умова $x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = b_j$, для кожного $j(j = \overline{1,n})$. Загальна сума перевезень є сумою добутків $c_{ij}x_{ij}, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$. Отже, економіко-математична модель буде

$$\begin{aligned} \min F = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + \\ & c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ... + c_{2n}x_{2n} + \\ & .... \\ & c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + ... + c_{mn}x_{mn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} \le a_1, \\ & x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} \le a_2, \\ & .... \\ & x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} \le a_m. \\ & x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b_1, \\ & x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2, \\ & .... \\ & x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = b_n. \\ & x_{ij} \ge 0, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}) \end{aligned}$$

Як і в двох попередніх випадках, математична модель транспортної задачі може використовуватись і тоді, коли в постановці задачі немає навіть згадки про транспортні витрати, перевезення продукції тощо.

Приклад 2.5. Фермерське господарство спеціалізується на вирощуванні озимої пшениці і має три ділянки землі площею $S_1 = 40$ га, $S_2 = 90$ га, $S_3 = 55$ га. Враховуючи наявну кількість посівного матеріалу, є можливість засіяти всю площу озимою пшеницею трьох сортів. Кількість пшениці сорту «Миронівська 808» забезпечить посів на 70 га, «Безоста 1» — 60 га і «Одеська 51» — 45 га. Урожайність сорту «Миронівська 808» на кожній з ділянок становить 41, 40, 46 ц/га відповідно. Аналогічно для сорту «Безоста 1» маємо 38, 41, 45 ц/га, «Одеська 51» — 30, 28, 40 ц/га.

Знайти оптимальний розподіл посівного матеріалу по земельних ділянках у такий спосіб, щоб мати максимальну кількість товарної продукції.

Побудова математичної моделі. Позначимо x_{ij} — площу, га, з i-ї земельної ділянки, що буде засіяно j-м сортом озимої пшениці (домовимося, що сорти «Миронівська 808», «Безоста 1», «Одеська 51» відповідатимуть номерам 1, 2, 3), $(i = 1,2,3), (j = 1,2,3)$.

Тоді використання площі описує така система обмежень:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 90,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 55.$$

Використання посівного матеріалу:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45.$$

Товарна продукція розраховується як сума добутків урожайностей усіх сортів пшениці на кожній із земельних ділянок, тобто

$$\begin{aligned} F = {} & 41x_{11} + 40x_{21} + 46x_{31} + \\ & + 38x_{12} + 41x_{22} + 45x_{32} + \\ & + 30x_{13} + 28x_{23} + 40x_{33}. \end{aligned}$$

Таким чином, математична модель задачі буде

$$\begin{aligned} \min F = {} & -(41x_{11} + 40x_{21} + 46x_{31} + \\ & + 38x_{12} + 41x_{22} + 45x_{32} + \\ & + 30x_{13} + 28x_{23} + 40x_{33}). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 90, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 55, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60, \\ x_{13} + x_{22} + x_{33} = 45. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ (i = 1,2,3), (j = 1,2,3)$$

2.2. Загальна лінійна оптимізаційна математична модель. Лінійне програмування

Загальна лінійна оптимізаційна математична модель економічних процесів і явищ так звана *загальна задача лінійного програмування* подається як

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \tag{2.1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0. \tag{2.3}$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (2.2) і (2.3), тоді як цільова функція набуває екстремального значення (максимального чи мінімального).

Для довільної оптимізаційної задачі були введенні поняття допустимого та оптимального планів.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють системі обмежень (2.2) і (2.3), називається *допустимим розв'язком*, або *допустимим планом задачі*. Сукупність допустимих розв'язків (планів) задачі утворює *область допустимих розв'язків задачі*.

Опорним планом задачі лінійного програмування називається допустимий план, який задовольняє не менш ніж n лінійно незалежних обмежень системи (2.2) у вигляді строгих рівностей разом з обмеженням (2.3) щодо знака.

Опорний план називається *невиродженим*, якщо містить точно m додатних компонент, в іншому разі опорний план є *виродженим*.

Оптимальним розв'язком (планом) називається той допустимий розв'язок, за якого лінійна функція (2.1) набуває максимального (мінімального) значення.

Задачу (2.1)—(2.3) легко звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2.2) усі b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від'ємне, то, помноживши i-те обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши *додаткову змінну* x_{n+1}: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Аналогічно обмеження $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k$ зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини *додаткову змінну* x_{n+2}, тобто $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$.

Доведемо, що заміна нерівностей рівняннями за допомогою введення додаткової змінної не змінить розв'язку початкової задачі. Розглянемо лінійну нерівність з n невідомими:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b. \tag{2.4}$$

Для зведення нерівності (2.4) до рівняння необхідно до його лівої частини додати деяку невід'ємну величину $x_{n+1} \ge 0$. У результаті матимемо лінійне рівняння, яке містить $n + 1$ невідому змінну:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. Кожному розв'язку $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності (2.4) відповідає єдиний розв'язок $Y^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ рівняння (2.5), який одночасно є розв'язком нерівності (2.4), і навпаки, кожному розв'язку $Y^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ рівняння (2.5) і нерівності (2.4) відповідає єдиний розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності (2.4).

Доведення. Нехай X^* — розв'язок нерівності (2.4), тоді при підстановці $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ нерівність виконується

$$a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^* \le b.$$

Перенесемо ліву частину даної нерівності в праву і позначимо вираз в правій частині через x_{n+1}^* тобто

$$0 \le b - (a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^*) = x_{n+1}^*,$$

отримуємо, що розв'язок $Y^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ задовольняє рівнянню (2.5) і одночасно нерівності (2.4). Дійсно $x_{n+1}^* \ge 0$ і при підстановці його в рівняння маємо

$$\begin{gathered} a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^* + x_{n+1}^* = \\ = a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^* + \left[b - (a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^*)\right] = b. \end{gathered}$$

Навпаки, нехай Y^* задовольняє рівнянню (2.5) і нерівності (2.4), тобто

$$a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^* + x_{n+1}^* = b \ \text{ і } \ x_{n+1}^* \ge 0.$$

Тоді, відкидаючи в лівій частині рівності невід'ємну величину x_{n+1}^*, отримаємо нерівність

$$a_1x_1^* + a_2x_2^* + \ldots + a_nx_n^* \le b.$$

Звідси X^* — розв'язання нерівності (2.4).

Аналогічно доводиться твердження для випадку нерівності виду $(\geq)$.

Використовуючи доведену теорему, можна переходити від системи нерівностей до системи рівнянь.

Таким чином, якщо система обмежень задачі містить нерівності, то введенням у кожну нерівність своєї додаткової змінної її можна перетворити на систему рівнянь. При цьому в функціонал задачі кожна додаткова змінна входить з коефіцієнтом рівним нулю.

Приклад 2.6. Записати в канонічній формі таку задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розв'язування. Помножимо другу нерівність на (—1) і введемо допоміжні змінні x_4 і x_5 для другого і третього обмежень:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 = 0, x_5 \geq 0.$$

Неважко переконатися, що допоміжні змінні, у цьому разі x_4 і x_5, є невід'ємними, причому їх введення не змінює цільової функції.

Отже, будь-яку задачу лінійного програмування можна записати в такій канонічній формі:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.6}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.7}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \tag{2.8}$$

Задачу (2.6) — (2.8) можна розв'язувати на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (–1), тобто

$\max Z = \min(-Z) = \min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n)$.

2.3. Форми запису лінійних оптимізаційних задач

Задачу лінійного програмування зручно записувати за допомогою знака суми Σ. Дійсно, задачу (2.6)—(2.8) можна подати так:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m);$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ще компактнішим є запис задачі лінійного програмування у векторно-матричному вигляді

$$\max Z = CX$$

за умов

$$AX = A_0,$$
$$X = 0,$$

де

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2} & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

є матриця коефіцієнтів при змінних;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ — вектор змінних; $$A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ — вектор вільних членів;

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Часто задачу лінійного програмування зручно записувати у векторній формі:

$$\max Z = CX$$

за умов

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = A_0,$$
$$X \geq 0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є вектори коефіцієнтів при змінних.

2.4. Геометрична інтерпретація лінійних оптимізаційних задач

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \quad (2.9)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $(i = 1, 2, .., m)$. Умови невід'ємності визначають півплощини відповідно з граничними прямими $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Система сумісна, тому півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і являє собою сукупність точок, координати кожної з який є розв'язком даної системи (рис. 2.1).

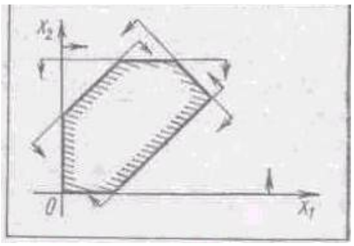


Рис. 2.1

Сукупність цих точок (розв'язків) називають *багатокутником розв'язків*; він може бути точкою, відрізком, промінем, багатокутником, необмеженою багатокутною областю.

Якщо в системі обмежень (2.9) $n = 3$, то кожна нерівність геометрично представляє півпростір тривимірного простору, гранична площина якого $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ $(i = 1, 2, ..,m)$, а умови невід'ємності — півпростори з граничними площинами $x_i = 0$ $(i = 1,2,3)$ відповідно.

Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворять у тривимірному просторі спільну частину, що називається *багатогранником розв'язків*, що може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Нехай у системі обмежень (2.9) $n > 3$; тоді кожна нерівність визначає півпростір n-вимірного простору з граничною гіперплощиною $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{in}x_n = b_i$ $(i = 1, 2, ..,m)$. Кожному обмеженню вигляду (2.9) відповідають гіперплощина і напівпростір, який лежить по один бік цієї гіперплощини, а умови невід'ємності — півпростори з гранипчними гіперплощинами $x_i = 0$ $(i = 1,2,3,..,n)$.

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n-вимірному просторі — опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Таким чином, геометрично задача лінійного програмування являє собою пошук такої точки багатогранника розв'язків, координати якої надають лінійній функції максимальне (мінімальне) значення, причому допустимими розв'язками є всі точки багатогранника розв'язків.

Цільову функцію

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

в n-вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z.

Геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі.

Приклада 2.7. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукровий буряк на площі 20 га, відвівши під цукровий буряк не менше як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур відображено у таблиці.

№ з/п	Техніко-економічний показник із розрахунку на 1 га	Сільськогосподарська культура		Наявний ресурс
		Озима пшениця	Цукрові буряки	
1	Жива праця, людино-днів	5	25	270
2	Механізована праця, людино-днів	2	8	80
3	Вихід товарної продукції, тонн	3,5	40	
4	Прибуток, тис. грн	0,7	1	

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Запишемо економіко-математичну модель структури виробництва озимої пшениці та цукрового буряка, скориставшись такими позначеннями:

x_1 — шукана площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — шукана площа посіву цукрових буряків, га.

Задача лінійного програмування набуває вигляду

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 \tag{2.10}$$

за умов

$$x_1 + x_2 \le 20\,, \tag{2.11}$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270\,, \tag{2.12}$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80\,, \tag{2.13}$$

$$x_2 \ge 5\,, \tag{2.14}$$

$$x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0\,. \tag{2.15}$$

Геометричну інтерпретацію задачі наведено на рис. 2.2.

Область допустимих розв'язків дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад, $x_1 + x_2 \le 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \le 20$.

З цією метою у нерівність $x_1 + x_2 \le 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2 \le 20$.

Цей факт на рис. 2.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (2.11)—(2.15). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис. 2.2 — багатокутник *ABCD*). Цільова функція $Z = 0{,}7x_1 + x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню *Z*. Зокрема, якщо $Z = 0$, маємо $0{,}7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $Z = 3{,}5$, дістаємо пряму $0{,}7x_1 + x_2 = 3{,}5$. Максимального значення Z = 16 цільова функція досягає в точці *C* з координатами $x_1 \approx 13{,}3$; $x_2 \approx 6{,}7$.

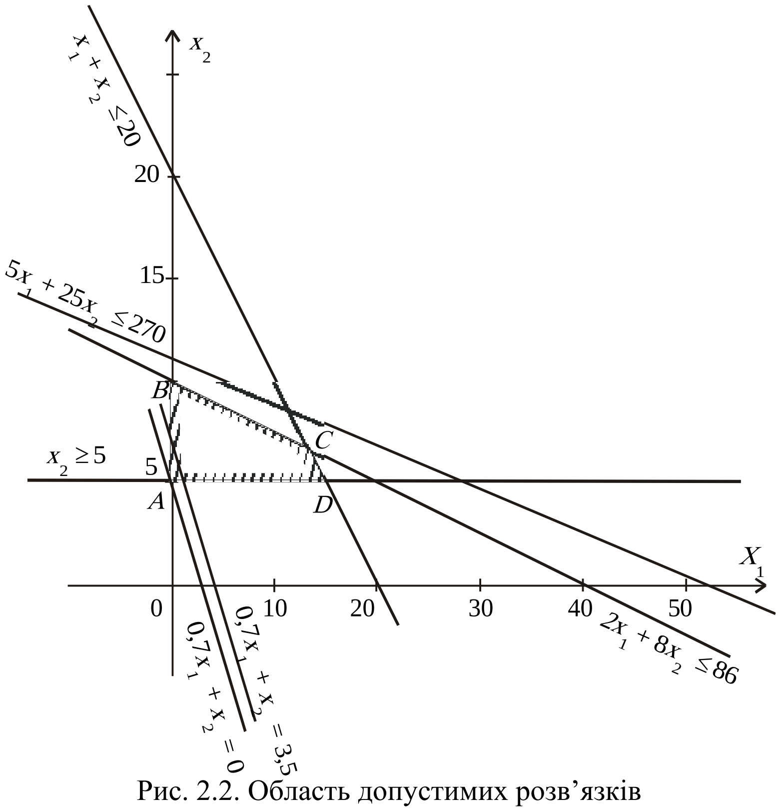


Рис. 2.2. Область допустимих розв'язків

2.5. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Властивості розв'язків задачі лінійного програмування формулюються у вигляді чотирьох теорем (доведення теорем і наслідки наведено нижче).

Властивість 1. (Теорема 2.2.) Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 2 (Теорема 2.3). Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многогранника розв'язків. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього многогранника, то вона досягає його і в будь-який точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Властивість 3 (Теорема 2.4). Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, ..., A_k$ ($k \leq n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Властивість 4 (Теорема 2.5). Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$, що відповідають додатнім x_j, є лінійно незалежними.

Доведемо сформульовані теореми:

Теорема 2.2. Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Доведення. Необхідно довести, що коли X_1 та X_2 — плани задачі лінійного програмування (2.1)—(2.3.), то їх опукла комбінація $X = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ також є планом задачі.

Так як X_1 і X_2 — плани задачі, то виконуються співвідношення

$$AX_1 = A_0, X_1 \geq 0; \; AX_2 = A_0, X_2 \geq 0.$$

Якщо підставити в систему обмежень значення X, отримаємо:

$$AX = A(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2) = \lambda_1AX_1 + \lambda_2AX_2 = \lambda_1A_0 + \lambda_2A_0 =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2)A_0 = A_0.$$

Отримали, що X задовольняє системі обмежень задачі лінійного програмування (2.2), і так як $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, то і $X \geq 0$, тобто задовольняють і умову (2.3). Таким чином доведено, що X — план задачі лінійного програмування.

Теорема 2.3. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многогранника розв'язків. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього многогранника, то вона досягає його і в будь-який точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Доведення. Припустимо, що багатокутник розв'язків обмежений, має скінчену кількість кутових точок. Позначимо його через Q. У двовимірному просторі Q має вид багатокутника, що зображено на рис. 2.3. Позначимо кутові точки $X_1, X_2, .., X_p$, а оптимальний план — X_0.

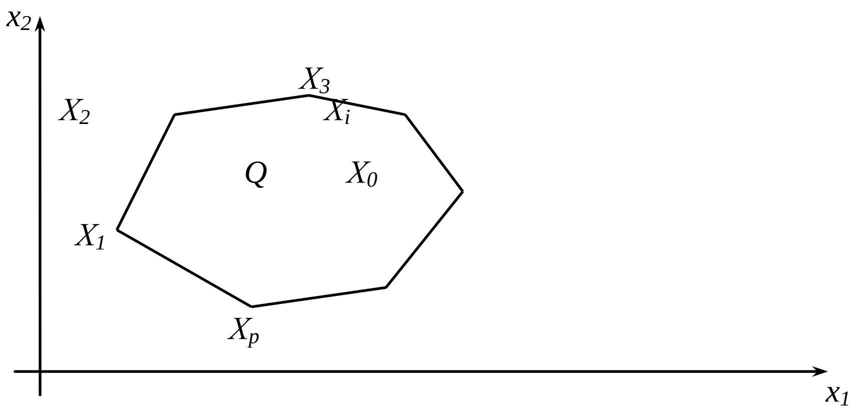


Рис. 2.3

Задача (2.1)—(2.3) розв'язується на максимум, отже при будь-якому X із Q, для значення X_0 виконується нерівність $F(X_0) \geq F(X)$. Якщо X_0 — кутова точка, то перша частина теореми доведена. Припустимо, що X_0 не є кутовою точкою, тоді X_0 є точкою, яка належить опуклій множині (доведено в попередній теоремі). Отже її можливо представити як опуклу лінійну комбінацію кутових точок множини Q, тобто

$$X_0 = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + ... + \lambda_pX_p,$$

$$\lambda_i \geq 0, (i = \overline{1, p}), \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Так як $F(X)$ — лінійна функція, отримаємо:

$$F(X_0) = F(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_p X_p) = \lambda_1 F(X_1) + \lambda_2 F(X_2) + ... + \lambda_p F(X_p) \quad (*)$$

У такому розкладі серед значень $F(X_i)$ $(i = \overline{1, p})$ обираємо найбільше (припустимо, що воно відповідає кутовій точці $X_k (1 \le k \le p)$ і позначимо його через *m*, тобто $F(X_k) = m$. Замінимо в (*) кожне значення $F(X_i)$ цим найбільшим значенням. Тоді, так як $\lambda_i \ge 0, (i = \overline{1, p}), \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, то

$$F(X_0) \le \lambda_1 m + \lambda_2 m + ... + \lambda_p m = m \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = m.$$

За припущенням X_0 — оптимальний план, отже з одного боку $F(X_0) \ge F(X_k) = m$, а з іншого, доведено, що $F(X_0) \le m$, значить, $F(X_0) = m = F(X_k)$, де X_k — кутова точка. Отже, існує кутова точка X_k, в якій лінійна функція досягає максимального значення.

Для доведення другої частини теореми припустимо, що $F(X)$ приймає максимальне значення більш ніж в одній кутовій точці, наприклад у точках $X_1, X_2, .., X_q, (1 \le q \le p)$, тоді $F(X_1) = F(X_2) = ... = F(X_q) = m$. Якщо *X* опукла лінійна комбінація цих кутових точок:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_q X_q,$$

$$\lambda_i \ge 0, (i = \overline{1, q}), \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1, \text{ то}$$

$$F(X) = F(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_q X_q) = \lambda_1 F(X_1) + \lambda_2 F(X_2) + ... + \lambda_q F(X_q) =$$

$$= \lambda_1 m + \lambda_2 m + ... + \lambda_q m = m \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = m,$$

тобто, лінійна функція *F* приймає максимальне значення в довільній точці *X*, яка є опуклою лінійною комбінацією кутових точок $X_1, X_2, .., X_q$.

Зауваження. Якщо багатокутник розв’язків — необмежена область, то не кожну точку можливо представити у вигляді опуклої лінійної комбінації кутових точок області. В такому випадку задачу лінійного програмування з багатокутником розв’язків, що є необмеженою областю можливо звести до задачі з обмеженою областю, вводячи в систему додаткове обмеження $x_1 + x_2 + ... + x_n \le Q$, де Q — достатньо велике число. Введення цього обмеження означає відтинання гіперплощиною $x_1 + x_2 + ... + x_n = Q$ від багатокутної необмеженої області обмеженого багатокутника, для якого виконуються наведена теорема.

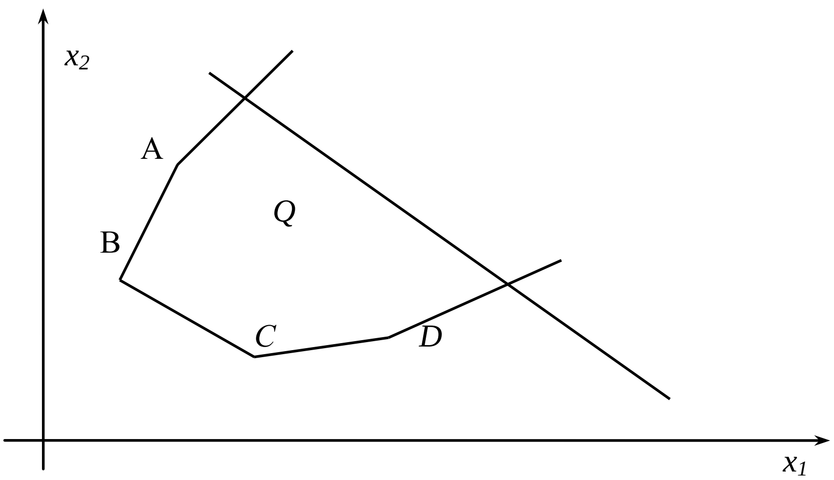


Рис. 2.4

Очевидно, що координати кутових точок, які утворяться в результаті введення нового обмеження, залежать від Q. Якщо в одній з них лінійна функція приймає максимальне значення, то воно залежить від Q; змінюючи Q, значення функціоналу можливо зробити як завгодно великим, а це означає, що лінійна функція не обмежена на багатограннику розв’язків.

Теорема 2.4. Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, ..., A_k$ $(k \le n)$ у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$, лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Доведення. Припустимо, що точка X не є кутовою. Тоді вона може бути представлена як опукла лінійна комбінація двох інших точок X_1 та X_2 багатокутника розв'язків, тобто

$$X = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2,\ \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Компоненти векторів X_1 та X_2, значення λ_1 і λ_2 невід'ємні і останні n — k компонент вектора X дорівнюють нулеві, тому відповідні n — kкомпонент векторів X_1 та X_2 також повинні бути рівними нулю, тобто

$$X_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1, 0, ..., 0),$$
$$X_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_k^2, 0, ..., 0).$$

Оскільки X_1 та X_2 — плани, то

$$A_1x_1^1 + A_2x_2^1 + ... + A_kx_k^1 = A_0,$$
$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + ... + A_kx_k^2 = A_0.$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, отримаємо:

$$(x_1^1 - x_1^2)A_1 + (x_2^1 - x_2^2)A_2 + ... + (x_k^1 - x_k^2)A_k = 0.$$

За припущенням вектори $A_1, A_2, ..., A_k$ лінійно незалежні, тому останнє співвідношення виконується, якщо

$$(x_1^1 - x_1^2) = 0; (x_2^1 - x_2^2) = 0; ... (x_k^1 - x_k^2) = 0.$$

Звідси $x_1^1 = x_1^2; (x_2^1 = x_2^2; ... x_k^1 = x_k^2.$

Отже, X неможливо представити як опуклу лінійну комбінацію двох інших точок багатокутника розв'язків. Значить X — кутова точка.

Теорема 2.5. Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$, що відповідають додатнім x_j, є лінійно незалежними.

Доведення. Не втрачаючи загальності можна покласти нерівними нулю перші k компонент вектора X, таким чином

$$\sum_{i=1}^{k} A_ix_i = A_0.$$

Наведемо доведення від зворотного. Припустимо, що система векторів $A_1, A_2, ..., A_k$ лінійно залежна. Тоді існують такі числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ не всі рівні нулю, при яких виконується співвідношення:

$$\beta_1A_1 + \beta_2A_2 + ... + \beta_kA_k = 0$$

За умовою

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... x_kA_k = A_0.$$

Задамо деяке число $\varepsilon > 0$, помножимо на нього першу рівність, далі додамо і віднімемо результат із другого рівняння:

$$(x_1 + \varepsilon\beta_1)A_1 + (x_2 + \varepsilon\beta_2)A_2 + ... + (x_k + \varepsilon\beta_k)A_k = A_0,$$
$$(x_1 - \varepsilon\beta_1)A_1 + (x_2 - \varepsilon\beta_2)A_2 + ... + (x_k - \varepsilon\beta_k)A_k = A_0.$$

Таким чином, система рівнянь задачі лінійного програмування $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0$ має два розв'язки, які можуть і не бути планами.

$$X_1 = (x_1 + \varepsilon\beta_1; x_2 + \varepsilon\beta_2; ...; x_k + \varepsilon\beta_k, 0, ..., 0)$$
$$X_2 = (x_1 - \varepsilon\beta_1; x_2 - \varepsilon\beta_2; ...; x_k - \varepsilon\beta_k, 0, ..., 0).$$

Всі $x_i > 0$, тому число $\varepsilon > 0$ можливо обрати настільки малим, що всі перші компоненти X_1 та X_2 прийматимуть додатні значення, тоді X_1 та X_2 — плани. При цьому $1/2\,X_1 + 1/2\,X_2 = X$, тобто X — опукла лінійна комбінація точок X_1 та X_2, що протирічить умові теореми, оскільки X — кутова точка.

Значить припущення стосовно лінійної залежності векторів $A_1, A_2, ..., A_k$ привело до протиріччя, отже воно є невірним і система векторів — лінійно незалежна.

Наслідок 1. Так як вектори $A_1, A_2, ..., A_n$ мають розмірність m, то кутова точка багатокутника розв'язків має не більш ніж mдодатніх компонент $x_i > 0, (i = \overline{1, m})$.

Наслідок 2. Кожній кутовій точці багатогранника розв'язків відповідає $k \le m$ лінійно незалежних векторів системи $A_1, A_2, ..., A_n$.

З наведених властивостей маємо:

якщо функціонал задачі лінійного програмування обмежений на багатограннику розв'язків, то:

1) існує така кутова точка багатогранника розв'язків, у якій лінійний функціонал досягає свого оптимального значення;

2) кожний опорний план відповідає кутовій точці багатогранника розв'язків.

Тому, для розв'язання задачі лінійного програмування необхідно досліджувати лише кутові точки багатогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

Припустимо, що система (2.16) за умов (2.18) сумісна і багатокутник її розв'язків обмежений.

2.6. Графічний метод розв'язування лінійних оптимізаційних задач

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач з двома змінними, а також деяких тривимірних задач, застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а для задачі з кількістю змінних більше трьох графічне зображення взагалі неможливе.

Розглянемо задачу.

Знати

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{2.16}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\le, =, \ge\} b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m \end{cases} \tag{2.17}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{2.18}$$

Припустимо, що система (2.16) за умов (2.18) сумісна і багатокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування кожне i-те обмеження-нерівність у (2.17) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_1$ (i = 1, 2, …, m). Системою обмежень (2.17) подається спільна частина, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множина точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі. Таку множину точок називають ***багатокутником розв'язків***, або ***областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування***.

Умова (2.18) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2$ = const.

Скористаємося для графічного розв'язування задачі лінійного програмування властивостями, наведеними в § 2.5:

якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин багатокутника розв'язків. А якщо цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині багатокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої у (2.16) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких далі кроків.

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.17) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\overrightarrow{N} = (c_1;\ c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора N.
6. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ у напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

Цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині A багатокутника розв'язків (рис. 2.5).

Максимального значення цільова функція досягає у будь-якій точці відрізка AB (рис. 2.6). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: рис. 2.7 — цільова функція не обмежена згори; рис. 2.8 — система обмежень задачі несумісна).

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

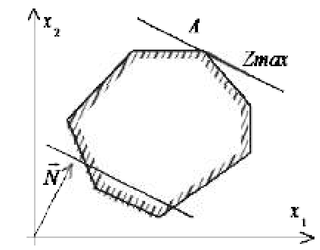


Рис. 2.5

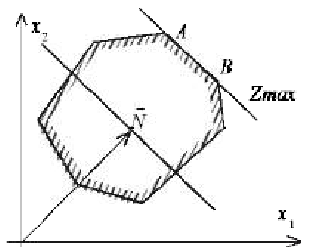


Рис. 2.6

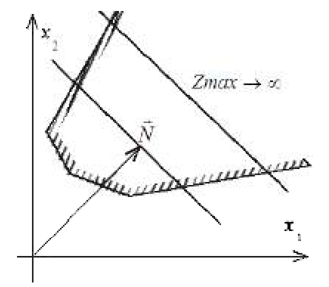


Рис. 2.7

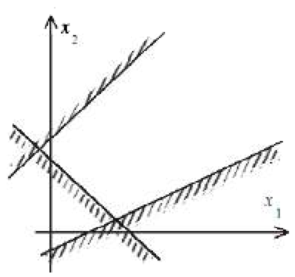


Рис. 2.8

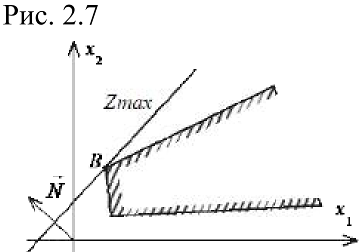


Рис. 2.9

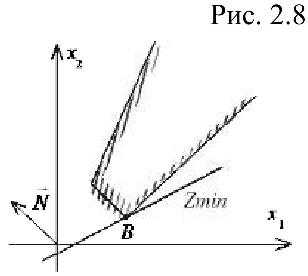


Рис. 2.10

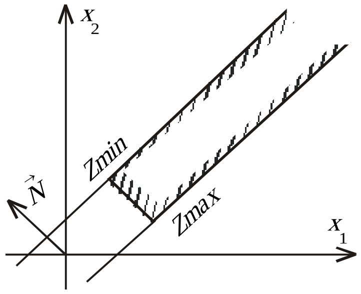


Рис. 2.11

Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 2.9 і 2.10). На рис. 2.9 у точці *B* маємо максимум, на рис. 2.10 у точці *B* — мінімум, на рис. 2.11 показано, що в разі необмеженої області допустимих планів цільова функція набуває максимальне і мінімальне значення.

Розв'язувати графічним методом можливо також задачі лінійного програмування *n*-вимірного простору, де $n > 3$, якщо при зведенні системи нерівностей задачі до системи рівнянь, шляхом введення додаткових змінних, число змінних *n* на дві більше, ніж число обмежень *m*, тобто $n - m = 2$.

Тоді, як відомо з курсу вищої математики, можливо дві з *n* змінних, приміром x_1 та x_2, обрати в якості вільних, а інші *m* зробити базисними і виразити через вільні. Припустимо, що це зроблено. Отримаємо $m = n - 2$ рівняння вигляду:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3, \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n. \end{cases}$$

Оскільки всі значення $x_i \geq 0, (i = \overline{1, n})$ мають виконуватись умови:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0, \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0. \end{cases} \quad (2.18.1)$$

Розглянемо, як зобразити ці умови геометрично. Візьмемо, наприклад, першу з них:

$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0.$$

Покладемо величину x_3 рівною своєму крайньому значенню – нуль. Отримаємо рівняння

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0.$$

Це рівняння прямої. Для такої прямої $x_3 = 0$, по одну сторону від неї $x_3 > 0$, по іншу $x_3 < 0$. Відмітимо ту сторону прямої $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$, де $x_3 > 0$.

Аналогічним чином побудуємо і всі інші обмежуючі прямі $x_4 = 0$; $x_5 = 0$;..; $x_n = 0$ і відмітимо для кожної півплощину, де відповідна змінна більше нуля.

Таким чином отримали $n - 2$ прямі та дві осі координат ($x_1 = 0$, $x_4 = 0$). Кожна з них визначає півплощину, де виконується умова $x_i > 0, (i = \overline{1, n-2})$. Частина площини в x_1Ox_2 належить одночасно всім півплощинам утворюючи багатокутник допустимих розв'язків.

Припустимо, що в задачі необхідно знайти максимальне значення функціонала:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Підставимо вирази для x_3, x_4; x_5;..; x_n з (V) у функціонал, зведемо подібні доданки і отримаємо вираз лінійної функції *F* усіх *n* змінних лише через дві вільні змінні x_1 та x_2. Отримаємо:

$$F = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2,$$

де γ_0 — вільний член, якого в початковому вигляді функціоналу не було.

Очевидно, що лінійна функція $F' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$ досягає свого максимального значення при тих самих x_1 та x_2, що і $F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$. Отже процедура відшукання оптимального плану з множини допустимих далі проходить за алгоритмом для випадку двох змінних.

Приклад 2.8. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування.

$$\min F = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5; \\ x_1 + x_2 - x_5 = -4; \\ x_2 + x_6 = 5; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7. \end{cases}$$

$$x_i > 0, (i = \overline{1,7}).$$

Розв'язання. Маємо $n = 7$ – кількість змінних, $m = 5$ – кількість обмежень. Оберемо в якості вільних змінних x_1 та x_2 і виразимо через них всі інші базисні змінні, маємо з першого рівняння

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 4. \qquad (2.18.2)$$

З третього рівняння:

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4. \qquad (2.18.3)$$

З четвертого:

$$x_6 = -x_2 + 5. \qquad (2.18.4)$$

Підставляючи (2.18.2) у друге рівняння системи і (2.18.3) в останнє, розв'язуємо їх відносно x_4 та x_7, отримаємо:

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1;$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6.$$

Далі за алгоритмом встановлюємо $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ – координатні осі; інші обмежуючі прямі знаходимо поклавши $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$. Багатокутник допустимих розв'язків зобразимо на рис. 2.12.

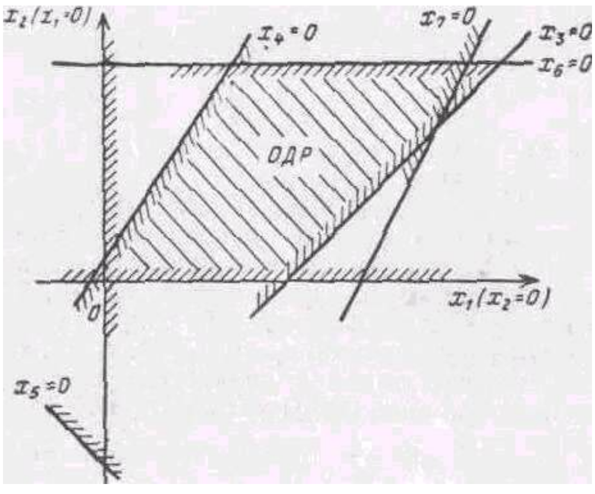


Рис. 2.12

Знайдемо вигляд функціоналу, якщо він виражений через x_1, x_2. Оскільки знайдені вирази для x_3, x_4; x_5;. x_6 ; x_7 через вільні змінні, маємо:

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 + x_2 + 4, \\ x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1, \\ x_5 = x_1 + x_2 + 4, \\ x_6 = -x_2 + 5, \\ x_7 = -x_1 - 1/2\, x_2 + 6. \end{cases} \quad (2.18.4)$$

Підставляючи дані вирази у функціонал і привівши подібні члени, отримаємо: $F = -5x_1 - 2x_2 - 12$. Відкидаючи вільний член, маємо: $F' = -5x_1 - 2x_2$. Будуємо вектор $\vec{N}$ (-5, 2), перпендикулярно до нього пряму F'. Рухаючи пряму F' у напрямку, протилежному N (необхідно знайти мінімальне значення функції F), отримаємо точку мінімуму – А (рис. 2.10).

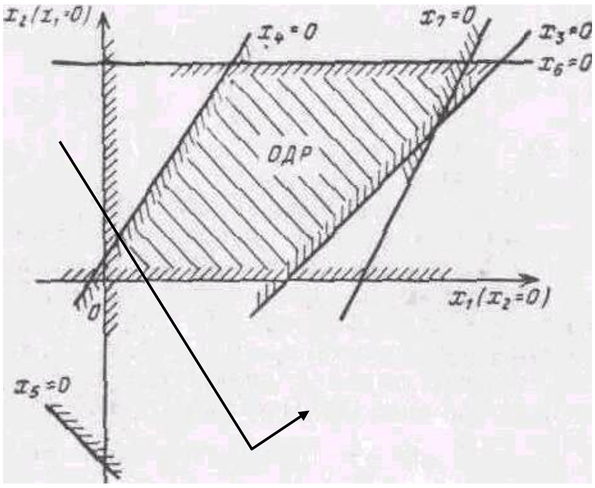


Рис. 2.13

У точці А перетинаються дві обмежуючі прямі x_6=0, x_7=0. Отже, необхідно розв'язати систему

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0, \\ -x_1 - 1/2\, x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є x_1^*=8,5; x_2^*=5. Підставляємо ці значення в (2.18.4), знайдемо оптимальні значення базисних змінних:

$$x_3^*=0{,}5;\ x_4^*=16{,}5;\ x_5^*=17{,}5;\ x_6^*=0;\ x_7^*=0.$$

Підставляючи отримані значення в лінійну функцію F', отримаємо:

$$F' = -5 \cdot 8{,}5 - 2 \cdot 5 - 12 = -64{,}5.$$

2.7. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості необхідно застосовувати загальний метод розв'язування задач лінійного програмування. З властивостей розв'язків задачі лінійного програмування відомо: оптимальний розв'язок задачі має знаходитись в одній із кутових точок багатогранника допустимих розв'язків. Тому найпростіший спосіб відшукання оптимального плану потребує перебору всіх кутових точок (можливих допустимих планів задачі). Кожний опорний план визначається системою m лінійно незалежних векторів, які містяться в системі обмежень задачі з n векторів $A_1, A_2, ..., A_n$, отже загальна кількість опорних планів визначається кількістю комбінацій $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Задачі, що описують реальні економічні процеси мають значну розмірність і простий перебір всіх можливих опорних планів таких задач є дуже складним, навіть за умови застосування сучасних ЕОМ. Отже необхідне використання методу, який дає можливість скоротити кількість обчислень. Такий метод запропоновано американським ученим Дж. Данцігом у 1949 році – так званий ***симплекс-метод***.

Ідея методу полягає в здійсненні направленого перебору допустимих планів, таким чином, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який є хоча б не гіршим за попередній. Значення функціоналу при переході змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Процес розв'язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипові обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод — це поетапна обчислювальна процедура, яка дозволяє, починаючи з відомого опорного плану, за скінчену кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

2.7.1. Початковий опорний план. Розглянемо задачу лінійного програмування подану в канонічній формі:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = 1,2,\ldots,n).$$

Не втрачаючи загальності, припустимо, що система містить перші m одиничних векторів:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.19}$$

$$x_j \geq 0 (j = 1,2,\ldots,n) \tag{2.20}$$

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{2.21}$$

Система (2.19) у векторній формі матиме вигляд:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \ldots + x_nA_n = A_0, \tag{2.22}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ldots, \ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ – лінійно незалежні одиничні вектори m-вимірного простору, що утворюють одиничну матрицю і складають базис цього простору. Тому в розкладі (2.22) базисними змінними будуть $x_1, x_2, \ldots, x_m$, інші – вільні змінні. Покладемо всі вільні змінні рівними нулю $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \ldots, x_n = 0$. Оскільки $b_i \geq 0 (i = \overline{1,m})$, а вектори $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – одиничні, отримаємо один із розв'язків системи (2.19), тобто допустимий план.

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0). \tag{2.23}$$

Такому плану відповідає розклад

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0, \tag{2.24}$$

де $A_1, A_2, ..., A_m$ – лінійно незалежні і за властивістю 3 розв'язків задачі лінійного програмування план X_0 є кутовою точкою багатогранника розв'язків, а отже може бути початковим опорним планом.

2.7.2. Перехід від одного опорного плану до іншого. Розглянемо, як виходячи з початкового опорного плану (2.23) перейти до наступного опорного плану, що відповідає процесу перебору кутових точок багатогранника розв'язків.

Оскільки $A_1, A_2, ..., A_m$ є базисом m-вимірного простору, то кожен з векторів співвідношення (2.22) може бути розкладений за векторами базису причому єдиним чином:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i, j = 1,2,...,n.$$

Розглянемо такий розклад для довільного не базисного вектора, наприклад, для A_{m+1}:

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+1}A_2 + ... + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1}. \tag{2.25}$$

Припустимо, що у виразі (2.25) існує хоча б один додатній коефіцієнтів $x_{i,m+1}$.

Введемо до розгляду деяку поки що невідому величину $\theta > 0$, помножимо на неї обидві частини рівності (2.25) і віднімемо результат з рівності (2.24), маємо:

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})A_2 + ... + (x_m - \theta x_{m,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \tag{2.26}$$

Таким чином вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1}; x_2 - \theta x_{2,m+1}; ... x_m - \theta x_{m,m+1}; \theta; 0,...,0)$$

є планом у тому випадку, коли його компоненти невід'ємні. За припущенням $\theta > 0$, отже ті компоненти вектора X_1, в які входять $x_{i,m+1} \le 0$, будуть невід'ємними, тому необхідно розглядати лише ті компоненти, які містять додатні $x_{i,m+1} (i = 1,2,...,m)$. Отже, необхідно знайти таке значення $\theta > 0$, при якому для всіх $x_{i,m+1} > 0$ буде виконуватися умова невід'ємності плану задачі:

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \ge 0. \tag{2.27}$$

З (2.27) отримуємо, що для шуканого $\theta > 0$ має виконуватися умова $\theta \le \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$. Отже, вектор X_1 буде планом задачі для будь-якого θ, що задовольняє умову

$$0 < \theta \le \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}},$$

де мінімум знаходимо по тих i, для яких $x_{i,m+1} > 0$.

Опорний план не може містити більш ніж m додатніх компонент, тому в плані X_1 необхідно перетворити в нуль хоча б одну з компонент. Припустимо, що $\theta = \theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$ для деякого значення i, тоді відповідна компонента плану X_1 перетвориться в нуль. Нехай це буде перша компонента плану, тобто

$$\theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Підставимо значення θ^* у вираз (2.26):

$$(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1})A_2 + ... + (x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1})A_m +$$
$$+ \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

якщо позначити $x_i - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{i,m+1} = x'_i \quad (i = \overline{2,m})$, $\frac{x_1}{x_{1,m+1}} = x'_{m+1}$, то рівняння можна подати у вигляді розкладу:

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + ... + x'_m A_{m+1} + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0,$$

якому відповідає такий опорний план:

$$X_2 = (0; x'_2; x'_3; ...; x'_m; x'_{m+1}; 0; ...; 0).$$

Для визначення наступного плану необхідно аналогічно продовжити процес: будь-який вектор, що не входить у базис, розкласти за базисними векторами, а потім визначити таке $\theta^* > 0$, для якого один з векторів виключається з базису.

Узагальнюючи розглянутий процес, маємо: визначення нових опорних планів полягає у виборі вектора, який має ввійти в базис і вектора, що має вийти з базису. Така процедура відповідає переходу від одного базису до іншого за допомогою методу Жордана–Гауса.

Необхідно відмітити, що для випадку коли вектор A_{m+1} підлягає включенню в базис, а в його розкладі (2.25) всі $x_{i,m+1} \le 0$, то, очевидно, не існує такого $\theta > 0$, який виключав би один із векторів розкладу (2.26). У такому випадку план X_1 містить m+1 додатних компонент, отже система векторів $A_1, A_2, ..., A_m, A_{m+1}$ буде лінійно залежною і визначає не кутову точку багатогранника розв'язків, а функціонал не може в ній досягати свого максимального значення. Це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків.

2.7.3. Оптимальний розв'язок. Критерій оптимальності плану. Симплексний метод здійснює направлений перебір опорних планів, що дозволяє переходити від одного плану до іншого, який є хоча б не гіршим від попереднього за значенням, що він надає функціоналу. Отже, окремим питанням постає вибір вектору, який необхідно вводити в базис при здійсненні ітераційної процедури симплексного методу.

Розглянемо задачу лінійного програмування (2.19)–(2.21).

Припустимо, що вона має опорні плани і вони є невиродженими. Розглянемо початковий опорний план виду (2.23):

$$X_0 = \left(x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0\right).$$

Такому плану відповідає розклад за базисними векторами

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = A_0 \qquad (2.28)$$

і значення функціоналу (2.21):

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_m x_m = F(X_0). \qquad (2.29)$$

Кожен із векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ можливо розкласти за векторами базису, причому єдиним чином:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + ... + x_{mj} A_m = A_j \; (j = \overline{1,n}), \qquad (2.30)$$

а тому такому розкладу відповідатиме і єдине значення функціоналу:

$$F_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + ... + c_m x_{mj} \; (j = \overline{1,n}). \qquad (2.31)$$

Позначимо через c_j коефіцієнт функціоналу, що відповідає вектору A_j, та $\Delta_j = F_j - c_j$ (називають оцінками відповідних векторів плану) $(j = \overline{1,n})$. Тоді справедливим є наступне твердження – ***умова оптимальності плану*** задачі лінійного програмування: якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів $A_j \, (j = \overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову

$$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0\,, \tag{2.32}$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (2.19)–(2.21).

Аналогічно формулюється умова оптимальності плану задачі на відшукання мінімального значення функціоналу: якщо для деякого плану X_0 розклад усіх векторів $A_j\,(j=\overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову

$$\Delta_j = F_j - c_j \leq 0\,, \tag{2.33}$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування.

Таким чином, для того щоб план задачі лінійного програмування був оптимальним необхідно і достатньо, щоб його оцінки $\Delta_j = F_j - c_j$ були невід'ємними для задачі на максимум і $\Delta_j = F_j - c_j \leq 0$ для задачі на мінімум.

Умови оптимальності планів задач лінійного програмування є наслідками двох теорем. При введених у даному параграфі припущеннях і позначеннях сформулюємо відповідні теореми, а також наведемо їх доведення.

Теорема 2.6. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j < 0$, то план X_0 не є оптимальним і можливо побудувати такий план *X*, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) > F(X_0)$.

Доведення. Помножимо (2.30) і (2.31) на $\theta > 0$ і віднімемо результати відповідно з (2.28) і (2.29), отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0 \ (*)$$

$$\begin{aligned}(x_1 - \theta x_{1j})c_1 + (x_2 - \theta x_{2j})c_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j &= \\ = F(X_0) - \theta(F_j - c_j) = F(X_0) - \theta F_j + \theta c_j&.\end{aligned} \tag{2.33.1}$$

У співвідношенні (2.33.1) до обох частин додається величина θc_j для $(j=\overline{1,n})$. У (*) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ додатні, тому завжди можливо знайти таке $\theta > 0$, що всі коефіцієнти при векторах $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_j$ були невід'ємними, іншими словами отримати новий план задачі виду:

$X = (x_1 - \theta x_{1j}; x_2 - \theta x_{2j}; \ldots; x_m - \theta x_{mj}; \theta; 0; \ldots; 0)$, якому згідно (2.33.1) відповідає значення функціоналу

$$F(X) = F(X_0) - \theta(F_j - c_j). \tag{2.33.2}$$

Так як за умовою теореми $F_j - c_j < 0$ і $\theta > 0$, то $F(X) > F(X_0)$. Що і потрібно було довести.

Якщо розглядається задача аналогічна (2.19)–(2.21), проте відшукується мінімальне значення функціоналу, формулюється така теорема.

Теорема 2.7. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним і можливо побудувати такий план *X*, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) < F(X_0)$.

Доведення аналогічно попередньому випадку.

2.7.4. Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом. Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану задачі лінійного програмування за допомогою симплексного методу, знайти оптимальний план.

Продовжимо розгляд задачі (2.19)–(2.21), опорний план якої $X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0)$. Для дослідження даного плану на оптимальність (за умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування) необхідно вектори $A_j\,(j=\overline{1,n})$ системи (2.19) розкласти за базисними $A_1, A_2, \ldots, A_m$ і розрахувати значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$.

Усі подальші обчислення зручно проводити в ***симплексній таблиці*** (табл. 2.1).

У стовпці «Базис» записані змінні, що відповідають базисним векторам, у стовпці «$С_б$» – коефіцієнти функціоналу відповідних базисних векторів. У стовпці «План» – початковий опорний план X_0, у цьому ж стовпці в результаті обчислень отримаємо оптимальний план, у стовпцях

$x_j (j=\overline{1,n})$ записані коефіцієнти розкладу кожного *j*-го вектора по базису, які відповідають у першій симплексній таблиці коефіцієнтам при змінних у системі (2.19). В (*m+1*)-му рядку в стовпці «План» записуємо значення функціоналу для початкового опорного плану $F(X_0)$, а в інших стовпцях x_j – значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$. Цей рядок симплексної таблиці називають ***оцінковим***.

Значення $F(X_0)$ знаходиться при підстановці компонент опорного плану в цільову функцію, а значення $F(X_j)$ – при підстановці коефіцієнтів розкладу кожного *j*-го вектора за векторами базису, тобто ці значення в табл. 2.1 отримують як скалярний добуток:

$$F(X_0) = C_‡ X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i ,$$

$$F_j = F(X_j) = C_‡ X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, j = 1,2,...,n ,$$

де c_i – коефіцієнти функціоналу, що відповідають векторам базису.

Після заповнення табл. 2.1 розраховують значення оцінок плану (останній рядок): $\Delta_j = F_j - c_j = F(X_j) - c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right) - c_j, j = 1,2,...,n$. Далі згідно умови оптимальності плану задачі лінійного програмування, якщо всі $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ для задачі на максимум, то план є оптимальним. Припустимо, що одна з оцінок $\Delta_j = F_j - c_j < 0$, тоді план X_0 не є оптимальним і необхідно здійснити перехід до наступного опорного плану, якому буде відповідати більше значення функціоналу. Якщо від'ємних оцінок кілька, то включенню в базис підлягає вектор, який обирається як $\min(F_j - c_j)$, де мінімум знаходимо для тих індексів *j*, де $\Delta_j = F_j - c_j < 0$. Якщо існує кілька однакових значень оцінок, що відповідають $\min(F_j - c_j)$, то з відповідних їм векторів у базис включають той, якому відповідає максимальне значення функціоналу.

Якщо хоча б для однієї від'ємної оцінки $\Delta_j = F_j - c_j < 0$ усі коефіцієнти розкладу a_{ij} відповідного вектора недодатні, це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків, тобто багатогранник у даному випадку представляє собою необмежену область і розв'язок задачі $X = \infty$.

Нехай $\min(F_j - c_j) = F_k - c_k = \Delta_k$, тобто мінімальне значення досягається для *k*-го вектора $m \leq k \leq n$. Тоді в базис включається вектор A_k. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для того, щоб обрати вектор, який необхідно вивести з базису (згідно процедури переходу від одного опорного плану задачі до іншого § 2.7.2), розраховують останній стовпчик табл. 2.1 – значення θ.

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}, i = 1,2,...,m, a_{ik} > 0 .$$

З розрахованих значень необхідно обрати найменше $\theta^* = \min \theta_i, i = 1,2,...,m, a_{ik} > 0$. Тоді з базису виключають *і*-ий вектор, якому відповідає θ^*.

Припустимо, що $\theta^* = \min \theta_l = \frac{b_l}{a_{lk}}$ відповідає вектору, що знаходиться в *l*-му рядку табл. 2.1. Відповідний рядок симплексної таблиці називатиметься ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається елемент симплексної таблиці a_{lk}, який називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{lk} і методу Жордана—Гауса розраховують нову симплексну таблицю, що визначатиме наступний опорний план задачі.

Для визначення нового опорного плану необхідно всі вектори розкласти за векторами нового базису. Вектор A_k, який необхідно вводити в базис, у розкладі за початковим базисом має вигляд:

$$A_k = a_{1k} A_1 + ... + a_{lk} A_l + ... + a_{mk} A_m . \tag{2.34}$$

Вектор A_l виходить з базису і його розклад за новим базисом отримаємо з виразу (2.34):

$$A_l = \frac{1}{a_{lk}} \left(A_k - a_{1k} A_1 - ... - a_{mk} A_m \right) . \tag{2.35}$$

Таблиця 2.1

i	Базис	$C_б$	План	c_1	c_2	..	c_l	..	c_m	c_{m+1}	..	c_j	..	c_k	..	c_n	θ
				x_1	x_2	..	x_l	..	x_m	x_{m+1}	..	x_j	..	x_k	..	x_n	
1	x_1	c_1	b_1	1	0	..	0	..	0	$a_{1,m+1}$	..	a_{1j}	..	a_{1k}	..	a_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b_2	0	1	..	0	..	0	$a_{2,m+1}$	..	a_{2j}	..	a_{2k}	..	a_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0000l	x_l	c_l	b_l	0	0	..	1	..	0	$a_{l,m+1}$	..	a_{lj}	..	a_{lk}	..	a_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
00m	x_m	c_m	b_m	0	0	..	0	..	1	$a_{m,m+1}$	..	a_{mj}	..	a_{mk}	..	a_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \ge 0$		$F(X_0)$	0	0	..	0	..	0	Δ_{m+1}	..	Δ_j	..	Δ_k	..	Δ_n	

i	Базис	$C_б$	План	c_1	c_2	..	c_l	..	c_m	c_{m+1}	..	c_j	..	c_k	..	c_n
				x_1	x_2	..	x_l	..	x_m	x_{m+1}	..	x_j	..	x_k	..	x_n
1	x_1	c_1	b_1	1	0	..	0	..	0	$a_{1,m+1}$	..	a_{1j}	..	a_{1k}	..	a_{1n}
2	x_2	c_2	b_2	0	1	..	0	..	0	$a_{2,m+1}$	..	a_{2j}	..	a_{2k}	..	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
00l	x_l	c_l	b_l	0	0	..	1	..	0	$a_{l,m+1}$	..	a_{lj}	..	a_{lk}	..	a_{ln}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0m	x_m	c_m	b_m	0	0	..	0	..	1	$a_{m,m+1}$	..	a_{mj}	..	a_{mk}	..	a_{mn}

Розклад за початковим базисом вектора A_0 має вигляд:

$$A_0 = b_1 A_1 + \ldots + b_l A_l + \ldots + b_m A_m \, . \tag{2.36}$$

Для запису розкладу вектора в новому базисі підставимо вираз (2.35) у рівняння (2.36), маємо:

$$\begin{gathered} A_0 = b_1 A_1 + \ldots + b_l \left[\frac{1}{a_{lk}} (A_k - a_{1k} A_1 - \ldots - a_{mk} A_m) \right] + \ldots + b_m A_m = \\ = \left(b_1 - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{1k} \right) A_1 + \ldots + \frac{b_l}{a_{lk}} A_k + \ldots + \left(b_m - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{mk} \right) A_m . \end{gathered}$$

Таким чином, значення компонент наступного опорного плану розраховуються за формулами:

$$\begin{cases} b'_i = b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \; (i \neq j) \\ b'_k = \dfrac{b_l}{a_{lk}} \quad (i = j) \end{cases} . \tag{2.37}$$

Розклад за початковим базисом будь-якого з векторів має вигляд:

$$A_j = a_{1j} A_1 + \ldots + a_{lj} A_l + \ldots + a_{mj} A_m \, . \tag{2.38}$$

Розклад за новим базисом отримаємо підстановкою (2.35) у (2.38):

$$\begin{gathered} A_j = a_{1j} A_1 + \ldots + a_{jl} \left[\frac{1}{a_{lk}} (A_k - a_{1k} A_1 - \ldots - a_{mk} A_m) \right] + \ldots + a_{mj} A_m = \\ = \left(a_{1j} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{1k} \right) A_1 + \ldots + \frac{a_{lj}}{a_{lk}} A_k + \ldots + \left(a_{mj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{mk} \right) A_m = \\ = a'_{1j} A_1 + \ldots + a'_{kj} A_k + \ldots + a'_{mj} A_m . \end{gathered}$$

Новий план: $X_1 = (x_1 = a'_{1j}; \ldots; x_k = a'_{kj}; \ldots; x_m = a'_{mj})$, де

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}, \; (i \neq j) \\ a'_{kj} = \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \quad (i = j) \end{cases} \tag{2.39}$$

Формули (2.37) і (2.39) є формулами повних виключень Жордана–Гауса.

Таким чином, щоб отримати коефіцієнти розкладу векторів $A_0, A_1, \ldots, A_n$ за векторами нового базису (перехід до наступного опорного плану та створення нової симплексної табл. 2.2), необхідно:

1) розділити всі елементи напрямного рядка на розв'язувальний елемент;

2) розрахувати всі інші елементи за правилом прямокутника.

Далі необхідно здійснити перевірку нових значень оцінкового рядку. Якщо всі $F_j - c_j \geq 0$, то план X_1 – оптимальний, інакше переходять до наступного опорного плану. Процес продовжують до отримання оптимального плану, чи встановлення факту відсутності розв'язку задачі.

Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $Z_j - c_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, обираючи розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та використавши один крок симплекс-методом. У результаті отримаємо новий опорний план, якому відповідає те саме значення функціоналу, що і для попереднього плану, тобто функціонал досягає максимального значення в двох точках багатогранника розв'язків, а отже за властивістю 2 розв'язків задачі лінійного програмування така задача має нескінчену множину оптимальних планів.

Розв'язування задачі лінійного програмування на відшукання мінімального значення функціоналу відрізняється лише умовою оптимальності опорного плану. В базис включають вектор, для якого $\Delta_j = \max(F_j - c_j)$, де максимум знаходимо для тих *j*, яким відповідають $\Delta_j = F_j - c_j > 0$. Усі інші процедури симплексного методу аналогічні задачі відшукання максимального значення задачі лінійного програмування.

2.7.5. Метод штучного базису. У попередніх параграфах розглядався випадок, коли система обмежень задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю порядку *m*. Проте більшість задач не можливо звести до потрібного вигляду. В такому випадку застосовується метод штучного базису.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{2.40}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.41}$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1,2,\ldots,n). \tag{2.42}$$

Задача подана в канонічному вигляді і система (2.41) не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можливо, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі додати одну змінну $x_{n+i} \geq 0\,(i = \overline{1,m})$. Такі змінні мають назву ***штучних***. (Не обов'язково кількість введених штучних змінних має дорівнювати *m*. Їх необхідно вводити лише в ті рівняння системи обмежень, які не розв'язані відносно базисних змінних.) Припустимо, що система (2.41) не містить жодного одиничного вектора, тоді штучну змінну вводимо в кожне рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{2.43}$$

$$x_j \geq 0\,(j = 1,2,\ldots,n+m).$$

У результаті додавання змінних у рівняння системи (2.41) область допустимих розв'язків задачі розширилась. Задачу з системою обмежень (2.43) називають ***розширеною*** або ***М-задачею***. Розв'язок розширеної задачі співпадатиме з розв'язком початкової лише за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі вийшли з базису, тобто дорівнюють нулеві. Тоді система обмежень (2.43) прийматиме вигляд (2.41) (не міститиме штучних змінних) і розв'язок розширеної задачі буде розв'язком (2.40)–(2.42).

Симплексний метод вводить у базис змінні, які покращують значення цільової функції, для даної задачі – збільшують. Отже, для того, щоб процедура симплексних перетворень виключала з базису штучні змінні, їх потрібно ввести у цільову функцію з від'ємними коефіцієнтами. Тобто, лінійна функція (2.40) набуватиме вигляду:

$$\max F^* = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}.$$

(У випадку розв'язування задачі на відшукання мінімального значення цільової функції вводять коефіцієнт, який є досить великим числом. Цільова функція має вигляд:

$$\min F^* = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m}.)$$

Величина *M* припускається досить великим числом. Тоді, якого б малого значення не набувала відповідна коефіцієнту штучна змінна x_{n+i}, значення цільової функції F^* буде від'ємним для задачі на максимум і додатнім для задачі на мінімум. Тому процедура симплексного методу одразу вилучає відповідні змінні з базису і забезпечує визначення плану, в якому всі штучні змінні $x_{n+i} = 0, \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення $x_{n+i} > 0$, це означає, що початкова задача не має розв'язку (тобто система обмежень є несумісною).

Для розв'язання розширеної задачі за допомогою симплексних таблиць зручно використовувати таблиці, оцінковий рядок яких ділиться на два рядки. Тоді в (*m+2*)-му рядку містяться коефіцієнти з *M*, а в (*m+1*)-му – ті, які не містять *M*. Вектор, який підлягає включенню в базис, визначають по (*m+2*)-му рядку. Ітераційний процес по (*m+2*)-му рядку проводять до повного виключення всіх штучних змінних з базису, далі процес визначення оптимального плану продовжують за (*m+1*)-им рядком.

Взаємозв'язок між розв'язками початкової та розширеної задач лінійного програмування не є очевидним і визначається такою теоремою.

Теорема 2.7. Якщо в оптимальному плані $\widehat{X}_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = 0, (i = 1, 2, ..., m)$, то план $X_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ є оптимальним планом початкової задачі.

Доведення. Відмітимо, що коли план $\widehat{X}_{opt}$ є оптимальним планом розширеної задачі, то план X_{opt} – план початкової задачі. При цьому

$$F(X_{opt}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n =$$
$$= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - M \cdot 0 - ... - M \cdot 0 = F^*(\widehat{X}_{opt}).$$

Доведемо, що план X_{opt} – оптимальний план початкової задачі. Припустимо, що X_{opt} не є оптимальним планом. Тоді існує такий оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, для якого $F(X^*) > F(X_{opt})$. Звідси для вектора $\widehat{X}^*_{opt} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0)$, що є планом розширеної задачі, маємо:

$$F^*(\widehat{X}^*_{opt}) = F(X^*_{opt}) > F(X_{opt}) = F^*(\widehat{X}_{opt}).$$

Тобто

$$F^*(\widehat{X}^*_{opt}) > F^*(\widehat{X}_{opt}).$$

Таким чином, план $\widehat{X}_{opt}$ розширеної задачі не є оптимальним, що протирічить умові теореми, а тому зроблене припущення щодо неоптимальності плану X_{opt} є не вірним.

Отже, в загальному випадку ***алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом*** складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
2. Побудова симплексної таблиці.
3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок Δ_j. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Δ_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.
4. Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.
5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

2.7.6. Зациклення в задачах лінійного програмування. Як доведено вище, оптимальний план задачі лінійного програмування може знаходитись в одній із кутових точок багатокутника розв'язків, кількість яких є скінченою, тому, використовуючи для розв'язання задачі симплексний метод, за скінчене число кроків можливо знайти оптимальний план або з'ясувати, що задача не має розв'язку. Однак строга монотонність симплексного алгоритму має місце лише у випадку невиродженості всіх опорних планів, які отримані в ході ітераційної процедури алгоритму.

Якщо при дослідженні значень $\theta_i (i = \overline{1, m})$ у симплексній таблиці існує кілька однакових значень серед $\theta_i (i = \overline{1, m})$, то це означає, що можливо обрати для виключення з базису більш ніж один вектор. Наступна ітерація симплексного методу приведе до виродженого опорного плану, в якому хоча б одна з базисних змінних дорівнює нулю.

Якщо деякий опорний план буде виродженим, тобто один або більше вільних членів основної системи обмежень дорівнюватимуть нулю, то при визначенні вектора, який необхідно на наступному кроці виводити з базису найменше значення θ буде дорівнювати нулю і відповідати тому рівнянню, вільний член якого нульовий. Отже, наступна ітерація виводитиме з базису відповідну змінну, причому всі значення базисних змінних у наступному опорному розв'язку залишаються без змін, тобто значення цільової функції після проведення ітерації не зміниться.

Це означає, що наступні ітерації можуть не привести до покращення значення цільової функції. У такому разі після певного числа ітерацій дістають план, який уже було отримано раніше в процесі розв'язування задачі. Подальші ітерації, проведені аналогічно, приведуть до повторного перебору тих самих опорних планів. Вироджений план є причиною того, що виникає теоретична можливість нескінченного числа повторень однакових послідовностей ітерацій, що не покращують розв'язку, тобто обчислювальна процедура не буде мати кінця. Таку ситуацію називають ***зацикленням***. Циклу можна було б уникнути, запам'ятовуючи опорні плани, що утворили цикл, і не повертаючись до них. Проте, щоб забезпечити однозначність вибору вектора, що виводиться з базису, розроблено ряд спеціальних прийомів найцікавішим з них є так званий ***ε-метод***.

Виродженому плану відповідає вершина множини планів, що утворена більш ніж *n* гіперплощинами, інакше кажучи, одна вершина відповідає кільком виродженим планам, що означає злиття кількох вершин многогранника в одну. Ідея ε-методу усунення зациклювання полягає в роз'єднуванні злитих вершин. Для цього досить, очевидно, ввести замість нулів у відповідні рівняння значення, які не дорівнюють нулю, однак зробити це так, щоб не було знову кількох мінімальних співвідношень при наступному кроці. Таким чином, замість початкової матимемо змінену задачу. Проте легко показати, що діставши оптимальний план зміненої задачі й покладаючи, що введені величини дорівнюють нулю, матимемо оптимальний розв'язок початкової задачі.

На практиці вводяться величини, які є досить малими – це поліноми довільно взятої малої (близької до нуля) додатної величини ε. Коефіцієнтами поліномів беруть коефіцієнти при невідомих (базисних і небазисних) відповідного рівняння, а степенями ε – номера цих невідомих, тобто для деякого *i*-го рівняння маємо поліном виду:

$$P_i(\varepsilon) = \varepsilon^i + a_{i1}\varepsilon^{m+1} + a_{i2}\varepsilon^{m+2} + \ldots + a_{in}\varepsilon^n, (i = 1,2,\ldots,m).$$

Цілком зрозуміло, що при всяких a_{ij} можна вибрати ε настільки малим, що завжди $P_i(\varepsilon) > 0$, бо доданки зі степенями ε, вищими від *i*-го, будуть вищого порядку малості порівняно з першим ε^i. Унаслідок цього всі утворені поліноми різнитимуться за величиною. В оптимальному плані необхідно буде покласти $\varepsilon = 0$.

Зауважимо, що в разі підозри на можливість зациклення (випадок, коли початковий опорний план вироджений) поліноми $P_i(\varepsilon)$ можна одразу додати до вільних членів системи обмежень, у результаті чого матимемо $b_i(\varepsilon) = b_i + P_i(\varepsilon), (i = \overline{1,m})$.

2.7.7. Геометрична інтерпретація симплексного методу. Геометричну інтерпретацію симплексного методу можливо дати двома різними способами. В одному випадку ілюструється зміна базису, яка проходить за рахунок вибору векторів, які включаються в базис і виключаються з нього. В другому, простішому та більш наочному випадку, симплексний процес інтерпретується як рух по сусіднім кутовим точкам багатогранника розв'язків, що пов'язано зі збільшенням (зменшенням) значення цільової функції.

Дві кутові точки назвемо сусідніми, якщо вони розташовані на одному ребрі багатокутника.

Припустимо, що розглядається задача на відшукання максимального значення лінійної функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ і на рис. 2.14 зображено багатокутник розв'язків.

Припустимо, що початковий опорний план відповідає кутовій точці *A*, тоді наступний крок симплексного методу приведе до точки *Q*, ($Z(Q) > Z(A)$) і в результаті наступної ітерації до точки *F*, де лінійна функція досягає максимального значення. Проте, якщо в якості опорного плану буде взято точку *B*, то включення вектора в базис по критерію $\min \theta_{0j}(Z_j - C_j)$ приводить до того, що пряма $C_1x_1 + C_2x_2 = const$ проходитиме через точку *C* і алгоритм симплексного метода приведе до точок *C, D, E, F, K*, тобто для отримання оптимального плану необхідно буде виконати ще чотири ітерації.

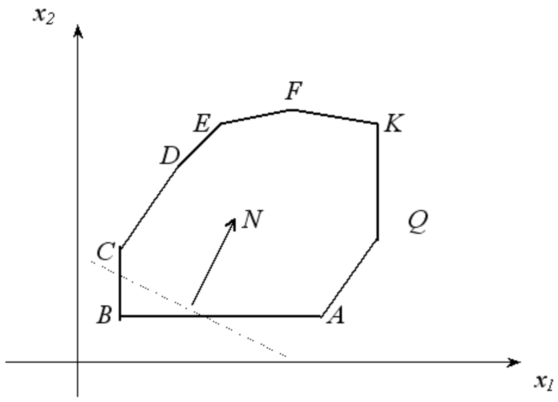


Рис. 2.14

Таким чином, очевидно, що при реалізації симплексного методу неможливо одразу перейти від опорного плану (точка B) до оптимального (точка K). Фактично розв'язок отримують рухаючись вздовж границі (ребра) простору розв'язків. Причому не завжди такий шлях буде найкоротшим. Кількість ітерацій при реалізації симплексного алгоритму визначається вибором початкового опорного плану та кількістю кутових точок, що траплятимуться на шляху прямої $C_1x_1 + C_2x_2 = const$.

2.7.8. Модифікації симплексного методу. Симплексний метод є ефективною, досить простою процедурою, проте не позбавленою деяких недоліків. Цей факт пояснює численні спроби модифікації симплексного методу, які можна зустріти в літературі, (наприклад, [13]).

Хоча теоретична основа симплексного методу гарантує збіжність до оптимального розв'язку за скінченну кількість кроків, труднощі обчислювального характеру, що виникають внаслідок помилок округлення в процесі машинних розрахунків, у цьому методі не враховані.

Такі проблеми зустрічаються перш за все тоді, коли штучні змінні є частиною початкового базисного розв'язку. Використання ±*M* у цільовій функції дуже великих чисел може призвести до помилки округлення, що обумовлена операціями над групою чисел, які включають як дуже великі, так і відносно малі числа. Розглянемо задачу (2.40)—(2.42).

Указана загроза зменшується при розбитті процесу розв'язування задачі на два етапи. На першому етапі розв'язується задача вигляду

$$\max F_0 = -Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+m}.$$

За обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$
$$x_j \ge 0\,(j = 1,2,\ldots,n+m),$$

де $x_j\,(j = n+1,\ldots,n+m)$ — штучні змінні.

Очевидно, значення цільової функції для оптимального плану буде $F_0(X_0) = 0$. Таким чином, при $F_0(X_0) = 0$ початкова задача має допустимий базисний розв'язок, причому такий, що не містить штучних змінних. На другому етапі розв'язування задачі за початковий опорний план береться X_0 і процес продовжується за звичайним алгоритмом симплексного методу.

Завдяки вказаному способу розподілу розв'язування задачі на два етапи, на кожному з них у процесі обчислень використовуються порівняно однакові за значеннями числа. Перший етап характеризується використанням лише великих чисел як коефіцієнтів цільової функції, проте на другому етапі задача не містить штучних змінних, отже, значення, що відповідають ±*M*, виключаються з розгляду.

Крім того, якщо на першого етапі розв'язування задачі $F_0(X_0) < 0$, це означає, що деякі зі штучних змінних додатні, тобто допустимих планів для початкової задачі не існує, її система обмежень не сумісна, задача розв'язків не має. Отже, немає потреби переходити до розв'язування другого етапу.

Двоетапний метод використовують у задачах, що вимагають операцій над дуже великими числами, що входять до цільової функції. Однак навіть за умови, що такої ситуації не сталося, тобто задача не містить штучних змінних, проблеми обчислювального характеру залишаються.

Застосування методу виключення змінних Жордана–Гауса для отримання послідовного ряду симплексних таблиць приводить до накопичення і поширення помилок округлення в такій мірі, що вони змінюють початкові дані задачі.

Розглянемо приклад, у якому помилки округлення пов'язані із визначенням умови допустимості розв'язку. Припустимо, що точне значення деякої базисної змінної $x_i = 0$, обрано деякий напрямний вектор A_j і в цьому векторі єдина невід'ємна компонента відповідає *i*-й (нульовій) базисній змінній також дорівнює нулю. Тоді вектор A_j вводити в базис неможна.

Однак унаслідок помилки округлення можлива ситуація, коли розраховане значення базисного вектора буде $x_i = 10^{-15}$, а значення коефіцієнта, що відповідає *i*-й базисній змінній та *j*-му вектору у симплексній таблиці — $a_{ij} = 10^{-12}$. Тоді вектор A_j буде обрано для введення в базис.

З метою зменшення впливу помилок округлення був розроблений *модифікований симплексний метод*. Основні етапи алгоритму модифікованого симплексного методу по суті ті самі, що й для симплексного методу. Головна відмінність полягає в тому, що для отримання послідовності симплексних таблиць у модифікованому симплексному методі не використовується метод виключення змінних Жордана–Гауса.

Припустимо, що розглядається задача лінійного програмування, де базис становлять останні $n+m$ векторів, які позначимо $X2$, а відповідні їм коефіцієнти цільової функції — $C2$, аналогічно перші n змінних позначимо $X1$, їх коефіцієнти в системі обмежень утворюють матрицю A, відповідні коефіцієнти цільової функції — $C1$. Тоді схематично першу та останню симплексні таблиці можна подати у такому вигляді (табл. 2.2), де B^{-1} — матриця обернена до одиничної з першої симплексної таблиці.

Таблиця 2.2

Базис	План	$C1$	$C2$
		$X1$	$X2$
$X2$	b	A	E
Δ_i	$C2X2$	$C2A — C1$	0
....			
X_B	b	$B^{-1}A$	B^{-1}
Δ_i	$C_B B^{-1}b$	$C_B B^{-1}A — C1$	$C_B B^{-1}A — C2$

Як видно з табл. 2.2, вся симплексна таблиця сформована шляхом використання початкових даних (матриця A) та обернення поточного базису B^{-1}. Таким чином, в обчислювальних процедурах модифікованого симплексного методу головна увага зосереджена на мінімізації помилок округлення при обчисленні матриці B^{-1}.

Крім контролю за помилкою округлення, модифікований симплексний метод дозволяє також зменшити час розрахунків. Зокрема, якщо в матриці обмежень A відносна кількість нульових елементів велика, то модифікованим симплексним методом можна скористатись для зменшення кількості операцій множення (порівняно до звичайного симплексного методу, в якому елементи таблиці, особливо нульові, у процесі послідовних операцій постійно змінюються). Взагалі відомо, що потрібний для реалізації модифікованого симплексного методу обсяг обчислень тим менше, чим менше щільність матриці A (щільність — відношення числа ненульових елементів до загального числа елементів) і та відношення числа обмежень до числа змінних.

2.8. Економічні постановки задач, що розв'язуються симплексним методом

Розглянемо застосування симплекс-методу для розв'язування деяких задач лінійного програмування.

Приклад 2.9. Продукція чотирьох видів *A*, *B*, *C* і *D* проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду задано таблицею.

Верстат	Тривалість обробки, год, одиниці продукції			
	A	*B*	*C*	*D*
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у маш.-год). Вартість однієї маш.-год становить 10 ум. од. для верстата 1 і 15 ум. од. — для верстата 2. Можливий час використання верстатів обмежений: для верстата 1 він становить 450 маш.-год, а для верстата 2 — 380 маш.-год. Ціна одиниці продукції кожного виду дорівнює 73, 70, 55 і 45 ум. од. відповідно.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний чистий прибуток.

Побудова математичної моделі. Нехай x_j — план виробництва продукції j-го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Умовами задачі будуть обмеження на час використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

$$\text{для верстата 1} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450 \ \text{(маш.-год)};$$
$$\text{для верстата 2} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380 \ \text{(маш.-год)}.$$

Цільова функція задачі визначається як загальний чистий прибуток від реалізації готової продукції і складається з різниці між ціною і собівартістю виготовлення продукції кожного виду:

$$Z = (73 - (2\cdot 10 + 3\cdot 15))x_1 + (70 - (3\cdot 10 + 2\cdot 15))x_2 + \\ + (55 - (4\cdot 10 + 1\cdot 15))x_3 + (45 - (2\cdot 10 + 2\cdot 15))x_4;$$
$$Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4.$$

Отже, математична модель поставленої задачі матиме такий вигляд:

$$\max\,(8x_1 + 10x_2 - 5x_4);$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380, \end{cases};$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Розв'язування. Розв'яжемо задачу симплекс-методом згідно з розглянутим алгоритмом.

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 і x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають можливий, але не використаний для виробництва продукції час роботи верстатів 1 і 2. У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють 0:

$$\max\,(8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6).$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі

$$x_1\cdot\vec{A}_1 + x_2\cdot\vec{A}_2 + x_3\cdot\vec{A}_3 + x_4\cdot\vec{A}_4 + x_5\cdot\vec{A}_5 + x_6\cdot\vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ \vec{A}_3 = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_4 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\ \vec{A}_5 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{A}_6 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix}450\\380\end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{A}_5$ і $\vec{A}_6$ — одиничні та лінійно незалежні, саме з них складається початковий базис у зазначеній системі векторів. Змінні задачі x_5 і x_6, що відповідають одиничним базисним векторам, називають *базисними*, а решту — *вільними змінними* задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 450, \quad x_6 = 380.$$

Згідно з визначеними $x_j\ (j = \overline{1,6})$ векторна форма запису системи обмежень задач матиме вигляд

$$0\cdot\vec{A}_1 + 0\cdot\vec{A}_2 + 0\cdot\vec{A}_3 + 0\cdot\vec{A}_4 + 450\cdot\vec{A}_5 + 380\cdot\vec{A}_6 = \vec{A}_0.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 і x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$x_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0 .$$

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\leftarrow x_5$	0	450	2	3	4	2	1	0	150
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	190
$Z_j - C_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - C_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) - 8 = -8 ;$$
$$Z_2 - C_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 10 = -10 ;$$
$$Z_3 - C_3 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) - 0 = 0 ;$$
$$Z_4 - C_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5 ;$$
$$Z_5 - C_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0 ;$$
$$Z_6 - C_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0 .$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z, якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0$.

3. Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку присутня хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ і $\Delta_2 = -10$ суперечать умові оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконують зміною базису, тобто за рахунок виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису беремо змінну x_2, оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка серед тих, які не задовольняють умову оптимальності ($|-10| > |-8|$).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика x_2 знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці бачимо, що $\min \theta = \{450/3;\ 380/2\} = 150$, і тому з базису виключаємо змінну x_5, а число $a_{12} = 3$ називатимемо *розв'язувальним елементом*. Подальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана–Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	10	150	2/3	1	4/5	2/3	1/3	0	225
$\leftarrow x_6$	0	80	5/3	0	—5/3	2/3	—2/3	1	48
$Z_j — C_j \geq 0$		1500	–4/3	0	40/3	35/3	10/3	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і $C_{баз}$, а решту елементів нової таблиці розраховують за такими правилами.

1. Розв'язувальний (напрямний) рядок необхідно поділити на розв'язувальний елемент і здобуті числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елементу.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Всі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за *правилом прямокутника*.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв'язувальний елемент;

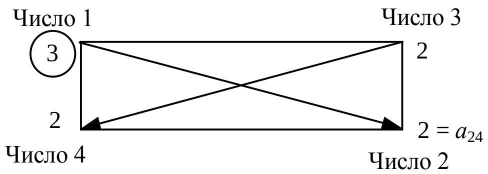
2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 і 4 — елементи, що розміщуються у двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають так:

$$\frac{\text{Число 1} \cdot \text{Число 2} - \text{Число 3} \cdot \text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24}, який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика x_4. Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24} = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 2) : 3 = 2/3$. Це значення записуємо в стовпчик x_4 другого рядка другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника і відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $Z_j - C_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці.

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	118	0	1	2	2/5	3/5	–2/5
x_1	8	48	1	0	–1	2/5	–2/5	3/5
$Z_j - C_j \geq 0$		1564	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі

$$X^* = (x_1 = 48;\ x_2 = 118;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0),$$

або

$$X^* = (48;\ 118;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0);$$
$$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1564.$$

Отже, план виробництва продукції, що передбачає випуск 48 од. продукції A і 118 од. продукції B, оптимальний і дає найбільший прибуток 1564 дол. При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Задачу можна розв'язати симплекс-методом, узявши не три симплексні таблиці, а одну, в якій послідовно записувати всі ітерації.

Приклад 2.10. Розв'язати задачу 2.9 із додатковою умовою: продукція *C* має виготовлятися в кількості не менш як 9 од.

Розв'язування. Математичну модель сформульованої задачі запишемо так:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380, \\ x_3 \ge 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Застосовуючи для розв'язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку записуємо систему обмежень у канонічній формі, а далі — у векторній:

$$Z = 3x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380, \\ x_3 - x_7 = 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 7}. \end{cases}$$

Зауважимо, що нерівність типу «≥» у рівняння перетворюємо введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком «–».

Векторна форма запису

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + x_3\vec{A}_3 + x_4\vec{A}_4 + x_5\vec{A}_5 + x_6\vec{A}_6 + x_7\vec{A}_7 = \vec{A}_0,$$

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\vec{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів є лише два одиничні — $\vec{A}_5$ і $\vec{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом +1 штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\vec{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування

$$\max\ (8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380, \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 8}. \end{cases}$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має у цільовій функції *Z* коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або —M (для задачі на max), де M — досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі

$$x_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380;\ 0;\ 9),$$
$$Z_0 = 8\cdot 0 + 10\cdot 0 + 0\cdot 0 - 5\cdot 0 + 0\cdot 450 + 0\cdot 380 + 0\cdot 0 - M\cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю задачі:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	—5	0	0	0	—M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
←x_8	—M	9	0	0	1	0	0	0	—1	1	9
$Z_j — C_j \geq 0$		0	—8	—10	0	5	0	0	0	0	
		—9M	0	0	—M	0	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо

$$Z_0 = 0 - 9M,\ Z_1 - C_1 = -8,\ Z_2 - C_2 = -10,\ Z_3 - C_3 = 0 - M \text{ і т. д.}$$

Як бачимо, значення оцінок складаються з двох частин, одна з яких містить M, а інша — просто число. Тому для зручності розбиваємо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок записуємо просто число, а в другий — число з коефіцієнтом M.

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, розглянутим у задачі 2.41, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі.

Подальше розв'язування задачі наведене у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	—5	0	0	0	–M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
← x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	–4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	–1	185,5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	—
$Z_j — C_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	**M**	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	–4/3	207
← x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	–2/3	1	–5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	—
$Z_j — C_j \geq 0$		1380	–4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	–40/3	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	–2/5	2	–2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	–2/5	3/5	–1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	
$Z_j — C_j \geq 0$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	–12	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	

Оптимальним планом задачі є вектор

$$X^* = (57;\ 100;\ 9;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0),$$

$$\max Z = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 = 1456.$$

Отже, оптимальним є виробництво 57 од. продукції A, 100 од. продукції B і 9 од. продукції C. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 ум. од.

Приклада 2.11. Грошові кошти фірми можуть використовуватися для фінансування двох проектів. Проект A гарантує отримання через рік прибутку в розмірі 60 центів на кожний вкладений долар. Проект B гарантує отримання прибутку в розмірі 2 дол. на кожний інвестований долар, але через два роки. При фінансуванні проекту B період інвестицій має бути кратним двом рокам.

Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом у сумі 100 000 дол., щоб максимізувати загальний прибуток, який можна отримати через три роки після початку інвестицій.

Розв'язування. Нехай x_{ij} — розмір вкладених коштів у i-му році в проект j (i = 1, 3; j = 1, 2). Побудуємо умовну схему розподілу грошових коштів протягом трьох років.

		Проект А	**Проект В**
1-й рік	Початок року	100 000	
	Дохід на кінець року	x_{11} $1{,}6x_{11}$	x_{12} —
2-й рік	Початок року	$100\ 000 — (x_{11} + x_{12}) +1{,}6x_{11}$	
	Дохід на кінець року	x_{21} $1{,}6x_{21}$	x_{22} $3x_{12}$
3-й рік	Початок року	$100\ 000 — (x_{11} — x_{12}) + 1{,}6x_{11} — (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21}$	
	Дохід на кінець року	x_{31} $1{,}6x_{31}$	— $3x_{22}$

Згідно з наведеною схемою можна записати математичну модель задачі.

Цільова функція: дохід фірми після трьох років інвестицій

$\max\ (1{,}6x_{31} + 3x_{22})$.

Обмеження моделі сформулюємо за такою умовою: розмір коштів, інвестованих у поточному році, не може перевищувати залишку коштів минулого року та прибутку за минулий рік:

для 1-го року $x_{11} + x_{12} \le 100\ 000$;

для 2-го року $x_{21} + x_{22} \le 100\ 000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$;

для 3-го року $x_{31} \le 100\ 000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$.

Виконавши елементарні перетворення, дістанемо систему обмежень

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100\ 000, \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0, \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0. \end{cases}$$

Отже, математична модель сформульованої задачі матиме такий вигляд:

$$\max\ (3x_{22} + 1{,}6x_{31});$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100\ 000, \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0, \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0, \end{cases}$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,2}.$$

Очевидно, що ця задача є задачею лінійного програмування та її можна розв'язати симплекс-методом. Згідно з алгоритмом необхідно звести систему обмежень задачі до канонічної форми. Це виконується за допомогою додаткових змінних x_1, x_2 і x_3, які вводять зі знаком «+» до лівої частини всіх відповідних обмежень. У цільовій функції задачі ці змінні мають коефіцієнт, що дорівнює нулю.

Розв'язування задачі наведено у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0	θ
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3	
$\leftarrow x_1$	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0	100 000
x_{22}	3	0	—1,6	0	1	1	0	0	1	0	—
x_{31}	1,6	0	0	—3	—1,6	0	1	0	0	1	—
$Z_j — C_j \ge 0$		0	—4,8	—4,8	0,44	0	0	0	3	1,6	
$\leftarrow x_{11}$	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0	
x_{22}	3	160 000	0	1,6	1	1	0	1,6	1	0	
x_{31}	1,6	0	0	—3	—1,6	0	1	0	0	1	
$Z_j — C_j \ge 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6	

тоді

$$X_1^* = (x_{11} = 100\ 000;\ \ x_{22} = 160\ 000),$$
$$Z_{\max} = 480\ 000 \text{ дол.}$$

Але задача має ще один оптимальний план, який можна дістати, вибравши розв'язувальний елемент у стовпчику x_{12} останньої симплексної таблиці. Це може бути або число 1, або 1,6. Виконавши один крок симплекс-методом, дістанемо таку симплексну таблицю:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_{12}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	300 000	3	0	–1,6	0	1	3	0	1
$Z_j - C_j \geq 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

звідси

$$X_2^* = (x_{12} = 100\ 000;\ \ x_{31} = 300\ 000),$$
$$Z_{\max} = 480\ 000 \text{ дол.}$$

Розглянемо, як використовуються грошові кошти фірми за першим оптимальним планом задачі.

		Проект A		**Проект B**
1-й рік	Початок року		100 000 дол.	
		x_{11} = 100 000		x_{12} = 0
	Дохід на кінець року			160 000 дол
2-й рік	Початок року		160 000 дол.	
		x_{21} = 0		x_{22} = 160 000
	Дохід на кінець року			0 дол.
3-й рік	Початок року		0 дол.	
		x_{31} = 0		
	Дохід на кінець року			**480 000 дол.**

Згідно з розглянутою схемою перший оптимальний план інвестицій передбачає на перший рік усі кошти в розмірі 100 000 дол. вкласти в проект *A*, що принесе в кінці року дохід 160 000 дол. На другий рік усі кошти в розмірі 160 000 дол. передбачається витратити на фінансування проекту *B*. Наприкінці другого року фірма доходу не отримає. На третій рік фінансування проектів не передбачається, але в кінці року дохід фірми від минулорічних інвестицій проекту *B* становитиме 480 000 дол.

Аналогічний максимальний дохід можна також дістати, провівши інвестиції за такою схемою.

		Проект A		**Проект B**
1-й рік	Початок року		100 000 дол.	
		x_{11} = 0		x_{12} = 100 000
	Дохід на кінець року			0 дол.
2-й рік	Початок року			0 дол.
		x_{21} = 0		x_{22} = 0
	Дохід на кінець року			300 000 дол.
3-й рік	Початок року			300 000 дол.
	Дохід на кінець року	x_{31} = 300 000		**480 000 дол.**

Згідно з другим оптимальним планом на перший рік фірма спрямовує весь капітал у розмірі 100 000 дол. на фінансування проекту *B*. Це принесе фірмі дохід лише наприкінці другого року в розмірі 300 000 дол., які на третій рік у повному обсязі інвестуються в проект *A*. Дохід фірми за три роки діяльності становитиме 480 000 дол.

Приклад 2.12. Продукція фабрики випускається у вигляді паперових рулонів стандартної ширини 2 м. За спеціальним замовленням споживачів фабрика постачає також рулони інших розмірів, розрізуючи стандартні рулони.

Типові замовлення на рулони нестандартних розмірів наведено в таблиці:

Замовлення	Потрібна ширина рулонів, м	Потрібна кількість рулонів
1	0,8	150
2	1,0	200
3	1,2	300

Визначити оптимальний варіант розкрою стандартних рулонів, за якого спеціальні замовлення, що надходять, задовольняють повністю з мінімальними відходами паперу.

Розв'язування. Аби виконати спеціальні замовлення, які надійшли, розглянемо 5 можливих варіантів розкрою стандартних рулонів, що можуть використовуватися в різних комбінаціях. Варіанти розкрою наведено в таблиці:

Потрібна ширина рулону, м	Кількість нестандартних рулонів за варіантами				
	1	2	3	4	5
0,8	2	1	1	0	0
1,0	0	0	1	2	0
1,2	0	1	0	0	1
Кількість відходів, м	0,4	0	0,2	0	0,8

Нехай x_j — кількість стандартних рулонів паперу, які буде розрізано j-способом, $j = \overline{1,5}$.

Обмеження задачі безпосередньо пов'язані з вимогою забезпечити повністю необхідну кількість нестандартних рулонів за спеціальними замовленнями. Якщо використовуватимуться всі подані в таблиці способи розкрою, дістанемо такі результати.

Кількість рулонів шириною 0,8 м

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 150.$$

Кількість рулонів шириною 1 м

$$x_3 + 2x_4 = 200.$$

Кількість рулонів шириною 1,2 м

$$x_2 + x_5 = 300.$$

Цільова функція задачі — це мінімальні загальні втрати паперу під час розрізування стандартних рулонів на рулони нестандартної ширини. Математично вона має такий вигляд:

$$\min\ (0{,}4x_1 + 0x_2 + 0{,}2x_3 + 0x_4 + 0{,}8x_5).$$

Математична модель задачі в загальному вигляді записується так:

$$\min\ (0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5);$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 150, \\ x_3 + 2x_4 = 200, \\ x_2 + x_5 = 300, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,5}.$$

Для розв'язування цієї задачі застосуємо процедуру симплекс-методу. Оскільки задачу сформульовано в канонічній формі, запишемо її відразу у векторній формі

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + x_3\vec{A}_3 + x_4\vec{A}_4 + x_5\vec{A}_5 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{A}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{A}_4=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{A}_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{A}_0=\begin{pmatrix}150\\200\\300\end{pmatrix}.$$

У системі векторів маємо лише один одиничний вектор $\vec{A}_5$. Тому в перше та друге обмеження введемо штучні змінні x_6 і x_7. Розширена задача матиме вигляд

$$\min\ (0{,}4x_1+0{,}2x_3+0{,}8x_5+Mx_6+Mx_7);$$
$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_6=150,\\ x_3+2x_4+x_7=200,\\ x_2+x_5=300,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,7}.$$

Процес розв’язування задачі симплекс-методом подано у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0,4	0	0,2	0	0,8	M	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	0	—
$\leftarrow x_7$	M	200	0	0	1	2	0	0	1	100
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	0	—
$Z_j - C_j \ge 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	0	
		350 M	2 M	M	2 M	2 M	0	0	0	
$\leftarrow x_6$	M	150	2	1	1	0	0	1	1	75
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0	0	0	—
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	0	—
$Z_j — C_j \ge 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0		
		150 M	2 M	M	M	0	0	0		
$\leftarrow x_1$	0,4	75	1	1/2	1/2	0	0			150
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0			—
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1			300
$Z_j - C_j \ge 0$		270	0	1	0	0	0			
x_2	0	150	2	1	1	0	0			
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0			
x_5	0,8	150	–2	0	–1	0	1			
$Z_j - C_j \ge 0$		120	–2	0	–1	0	0			

Згідно з останньою симплексною таблицею запишемо оптимальний план задачі

$$X^* = (0;\ 150;\ 0;\ 100;\ 150),\ \min Z = 120.$$

Визначений оптимальний план передбачає таке: щоб у повному обсязі виконати спеціальні замовлення, які надходять на паперову фабрику, необхідно розрізати 150 стандартних рулонів другим способом, 100 рулонів — четвертим і 150 — п’ятим. За такого оптимального варіанта розкрою величина відходів паперу буде найменшою і становитиме 120 м.

2.9. Комп’ютерні технології розв’язку оптимізаційних задач в універсальному інтегрованому середовищі Mathcad

Mathcad досить зручно використовувати для навчання, обчислень і інженерних розрахунків. Відкрита архітектура програми в поєднанні з підтримкою технологій .NET і XML дозволяють легко інтегрувати Mathcad практично в будь-які IT-структури та інженерні програми. Є можливість створення електронних книг (e-Book).

Mathcad містить сотні операторів і вбудованих функцій для вирішення різних технічних завдань. Програма дозволяє виконувати чисельні і символьні обчислення, проводити операції зі скалярними величинами, векторами і матрицями, автоматично переводити одні одиниці вимірювання в інші.

Серед можливостей Mathcad можна виділити:

- рішення диференціальних рівнянь, у тому числі і чисельними методами;
- побудова двовимірних і тривимірних графіків функцій (у різних системах координат, контурні, векторні і т. д.) ;
- використання грецького алфавіту як у рівняннях, так і тексті;
- виконання обчислень у символьному режимі;
- виконання операцій з векторами і матрицями;
- символьне рішення систем рівнянь;
- апроксимація кривих;
- виконання підпрограм;
- пошук коренів многочленів і функцій;
- проведення статистичних розрахунків і робота з розподілом імовірностей;
- пошук власних чисел і векторів;
- обчислення з одиницями виміру;
- інтеграція з САПР-системами, використання результатів обчислень як керуючих параметрів.

Mathcad належить до систем комп'ютерної алгебри, тобто засобів автоматизації математичних розрахунків. У цьому класі програмного забезпечення існує багато аналогів різної спрямованості і принципу побудови. Найчастіше Mathcad порівнюють із такими програмними комплексами, як Maple, Mathematica, MATLAB, а також з їх аналогами MuPAD, Scilab, Maxima та ін. Утім об'єктивне порівняння ускладнюється у зв'язку з різним призначенням програм та ідеологією їх використання.

Розробники Mathcad зробили ставку на розширення системи відповідно до потреб користувача. Для цього призначені додаткові бібліотеки і пакети розширення, які можна придбати окремо й які мають додаткові функції, що вбудовуються в систему при установці, а також електронні книги з описом методів вирішення специфічних завдань, з прикладами діючих алгоритмів і документів, які можна використовувати безпосередньо у власних розрахунках. Крім того, у разі потреби і за умов наявності навичок програмування в *C*, є можливість створення власних функцій і їх прикріплення до ядра системи через механізм DLL.

Mathcad, на відміну від Maple, спочатку створювався для чисельного розв'язання математичних задач, він орієнтований на вирішення завдань саме прикладної, а не теоретичної математики, коли потрібно отримати результат без поглиблення в математичну суть завдання.

Однак для тих, кому потрібні символьні обчислення, й призначене інтегроване ядро Maple (з версії 14 — MuPAD). Особливо це корисно, коли йдеться про створення документів освітнього призначення, коли необхідно продемонструвати побудову математичної моделі виходячи з фізичної картини процесу або явища.

Символьне ядро Mathcad, на відміну від оригінального Maple (MuPAD), штучно обмежене (доступно близько 300 функцій), але цього в більшості випадків цілком достатньо для вирішення завдань інженерного характеру.

Основна відмінність Mathcad від аналогічних програм — це графічний, а не текстовий режим введення виразів. Для набору команд, функцій, формул можна використовувати як клавіатуру, так і кнопки на численних спеціальних панелях інструментів. У будь-якому разі — формули будуть мати звичний, аналогічний книжковому вигляду, тобто особливої підготовки для набору формул не потрібно.

Обчислення із введеними формулами здійснюються за бажанням користувача або миттєво, одночасно з набором, або за командою. Звичайні формули обчислюються зліва направо і зверху вниз (подібно читання тексту). Будь-які змінні, формули, параметри можна змінювати, спостерігаючи на власні очі відповідні перетворення результату. Це дає можливість організації дійсності інтерактивних обчислювальних документів.

Окремо слід наголосити на можливості використання в розрахунках Mathcad величин з різною розмірністю, причому можна вибрати систему одиниць: СІ, СГС, МКС, англійську або побудувати власну. Результати обчислень, зрозуміло, також отримують відповідну розмірність. Користь від такої можливості важко переоцінити, оскільки значно спрощується відстеження помилок у розрахунках, особливо у фізичних та інженерних.

Можна також доповнити Mathcad новими можливостями за допомогою спеціалізованих пакетів розширень і бібліотек, які поповнюють систему додатковими функціями і константами для вирішення спеціалізованих завдань:

- Пакет для аналізу даних (англ. Data Analysis Extension Pack) — забезпечує Mathcad необхідними інструментами для аналізу даних;

• Пакет для обробки сигналів (англ. Signal Processing Extension Pack) — містить більше 70 вбудованих функцій для аналогової і цифрової обробки сигналів, аналізу та подання результатів у графічному вигляді;

• Пакет для обробки зображень (англ. Image Processing Extension Pack) — забезпечує Mathcad необхідними інструментами для обробки зображень, аналізу та візуалізації;

• Пакет для роботи з функціями хвильового перетворення (англ. Wavelets Extension Pack) — містить великий набір додаткових вейвлет-функцій, які можна додати до бібліотеки вбудованих функцій базового модуля Mathcad Professional.

Пакет дає можливість застосувати новий підхід до аналізу сигналів і зображень, статистичної оцінки сигналів, аналізу стиснення даних, а також спеціальних чисельних методів. Функціональність включає одно- і двомірних вейвлети, дискретні вейвлет-перетворення, мультианаліз дозволу і багато іншого. Пакет об’єднує понад 60 функцій ключових вейвлетів. Включені ортогональні і біортогональні сімейства вейвлетів, серед іншого — вейвлет Хаара, вейвлет Добеші, симлет, койфлет і B-сплайни. Пакет також містить велику діалогову документацію за основними принципами вейвлетів, додатки, приклади і таблиці посилань.

• Бібліотека будівництва (англ. Civil Engineering Library) — включає довідник англ. Roark’s Formulas for Stressand Strain (формули Роарка для розрахунку напружень і деформацій), що настроюються шаблони для будівельного проектування і приклади теплових розрахунків.

• Електротехнічна бібліотека (англ. Electrical Engineering Library) — містить стандартні обчислювальні процедури, формули і довідкові таблиці, використовувані в електротехніці. Текстові пояснення і приклади полегшують роботу з бібліотекою — кожен заголовок має гіперпосилання на зміст і покажчик, і його можна знайти в системі пошуку.

• Бібліотека машинобудування (англ. Mechanical Engineering Library) — включає довідник англ. Roark’s Formulas for Stressand Strain (формули Роарка для розрахунку напружень і деформацій), що містить більше п’яти тисяч формул, обчислювальні процедури з довідника McGraw-Hill і метод кінцевих елементів. Текстові пояснення, пошукова система і приклади полегшують роботу. До складу бібліотеки включена електронна книга Девіда Пінтура «Введення в метод кінцевих елементів».

У документах-програмах Mathcad є можливість вставки модулів (component) інших додатків для розширення можливостей візуалізації, аналізу даних, виконання специфічних обчислень.

Для розширеної візуалізації даних призначений компонент AxumGraph. Для роботи з табличними даними — Microsoft Excel.

Компоненти DataAcquisition, ODBC Input дозволяють користуватися зовнішніми базами даних.

Пропонуються також безкоштовні модулі (add-in) для інтеграції Mathcad з програмами Excel, AutoCAD.

Для статистичного аналізу призначений компонент Axum S-PLUS Script.

Значне розширення можливостей пакета досягається при інтеграції з надпотужним додатком MATLAB.

2.9.1. Оптимізаційні задачі, що розв’язуються в пакеті Mathcad. Оптимізаційні задачі, що розв’язуються в пакеті Mathcad, можна розподілити на два класи:

— задачі безумовної оптимізації (або оптимізація без обмежень).

— завдання умовної оптимізації (оптимізація з обмеженнями).

Друга задача відрізняється від першої тим, що рішення шукається лише серед допустимих значень або, інакше, на допустимій множині значень змінних задачі, які задовольняють заданим обмеженням.

Для розв’язування оптимізаційних задач використовуються дві функції MathCAD:

Maximize (f, <список параметрів>) — обчислення точки максимуму;

Minimize (f, <список параметрів>) — обчислення точки мінімуму,

де f — ім’я функціоналу, що мінімізується, визначеного до звернення до функції; <список параметрів> — містить перерахування (через кому) імен параметрів, щодо яких вирішується оптимізаційна задача.

Зауважимо, що перед зверненням до функцій Maximize, Minimize (імена яких починаються прописними буквами), слід обов’язково задати початкове значення параметрів оптимізації.

У даному розділі пропонується лістинг програм у середовищі Mathcad. Деякі оператори ви можете вводити з клавіатури, але більшість вводиться за допомогою Toolbars.

Оператор «:=» (присвоювання) можна знайти на вкладці Evaluatioan (View->Toolbars->Evaluatioan);

знак степеня та радикала (кореня) ви знайдете на вкладці Calculator (View->Toolbars->Calculator);

ввід масивів і робота з матрицями буде доступна на вкладці Matrix (View->Toolbars->Matrix);

знаки «<»,«>» та інші знаки нерівностей знаходяться на вкладці Boolen (View->Toolbars->Boolen);

індекс змінних вводиться за допомогою клавіші «[».

Для можливості введення обмежень задачі використовуються ті ж функції Maximize, Minimize, але вони входять уже в блок рішення Given і перед ними розміщуються обмеження у вигляді рівності або нерівностей, що визначають допустиму область значень параметрів оптимізації.

Приклад 2.13. Цех малого підприємства повинен виготовити 100 од. виробів трьох типів і не менше як 20 шт. виробів кожного типу. На вироби йде 4, 3, 4 і 2 кг металу відповідно, при його загальному запасі 340 кг, а також витрачаються за 4,75, 11 і 2 кг пластмаси, при її загальному запасі 400 кг. Прибуток, отриманий від кожного виробу, дорівнює 4, 3 і 2 ум. од.

Визначити, скільки виробів кожного типу потрібно випустити для отримання максимального прибутку у рамках установлених запасів металу і пластмаси.

Розв'язання

$$f(x_1, x_2, x_3) := 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1$$

Given

$$x_1 \geq 20 \quad x_2 \geq 20 \quad x_3 \geq 20$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340$$

Ограничения

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700$$

Обмеження

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \mathit{Maximize}\,(f, x_1, x_2, x_3) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 340$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 534$$ *Проверка Ограничений*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$f(x_1, x_2, x_3) := 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1$$

Given

$$x_1 \geq 20 \quad x_2 \geq 20 \quad x_3 \geq 20$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \mathit{Maximize}\,(f, x_1, x_2, x_3) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 340$$

$$4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 534$$ *Проверка Ограничений*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

Стислі висновки

У даному розділі розглянуто два методи (графічний і симплексний) розв'язання задач лінійного програмування. Графічний метод для розв'язування реальних задач непридатний, оскільки економіко-математична модель для його застосування мусить мати тільки дві змінні (види діяльності). На практиці такі задачі не виникають.

Якщо економіко-математична модель адекватно описує реальні технологічні та економічні процеси, то вона, як правило, має сотні чи навіть тисячі змінних і обмежень. Для розв'язування таких задач використовується симплексний метод, із застосуванням якого теоретично можна дістати оптимальний розв'язок довільної лінійної економіко-математичної задачі.

Графічний метод є важливим для осмислення сутності оптимізації, геометричної інтерпретації постановки та розв'язку задач лінійного програмування.

Слід підкреслити, що економічні процеси є нелінійними, стохастичними, динамічними тощо. Далі будуть описані відповідні методи розв'язання таких задач. Проте звертаємо увагу на те, що є багато технологічних та економічних процесів, які з достатньою для практики точністю можна описати лінійними залежностями, тобто такі моделі є лінійними, а отже, для знаходження їх оптимального розв’язку застосовується симплексний метод.

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Запишіть загальну математичну модель лінійного програмування.
2. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?
3. Які є форми запису задач лінійного програмування?
4. Дайте геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.
5. Який розв’язок задачі лінійного програмування називається допустимим?
6. Поясніть, яка область називається областю допустимих планів.
7. Який план називається опорним?
8. Який опорний план називається невиродженим?
9. Сформулюйте основні аналітичні властивості розв’язків задачі лінійного програмування.
10. Які задачі можна розв’язувати графічним методом?
11. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв’язок?
12. Суть алгоритму графічного методу.
13. Для розв’язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?
14. Суть алгоритму симплексного методу.
15. Сформулюйте умови оптимальності розв’язку задачі симплексним методом.
16. Як вибрати напрямний вектор-стовпець?
17. Як вибрати розв’язувальний елемент?
18. Суть методу Жордана–Гаусса.
19. Суть методу штучного базису.

Задача 2.1. Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи для цього телебачення, радіо і газети. Витрати на рекламу в бюджеті фірми обмежені сумою 8000 дол. на місяць. Досвід минулих років показав, що 1 дол., витрачений на телерекламу, дає фірмі прибуток у розмірі 10 дол., а витрачений на рекламу на радіо і в газетах — 4 і 8 дол. відповідно.

Фірма має намір витрачати на теле- і радіорекламу не більш як 70 % рекламного бюджету, а витрати на газетну рекламу не повинні більш як удвічі перевищувати витрати на радіорекламу.

Визначити такий варіант розподілу рекламного бюджету за різними напрямами реклами, який дає фірмі найбільший прибуток від рекламування своєї продукції.

Задача 2.2. Розв’язати задачу 2.1, якщо вимоги до розподілу рекламного бюджету фірми такі: витрати на радіорекламу мають становити не менш як 25 % рекламного бюджету, а на газетну рекламу — не менш як 50 % витрат на телебачення.

Задача 2.3. Промислове підприємство виготовляє продукцію трьох видів *A*, *B* і *C*, для чого використовує два види ресурсів 1 і 2, запаси яких становлять 4000 і 6000 од. відповідно. Витрати ресурсів на одиницю продукції кожного виду наведено в таблиці:

Ресурс	Витрати ресурсів на одиницю продукції, ум. од., за видами		
	A	*B*	*C*
1	2	3	5
2	4	2	7

Аналіз умов збуту продукції показав, що мінімальний попит на продукцію підприємства для продукції *A*, *B* і *C* становить 200, 200 і 150 од. Але співвідношення випуску продукції *A*, *B* і *C* має бути 3 : 2 : 5. Прибуток від реалізації одиниці продукції виду *A* становить 30 дол., продукції *B* — 20 дол., а продукції *C* — 50 дол.

Сформулювати і розв’язати задачу визначення оптимального плану виробництва продукції трьох видів, що дає підприємству найбільший прибуток.

Задача 2.3. Господарство планує вирощувати три сільськогосподарські культури (пшеницю, картоплю та гречку) і може виділити для цього 300 га земельних угідь. Для успішного вирощування сільськогосподарські культури потребують внесення комплексного мінерального добрива, запас якого в господарстві обмежений — 120 т.

Норму внесення мінерального добрива, урожайність і закупівельні ціни на сільськогосподарські культури наведено в таблиці:

Показник	Сільськогосподарська культура		
	Пшениця	Картопля	Гречка
Урожайність, ц/га	40	200	15
Закупівельна ціна, ум. од./ц	10	5	30
Норма внесення добрива, кг/га	300	500	200

Площі земельних угідь, що відводяться під вирощування гречки, мають не перевищувати 40 га.

Визначити такий план розподілу посівної площі господарства, який дає найбільший дохід від вирощування сільськогосподарських культур.

Задача 2.4. Фірма планує організувати виробництво двох видів продукції *A* і *B*, але має для цього обмежений інвестиційний фонд у розмірі 5000 дол. У разі потреби цю суму можна збільшити на 10 000 дол. за рахунок банківського кредиту, процентна ставка за використання якого становить 20 %. Втрати, пов’язані з виробництвом одиниці продукції *A*, дорівнюють 50 дол., а одиниці продукції *B* — 100 дол.

Очікуваний прибуток фірми від реалізації одиниці продукції *A* становить 100 дол., а одиниці продукції *B* — 150 дол. Фірма має попереднє замовлення на виробництво не менш як 100 од. продукції *A* і 50 од. продукції *B*.

Визначити обсяги виробництва продукції кожного виду, які забезпечать фірмі найбільший прибуток з урахуванням виплат за кредит.

Задача 2.5. Фірма має капітал 300 000 дол., який може використовуватися для фінансування проектів 1 і 2. Реалізація проекту 2 гарантує отримання щороку прибутку в розмірі 1 дол. на кожний вкладений долар. Проект 1 гарантує прибуток у розмірі 3 дол. за кожний інвестований долар, але через два роки. У разі фінансування проекту 1 період інвестицій має бути кратним двом рокам.

Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом, щоб максимізувати загальний дохід, що його може отримати фірма через три роки після початку інвестицій.

Основні терміни та поняття

- Базисні та вільні змінні
- Геометрична інтерпретація
- Гіперплощина
- Графічний метод
- Задача лінійного програмування
- Ітерації
- Канонічна форма
- Критерії оптимальності
- Кутова точка
- Опуклі множини
- Півплощина (півпростір)
- Простір *n*-вимірний
- Розв’язувальний елемент
- Симплексна таблиця
- Штучний базис

Розділ 3

ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА ДВОЇСТІ ОЦІНКИ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:

- ✓ правила побудови двоїстих моделей оптимізаційних задач;
- ✓ відмінності між симетричними та несиметричними двоїстими задачами;
- ✓ основні теореми двоїстості;
- ✓ методи розв'язку двоїстих задач;
- ✓ у чому полягає післяоптимізаційний аналіз розв'язку лінійних оптимізаційних задач;
- ✓ підходи проведення аналізу оптимальних планів задач лінійного програмування за допомогою Microsoft Excel Solver;

а також УМІТИ:

- будувати двоїсту задачу лінійного програмування на основі прямої;
- застосовувати теореми двоїстості для знаходження оптимальних планів прямої та двоїстої задач;
- використовувати двоїсті оцінки (тіньові ціни) для аналізу розв'язків лінійних оптимізаційних задач;
- здійснювати аналіз оптимальних планів задач лінійного програмування за допомогою Microsoft Excel Solver.

3.1. Економічна інтерпретація пари двоїстих задач лінійного програмування

Кожна задача лінійного програмування пов'язана з іншою задачею, так званою *двоїстою задачею*.

Економічну інтерпретацію кожної з пари задач розглянемо на прикладі виробничої задачі.

Початкова задача:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} . \tag{3.3}$$

Визначити, яку кількість продукції x_j кожного j-го виду $(j = \overline{1, n})$ необхідно виготовляти в процесі виробництва, щоб максимізувати загальну виручку від реалізації продукції підприємства. Причому відомо: загальна кількість ресурсів — $b_i, i = (\overline{1, m})$, нормативи використання кожного i-го виду ресурсу на кожен j-й вид продукції — $a_{ij}, (i = \overline{1, m}), (j = \overline{1, n})$, а також $c_j, (j = \overline{1, n})$ — ціна реалізації одиниці продукції.

Розглянемо тепер ту саму задачу з іншої позиції. Припустимо, що за певних умов доцільно продавати деяку частину чи всі наявні в господарстві ресурси. Слід визначити цінність ресурсів. Кожному ресурсу $b_i, i=(\overline{1,m})$ поставимо у відповідність його оцінку $y_i, (i=\overline{1,m})$. Умовно вважатимемо, що y_i — ціна одиниці *i*-го ресурсу.

На виготовлення одиниці *j*-го виду продукції x_j витрачається згідно з моделлю (3.1)—(3.3.) усі *m* видів ресурсів у кількості, відповідно, $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, ..., a_{mj}$. Оскільки ціни одиниці кожного виду ресурсів за припущенням дорівнюють $y_i, (i=\overline{1,m})$, то загальна вартість ресурсів, що витрачені на виробництво одиниці *j*-го виду продукції обчислюється, як

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + ... + a_{mj}y_m .$$

Продавати ресурси доцільно лише за умови, що кошти, отримані в результаті продажу ресурсів, перевищуватимуть суму, яку можна було б одержати за реалізацію продукції, виготовленої з тієї самої кількості ресурсів, тобто

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + ... + a_{mj}y_m \geq c_j,\ j = 1,2,...,m .$$

Зрозуміло, що покупці ресурсів прагнуть здійснити операцію якнайдешевше, отже, потрібно обчислити мінімальну вартість одиниці кожного виду ресурсів, за якої їх продаж є доцільнішим за виготовлення продукції. Загальна вартість ресурсів виражається величиною

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m .$$

Отже, у результаті маємо *двоїсту задачу*:

$$\min Z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$y_i \geq 0, (i = 1,2,...m). \tag{3.6}$$

Визначити, які мінімальні ціни можна встановити для одиниці кожного *i*-го виду ресурсу $y_i, i=(\overline{1,m})$, щоб продаж ресурсів був доцільнішим за виробництво продукції. Причому відомо: загальна кількість ресурсів — $b_i, i=(\overline{1,m})$, нормативи використання кожного *i*-го виду ресурсу на кожен *j*-й вид продукції — $a_{ij}, (i=\overline{1,m}), (j=\overline{1,n})$, а також $c_j, (j=\overline{1,n})$ — ціна реалізації одиниці продукції.

Зауважимо, що справжній зміст величин $y_i, i=(\overline{1,m})$ — умовна ціна, що виражає міру цінності відповідного ресурсу для даного виробництва. Англійський термін «shadow prices» у літературі перекладають, як оцінка, або тіньова, неявна, ціна.

Задача (3.4)—(3.7) називається двоїстою, або спряженою, до задачі (3.1)—(3.3), яку називають прямою (основною, початковою). Поняття двоїстості є взаємним. По суті, йдеться про одну задачу, але з різних точок зору. Дійсно, не важко переконатися, що двоїста задача до (3.4)—(3.7) збігається з початковою, і тому кожну з них можна вважати прямою, а іншу — двоїстою. Симетричність двох задач очевидна.

Як пряма, так і двоїста задачі використовують один набір початкових даних: $b_i, i=(\overline{1,m})$, $a_{ij}, (i=\overline{1,m}), (j=\overline{1,n})$, $c_j, (j=\overline{1,n})$. Крім того, вектор обмежень початкової задачі стає вектором коефіцієнтів цільової функції, і навпаки, а рядки матриці *A* (матриці обмежень прямої задачі) стають стовпцями матриці обмежень двоїстої задачі. Кожному обмеженню початкової задачі відповідає змінна двоїстої, і навпаки.

Початкова постановка задачі і математична модель може мати вигляд як (3.1)—(3.3), так і (3.4)—(3.7), отже, як правило, говорять про пару *спряжених задач лінійного програмування*.

3.2. Правила побудови двоїстих моделей оптимізаційних задач

Для побудови двоїстої задачі необхідно звести початкову до стандартного вигляду. Задача лінійного програмування подана у стандартному вигляді, якщо для відшукання максимального значення цільової функції всі нерівності системи обмежень приведені до вигляду «$\le$», а для задачі відшукання мінімального значення — до вигляду «$\ge$».

Якщо пряма задача лінійного програмування подана у стандартному вигляді, то двоїста задача утворюється за такими правилами.

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.
2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.
3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення *max*, то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення *min*, і навпаки.
4. Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.
5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.
6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

Процес побудови двоїстої задачі зручно зобразити схематично (рис. 3.1).

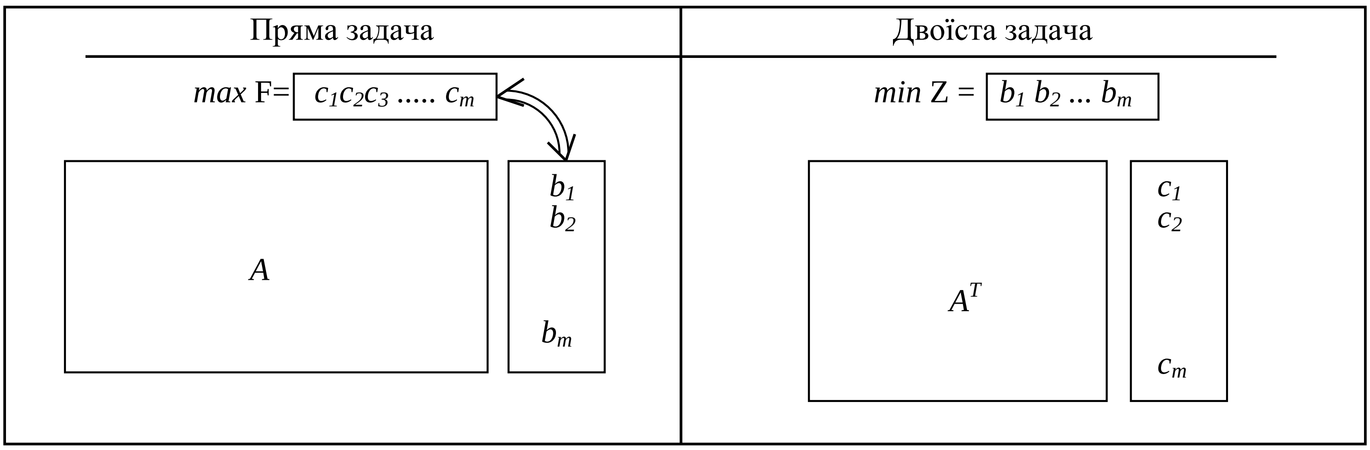


Рис. 3.1

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У *симетричних задачах* обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У *несиметричних задачах* обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої — лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Усі можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач у матричній формі наведено далі.

Симетричні

Пряма задача	**Двоїста задача**
$maxF = CX$	$min\ Z = BY$
$AX \le B$	$A^T Y \ge C$
$\boldsymbol{X \ge 0}$	$Y \ge 0$
$min\ F = CX$	$max\ Z = BY$
$AX \ge B$	$A^T Y \le C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$

Несиметричні

$max\ F = CX$	$min\ Z = BY$
$AX = B$	$A^T Y \ge C$
$X \ge 0$	$Y \in]-\infty;\infty[$
$min\ F = CX$	$max\ Z = BY$
$AX = B$	$A^T Y \le C$
$X \ge 0$	$Y \in]-\infty;\infty[$

Приклад 3.1. До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту.

$$\max F = -5x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язування. Перш ніж записати двоїсту задачу, треба пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак «$\le$». Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Звідси матимемо

$$\max F = -5x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$Z = -y_1 + 5y_2\ (\min);$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -5, \\ -y_1 + 3x_2 \ge 2, \end{cases}.$$
$$y_1 \ge 0,\quad y_2 \ge 0\ ,$$

Або схематично, використовуючи компоненти векторів і матриць.

пряма задача	двоїста задача
$max\ F = \boxed{-5 \quad 2}$	$min\ Z = \boxed{-1 \quad 5}$
$\boxed{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 5 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} -5 \\ 2 \end{matrix}}$

Приклад 3.2. До наведеної задачі лінійного програмування записати двоїсту:

$$\min F = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \le 8, \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16. \end{cases}$$

$$x_j,\ j = 1,2,...,5.$$

Розв'язування. Пряму задачу зведемо до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F мінімізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак «$\ge$», і тому друге обмеження задачі необхідно помножити на (–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отже, матимемо

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20, \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 \ge -8, \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$$\max Z = 20y_1 - 8y_2 - 16y_3.$$

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 + 8y_3 \le 1, \\ -4y_1 + y_2 + 7y_3 \le 6, \\ 13y_1 - 5y_2 + -y_3 \le -7, \\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1, \\ y_1 - y_2 - 9y_3 \le 5. \end{cases}.$$

$$y_1 \in \left]-\infty;\infty\right[, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$$

Оскільки перше обмеження початкової задачі є рівнянням, відповідна йому змінна двоїстої задачі y_1 може набувати довільне значення.

3.3.Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої та двоїстої задач встановлюють леми і теореми двоїстості. Розглянемо задачі (3.1)—(3.3) і (3.4)—(3.6).

Лема 3.1 (основна нерівність теорії двоїстості). *Якщо* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ — допустимі розв'язки, відповідно, прямої і двоїстої задач, то виконується нерівність

$$F(X) \le Z(Y) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \quad (3.7)$$

Доведення. Помножимо кожне із рівнянь системи (3.2) на відповідну змінну двоїстої задачі:

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}\right| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_m \end{matrix}.$$

Звідси маємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + ... + a_{1n}x_ny_1 \le b_1y_1, \\ a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 + ... + a_{2n}x_ny_2 \le b_2y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1y_m + a_{m2}x_2y_m + ... + a_{mn}x_ny_m \le b_my_m. \end{cases}$$

Просумувавши праві і ліві частини нерівностей, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \qquad (3.8)$$

Аналогічно перетворимо систему (3.5) двоїстої задачі:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{matrix} \right. .$$

У результаті, просумувавши ліві та праві частини, матимемо нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \qquad (3.9)$$

Ліві частини нерівностей (3.8) і (3.9) збігаються, отже,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Нерівність (3.7) доведено.

Лема 3.2 (достатня умова оптимальності). Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ — допустимі розв'язки прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність

$$F(X^*) = Z(Y^*), \qquad (3.10)$$

то X^*, Y^* — оптимальні розв'язки відповідних задач.

Доведення. Припустимо, що X_1 — допустимий план початкової задачі (3.1)—(3.3). Тоді на основі нерівності (3.7) дістанемо $F(X_1) \le Z(Y^*)$. За умовою задачі $F(X^*) = Z(Y^*)$, отже,

$$F(X_1) \le Z(Y^*) = F(X^*). \qquad (3.11)$$

Оскільки за припущенням X_1 — довільний допустимий план початкової задачі, то нерівність (3.11) виконується для будь-якого із можливих допустимих розв'язків, отже, X^* надає найбільшого значення цільовій функції (3.1), тобто є оптимальним розв'язком початкової задачі.

Аналогічно доводиться, що Y^* — оптимальний план двоїстої задачі.

3.3.1. Перша теорема двоїстості. ***Теорема*** (***перша теорема двоїстості***). Якщо одна з пари спряжених задач має оптимальний план, то й інша також має розв'язок, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій збігаються

$$\max F = \min Z .$$

Якщо цільова функція однієї з задач не обмежена, то інша задача також не має розв'язку[1].

Доведення. Припустимо, що початкова задача (3.1)—(3.3) має оптимальний план, який одержано симплексним методом. Не порушуючи загальності, можна вважати, що останній базис складається з перших m векторів $A_1, A_2, ..., A_m$. Остання симплексна таблиця матиме вигляд (табл. 3.1).

[1] Зауважимо, якщо одна з задач не має допустимого розв'язку, то двоїста до неї також може не мати допустимого розв'язку, тобто обернене твердження стосовно того, що до другої частини теореми в загальному випадку не виконується.

Таблиця 3.1

i	Базис	$C_б$	План	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
1	x_1	c_1	x_1^*	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2	x_2^*	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
m	x_m	c_m	x_m^*	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		F_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

Позначимо D — матриця, що складена з компонент векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ останнього базису. Для оптимального плану матимемо

$$B = DX^*, \tag{3.12}$$

де $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$; B — вектор, що складається з вільних членів системи обмежень.

Звідки

$$B = DX^* \Rightarrow X^* = D^{-1}B. \tag{3.13}$$

Симплексна табл. 3.1 містить коефіцієнти розкладу векторів $A_1, A_2, ..., A_n$ початкової системи обмежень задачі за векторами базису, тобто кожному вектору з системи обмежень задачі (3.1)—(3.3) A_j відповідає в симплексній таблиці вектор A_j', такий що

$$A_j = DA_j', (j = \overline{1,n}). \tag{3.14}$$

Позначимо через A' матрицю, що складається з коефіцієнтів розкладу векторів A_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$, тоді справедлива рівність

$$A = DA',$$

звідки

$$A' = D^{-1}A. \tag{3.15}$$

Ураховуючи (3.13), значення оптимального плану даної задачі матимемо у вигляді

$$\max F = C^* X^*,$$

$$\text{де } C^* = (c_1^*, c_2^*, ..., c_m^*),$$

причому $\overline{F} = C^*A' - C = (c_1^*A_1' - c_1; c_2^*A_2' - c_2; ...; c_n^*A_n' - c_n) = = (F_1 - c_1; F_2 - c_2; ...; F_n - c_n)$,

тобто всі компоненти вектора $\overline{F}$ є оцінками оптимального плану задачі (3.1)—(3.3), і тому

$$C^*A' - C = \left(F_j - c_j\right) \geq 0, \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{3.16}$$

Оскільки оптимальний план початкової задачі показано у вигляді $X^* = D^{-1}B$, то за правилами побудови двоїстої задачі можна припустити, що її оптимальний план матиме вигляд

$$Y^* = C^* D^{-1}. \quad (3.17)$$

Доведемо, що $Y^* = C^* D^{-1}$ є дійсно оптимальним планом двоїстої задачі.

Система обмежень двоїстої задачі у векторно-матричній формі матиме вигляд:

$$YA \geq C = YA - C \geq 0.$$

Підставимо в дану нерівність значення Y^*. Тоді, враховуючи (3.15), (3.16) і (3.17), матимемо

$$Y^* A - C = C^* D^{-1} A - C = C^* A' - C \geq 0,$$

звідси $Y^* A \geq C$.

Отже, Y^* задовольняє систему обмежень (3.5) двоїстої задачі, тому є допустимим планом задачі (3.4)—(3.6).

Для даного плану значення функціоналу буде

$$Z(Y^*) = Y^* B, \quad (3.18)$$

де $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Підставимо у (3.18) значення Y^* з (3.17) і, враховуючи (3.13), матимемо

$$Z(Y^*) = Y^* B = C^* D^{-1} B = C^* X^* = \max F. \quad (3.19)$$

Доведено, що $Z(Y^*)$ збігається зі значенням оптимального плану початкової задачі.

Таким чином, за лемою 3.2 (достатня умова оптимальності плану задачі лінійного програмування) план Y^* є оптимальним планом двоїстої задачі (3.4)—(3.6).

Аналогічно доводиться, що якщо двоїста задача має розв'язок, то початкова також має розв'язок і виконується $\min Z = \max F$.

Для доведення другої частини теореми припустимо, що лінійна функція початкової задачі не обмежена зверху. Тоді з нерівності $F(X) \leq Z(Y)$ маємо, що $Z(Y) \geq +\infty$, що не має змісту. Отже, двоїста задача в даному випадку не має розв'язків.

Доведена теорема дозволяє в процесі розв'язування однієї задачі одночасно знаходити план іншої.

Економічний зміст першої теореми двоїстості. Максимальний прибуток $F_{\max}$ підприємство одержує, виробляючи продукцію за оптимальним планом $X_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, однак ту саму суму коштів ($Z_{\min} = F_{\max}$) воно може одержати, реалізуючи ресурси за оптимальними цінами $Y_{opt} = (y_1, y_2, ..., y_n)$. За умов використання інших планів $X \neq X_{opt}, Y \neq Y_{opt}$, виходячи з основної нерівності теорії двоїстості, доходи від реалізації продукції завжди менші від витрати на її виробництво.

3.3.2. Друга теорема двоїстості. Між розв'язками спряжених задач, крім рівності значень цільових функцій, існуєтісніший взаємозв'язок. Для його дослідження розглянемо дві симетричні задачі лінійного програмування.

Пряма задача

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad (3.20)$$

$$x_j \geq 0, \ j = (\overline{1, n}).$$

Двоїста задача

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases} \quad (3.21)$$

$$y_i \geq 0, i = (\overline{1, m}).$$

Для розв'язування задач симплексним методом треба привести їх до канонічної форми, для чого до системи обмежень задачі (3.20) необхідно ввести m невід'ємних змінних, а до системи обмежень (3.21) — n невід'ємних змінних. Поставимо обмеженням кожної задачі у відповідність до змінної двоїстої:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & \le b_1, \quad y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} & \le b_2, \quad y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} & \le b_m. \quad y_m \end{cases},$$

аналогічно

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} & \ge c_1, \quad x_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \quad - y_{m+2} & \ge c_2, \quad x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \qquad - y_{m+n} & \ge c_n. \quad x_n \end{cases}.$$

Отже, матимемо таку відповідність між змінними спряжених задач:

Основні змінні прямої задачі				**Додаткові змінні прямої задачі**			
x_1	x_2	x_k	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+l}	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	y_{m+k}	y_{m+n}	y_1	y_2	y_l	y_m
Додаткові змінні двоїстої задачі				**Основні змінні двоїстої задачі**			

Наступна теорема у літературі, як правило, має назву теореми про доповнюючу нежорсткість.

Теорема (**друга теорема двоїстості для симетричних задач**). Для того щоб плани X^* і Y^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, \; j = \overline{1,n} \tag{3.22}$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \; j = \overline{1,m}\,. \tag{3.23}$$

Доведення. ***Необхідність***. Нехай X^* і Y^* — оптимальні плани відповідно прямої і двоїстої задач (3.20) і (3.21). З першої теореми двоїстості відомо

$$F(X^*) = Z(Y^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*\,,$$

а також компоненти векторів X^* і Y^* задовольняють системи обмежень задач (3.20) і (3.21):

$$\sum_{ji=1}^{m} a_{ij}x_j^* \le b_i, i = \overline{1,m} \tag{3.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* \ge c_j \; j = \overline{1,n}\;. \tag{3.25}$$

Помножимо (3.24) на y_i^*, а (3.25) на x_i^* і просумуємо праві та ліві частини:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* y_i^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j^* y_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*\,.$$

Праві частини останніх двох нерівностей збігаються, тому одночасне виконання їх можливе лише за умов

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j^* y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* .$$

Виконаємо перетворення для кожного рівняння

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0 \qquad (3.26)$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0 . \qquad (3.27)$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* \le b_i$, то в рівнянні (3.26) кожна з компонент $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) \le 0$, а $y_i^* \ge 0, i = \overline{1,m}$, тому виконання рівняння (3.26) можливе лише у випадку, коли кожний доданок виду $y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0$.

Аналогічно проведемо міркування для (3.27), отже, $x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0$. Необхідність умов додаткової нежорсткості доведено.

Достатність. За умовою виконуються рівняння

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0$$
$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0 .$$

Довести, що X^* і Y^* — оптимальні плани відповідно прямої та двоїстої задач (*) і (**).

У кожному рівнянні розкриємо дужки і просумуємо перше рівняння за $i, \left(i = \overline{1,m}\right)$, а друге за $j, \left(j = \overline{1,n}\right)$, маємо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j^* y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* .$$

Ліві частини рівнянь тотожні, отже, $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$, тоді за першою теоремою двоїстості X^* і Y^* — оптимальні плани спряжених симетричних задач. Теорему доведено.

Очевидніше взаємозв’язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний i-й компонент оптимального плану спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-й компонент оптимального плану однієї з задач додатний, то відповідне i-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Економічний зміст другої теореми двоїстості. Якщо для виготовлення всієї продукції в кількості, що визначається оптимальним планом X^*, витрати одного i-го ресурсу строго менші від його загального обсягу b_i, то відповідна оцінка такого ресурсу y_i^* (компонента оптимального плану двоїстої задачі) буде дорівнювати нулю, тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є цінним.

Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його кількості b_i, тобто його використано повністю, то він є цінним для виробництва і його оцінка y_i^* буде строго більше нуля.

Для оптимального плану двоїстої задачі Y^*: у випадку, коли деяке *j*-те обмеження виконується як нерівність, тобто всі витрати на виробництво одиниці *j*-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі кількість такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво *j*-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j, її необхідно виготовляти в кількості, що визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$.

3.3.3. Третя теорема двоїстості. Як було з'ясовано в попередньому параграфі, існування двоїстих змінних дає можливість зіставляти витрати на виробництво і ціни на продукцію, що обґрунтовує висновок про доцільність чи недоцільність виробництва кожного виду продукції. Крім того, значення двоїстої оцінки характеризує зміну значення цільової функції, що обумовлена малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Дане твердження формулюється у вигляді теореми.

Теорема (**третя теорема двоїстості**). Компоненти оптимального плану двоїстої задачі $y_i^*, (i=\overline{1,m})$ дорівнюють значенням частинних похідних від цільової функції $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ за відповідними аргументами $b_i, (i=\overline{1,m})$, або

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, (i = 1,2,...,m). \tag{3.28}$$

Доведення. Розглянемо задачу лінійного програмування, подану в канонічній формі

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \tag{3.29}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.30}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}). \tag{3.31}$$

Двоїсту до (3.29)—(3.31) сформулюємо у такому вигляді.

Знайти $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$, які мінімізують значення

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m, \tag{3.32}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_m. \end{cases} \tag{3.33}$$

Причому умова невід'ємності змінних $y_i, (i=\overline{1,m})$ відсутня. Позначимо $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ — оптимальний план двоїстої задачі; $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ — оптимальний план задачі (3.29)—(3.31).

За першою теоремою двоїстості відомо, що

$$\max F = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + ... + c_n x_n^* = \min Z = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + ... + b_m y_m^*,$$

або

$$F = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + ... + b_m y_m^*. \tag{3.34}$$

Оскільки досліджується питання впливу зміни значень $b_i, (i=\overline{1,m})$ на *F*, то лінійну функцію (3.34) можна розглядати як функцію від аргументів $b_i, (i=\overline{1,m})$. Тоді часткові похідні по змінних $b_i, (i=\overline{1,m})$ будуть

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, (i = 1,2,...,m). \tag{3.35}$$

Однак дане твердження справедливе лише для випадку, коли компоненти оптимального плану $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ залишаються постійним, а оскільки за першою теоремою двоїстості $Y^* = C^* D^{-1}$, то значення двоїстих оцінок будуть незмінними лише в межах постійної структури оптимального плану початкової задачі.

Отже, співвідношення (3.35) справедливе лише при досить малій зміні b_i, інакше, суттєва зміна умов початкової задачі (правих частин системи обмежень (3.30) і цільової функції (3.32)) приведе до зміни базису в оптимальному плані прямої задачі, а значить — і до іншого розв'язку двоїстої $\tilde{Y} \neq Y^*$.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості. Двоїсті оцінки є унікальним інструментом, який дає можливість порівняти непорівнювальні речі. Очевидно, неможливим є просте зіставлення величин, що мають різні одиниці виміру. Якщо розглянути виробничу задачу, цікавим виглядає питання, як змінюватиметься значення цільової функції (може вимірюватись у грошових одиницях) у разі зміни обсягів ресурсів (можуть вимірюватися у тоннах; м^2; люд./год; га тощо).

Використовуючи третю теорему двоїстості, легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення (зменшення) обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок показують, на яку величину змінюється цільова функція при зміні обсягу відповідного даній оцінці ресурсу $y_i^* = \dfrac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Таким чином, при малій зміні b_i замість задачі (3.29)—(3.31) маємо нову задачу, де b_i замінено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Позначимо X' — оптимальний план нової задачі. Для визначення $F(X')$ не потрібно розв'язувати нову задачу лінійного програмування, достатньо скористатись формулою $F(X') - F(X^*) = y_i^* \Delta b_i$, де X^* — оптимальний план (3.29)—(3.31).

3.4. Приклади застосування теорії двоїстості для знаходження оптимальних планів прямої та двоїстої задач

Кожна з двох спряжених задач може бути розв'язана окремо, проте встановлені теоремами двоїстості залежності між оптимальними планами прямої та двоїстої задач дають можливість знаходити розв'язок двоїстої задачі за наявності оптимального плану прямої, і навпаки.

Приклад 3.3. До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати одну з них симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі.

$$\max F = -5x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Перш ніж записати двоїсту задачу, треба пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак «–». Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний, у результаті матимемо

$$\max z = -5x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$F = -y_1 + 5y_2 \ (\min);$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -5, \\ -y_1 + 3x_2 \geq 2, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

1. max $z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 4}.$$

2. Векторна форма запису системи обмежень матиме вигляд

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній вектор $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, тому використаємо штучну змінну в першому обмеженні.

3. Розширена задача лінійного програмування буде така:

$$\max z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 5}.$$

У цій задачі x_4 і x_5 — базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 — вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$. Перший опорний план задачі:

$$x_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 5;\ 1),\ z_0 = -M.$$

4. Подальше розв’язування прямої задачі подано у вигляді сиплекс-таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	–5	2	0	0	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow x_5$ x_4	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	–1 0	0 1	1 0	1 5/3
$z_j - c_j \geq 0$		0 $-M$	5 –M	–2 –M	0 M	0 0	0 0	
x_2 $\leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 –1	1 0	–1 3	0 1	1 –3	– 2/3
$z_j - c_j \geq 0$		2	7	0	–2	0	2 + M	
x_2 x_3	2 0	5/3 5/3	2/3 –1/3	1 0	0 1	1/3 1/3	0 –1	
$z_j - c_j \geq 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	0 + M	

З останньої симплекс-таблиці бачимо, що оптимальний план прямої задачі

$$x^* = (0;\ 5/3;\ 2/3;\ 0),\ z_{\max} = 10/3.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна записати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$\min F = \max z = 10/3,$$
$$y^* = \vec{c}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{баз} = (2;\ 0)$ та міститься в стовпчику $c_{баз}$ останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

він також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних x_5 і x_4, які утворювали початковий базис.

Отже,

$$y^* = (2;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;\ 2/3),$$

$$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Застосовуючи до розв’язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв’язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

Приклад 3.4. До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв’язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 2x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Розв’язування. За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$\max F = y_1 + 4y;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 1, \\ y_1 + 2y_2 \leq 2, \\ -y_1 + y_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 — лише невід’ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв’язати графічно (рис. 3.2).

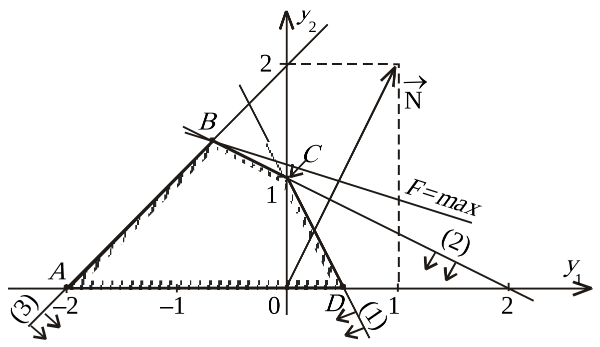


Рис. 3.2

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі F досягає у точці B многокутника $ABCD$. Її координати:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

тобто $y^* = (-2/3;\ 4/3)$; $\max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3$.

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості.

Підставимо y^* у систему обмежень двоїстої задачі і з’ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot(-2/3)+4/3=0; \\ -2/3+2\cdot 4/3=2; \\ -1\cdot(-2/3)+4/3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<1; \\ 2=2; \\ 2=2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, доходимо висновку, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $y_2 = 4/3$ додатна, доходимо висновку, що друге обмеження прямої задачі для x^* виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій $x_1 = 0$, і визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто $x^* = (0;\ 5/3;\ 2/3)$, $\min z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5/3 + 2 \cdot 2/3 = 14/3$.

Умова $\min z = \max F = 14/3$ виконується, і тому $x^* = (0;\ 5/3;\ 2/3)$; $y^* = (-2/3;\ 4/3)$ є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.

Приклад 3.5. Визначити, чи оптимальні такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$\min z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

а) $x = (8/7;\ 3/7;\ 0)$; б) $x = (0;\ 1/5;\ 8/5)$; в) $x = (1/3;\ 0;\ 1/3)$.

Розв'язування. Принцип розв'язування задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу та припускаючи, що відповідний план X є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій збігатимуться, то припущення правильне. Протилежного висновку можна дійти в таких випадках.

1. Якщо запропонований план X недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі.

2. Якщо визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі.

3. Якщо визначений план двоїстої задачі допустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції F не дорівнює значенню функції z, тобто не виконується умова першої теореми двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу до прямої задачі лінійного програмування:

$$\max F = y_1 + 2y_2;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 12, \\ -3y_1 + 2y_2 \leq -4, \\ y_1 + y_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$y_1 \in \left]-\infty; \infty\right[0,\ i = 1, 2.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. $x = (8/7;\ 3/7;\ 0)$. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot 8/7 - 3\cdot 3/7 + 0 = 1; \\ 8/7 + 2\cdot 3/7 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2, \end{cases}$$

Обидва обмеження виконуються і тому $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$ є допустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді для нього $z = 12 \cdot 8/7 + 4 \cdot 3/7 + 2 \cdot 0 = 12$.

Скористаємося другою теоремою двоїстості та визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0$; $x_2 = 3/7 > 0$, то згідно з другою частиною другої теореми двоїстості можна записати перше та друге обмеження як рівняння і визначити y_1 і y_2:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 12; \\ -3y_1 + 2y_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення у третє обмеження системи двоїстої задачі:

$$y_1 + y_2 \le 2;$$
$$4 + 4 = 8 > 2.$$

Для визначених значень $y_1 = 4$; $y_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план $y = (4; 4)$ є недопустимим планом двоїстої задачі. Унаслідок цього наше припущення, що $X = (8/7; 3/7; 0)$ є оптимальним планом вихідної задачі, виявилося помилковим.

2. $X = (0; 1/5; 8/5)$. Підставимо цей план в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1/5 + 8/5 = 1; \\ 0 + 2 \cdot 1/5 + 8/5 = 2. \end{cases}$$

План допустимий і для нього $z = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1/5 + 2 \cdot 8/5 = 12/5$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_3 та x_2 додатні, то друге та третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4; \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8/5; \\ y_2 = 2/5. \end{cases}$$

Перевіримо, що виконується перше обмеження двоїстої задачі для визначених значень y_1 та y_2: $2 \cdot 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12$. Отже, перше обмеження виконується, і тому $y = (8/5; 2/5)$ є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього

$$F = 8/5 + 2 \cdot 2/5 = 12/5 = Z.$$

З огляду на викладене можна зробити висновок, що $Y^* = (8/5; 2/5)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, а $X^* = (0; 1/5; 8/5)$ — оптимальним планом прямої задачі.

Наше припущення відносно запропонованого плану виявилося правильним.

3. $X = (1/3; 0; 1/3)$. Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються так:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/3 - 3 \cdot 0 + 1/3 = 1; \\ 1/3 + 2 \cdot 0 + 1/3 = 2/3 \ne 2. \end{cases}$$

Оскільки $X = (1/3; 0; 1/3)$ є недопустимим планом, то він не може бути також оптимальним планом прямої задачі.

Отже, перевірка запропонованих планів на оптимальність дала такі результати: а) ні; б) так, $X^* = (0; 1/5; 8/5)$, $\min Z = 12/5$; в) ні.

3.5. Післяоптимізаційний аналіз розв'язків лінійних оптимізаційних задач

Післяоптимізаційний аналіз задачі лінійного програмування, особливо для прикладних досліджень, є важливішою частиною лінійного програмування, ніж пошук оптимального розв'язку задачі.

Як уже зазначалось, задачі лінійного програмування є найпростішим класом задач математичного програмування. Спрощення економіко-математичної моделі відбувається через відсутність урахування впливу випадкових факторів на економічні процеси (об'єкти), що моделюються; заміну динамічних процесів на їх можливі статичні аналоги; використання лінійних функцій замість реальних нелінійних залежностей між економічними показниками тощо.

Очевидно, що за таких допущень більшість параметрів задачі лінійного програмування є наближеними значеннями. Тому важливим вбачається питання встановлення діапазону стійкості оптимальних планів прямої та двоїстої задач.

У даному параграфі буде розглянуто вплив змін параметрів задачі, у межах яких залишається постійною структура оптимального плану, а також методи визначення зміни значень оптимального плану, якщо його структура порушується.

Розглянемо задачу лінійного програмування

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{3.37}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}), \tag{3.38}$$

для якої знайдено оптимальний план.

Остання симплексна таблиця має вигляд (табл. 3.2). Не обмежуючи загальності, можна вважати, що останній базис складається з перших *m* векторів.

Таблиця 3.2

i	Базис	Сб	План	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
1	x_1	c_1	x_1^*	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2	x_2^*	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
m	x_m	c_m	x_m^*	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
m+1	$F_j - c_j \ge 0$		F_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

Розглянемо вплив на оптимальний план задачі зміни таких параметрів як компоненти вектора обмежень $b_i, (i = \overline{1,m})$; коефіцієнти цільової функції $c_j, (j = \overline{1,n})$; коефіцієнти матриці системи обмежень (3.37) — $a_{ij}, (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m})$.

3.5.1. Зміна компонент вектора обмежень. Припустимо, що деяке *k*-те обмеження ($k = \overline{1,m}$) має початковий обсяг b_k. Нехай початковий обсяг змінився на величину Δb_k. Отже, *k*-те обмеження в системі (3.37) набуде вигляду

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k + \Delta b_k. \tag{3.39}$$

Для зведення (3.39) до канонічного виду треба ввести додаткову змінну x_{n+k} (якщо обмеження має вигляд рівняння, тоді як таку змінну можна розглядати невід’ємну штучну змінну).

А. Розглянемо випадок, коли додаткова змінна в оптимальному плані небазисна і дорівнює нулю.

З першої теореми двоїстості відомо, що оптимальний план прямої задачі (як і кожен поточний опорний план) можна подати у вигляді

$$X^* = D^{-1}B, \tag{3.40}$$

де D — матриця, що складена з компонент векторів $A_1, A_2, \ldots, A_m$ останнього базису; $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0)$ — оптимальний план задачі (3.36)—(3.38); *B* — вектор, що складається з вільних членів системи обмежень в останній симплексній таблиці.

Таким чином, якщо змінюються компоненти вектора *B*, змінюються також значення $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$. Однак існує діапазон, у межах якого всі компоненти $x_i^*, (j = \overline{1,m})$ залишаються невід’ємними, тобто структура оптимального плану незмінна. Визначимо ці межі.

Вектор B подамо у вигляді

$$B' = B + \Delta b_k e_k, \tag{3.41}$$

де e_k — одиничний вектор-стовпчик; 1 — k-та компонента. Тоді, використовуючи (3.40), матимемо

$$X'^* = D^{-1}B' = D^{-1}B + \Delta b_k D^{-1} e_k = X^* + \Delta b_k d_k, \tag{3.42}$$

де d_k — (результат добутку матриці D^{-1} та одиничного вектора e_k) k-й стовпчик матриці D^{-1}.

Позначимо елементи k-го стовпчика матриці D^{-1} через $a_{1,n+k}, a_{2,n+k}, ..., a_{m,n+k}$, тоді

$$X'^* = X^* + \Delta b_k d_k \text{ або } x_i^* + a_{i,n+k}\Delta b_k, (i = \overline{1,m}).$$

Остання симплексна табл. 3.3 матиме такий вигляд.

Таблиця 3.3

i	Базис	$C_б$	План	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_{n+k}	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_{nki}	...	x_n
1	x_1	c_1	$x_1^* + \Delta b_k a_{1,n+k}$	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n+k}$	...	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2	$x_2^* + \Delta b_k a_{2,n+k}$	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	$a_{2,n+k}$	...	a_{2n}
m	x_m	c_m	$x_m^* + \Delta b_k a_{m,n+k}$	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	$a_{m,n+k}$	...	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		F'	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_{n+k}	...	Δ_n

Оскільки необхідно, щоб план X'^* також був оптимальним має виконуватися умова невід’ємності всіх компонент даного вектора, отже,

$$x_i^* + a_{i,n+k}\Delta b_k \geq 0, (i = \overline{1,m}), \tag{3.43}$$

звідси

$$\max_{a_{i,n+k}>0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\} \leq \Delta b_k \leq \min_{a_{i,n+k}<0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\}, \tag{3.44}$$

тоді нижня і верхня границі зміни значення b_k будуть

$$\underline{b_k} = b_k - \Delta b_k = b_k + \max_{a_{i,n+k}>0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\}$$

$$\overline{b_k} = b_k + \Delta b_k = b_k + \min_{a_{i,n+k}<0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\}.$$

Якщо не існує жодного $a_{i,n+k} > 0$ для $i = \overline{1,m}$, то $\Delta b_k > -\infty$, а якщо не існує жодного $a_{i,n+k} < 0$ для $i = \overline{1,m}$, то $\Delta b_k < \infty$.

Для задачі пошуку мінімального значення цільової функції та обмежень системи типу «$\geq$» значення Δb_k змінює знак, так як замість нерівності $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \geq b_k + \Delta b_k$ можна розглянути рівносильну нерівність $-\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \leq -(b_k + \Delta b_k)$.

Отже, для $\underline{b_k} \le b_k \le \overline{b_k}$ при будь-якому значенні $k=\overline{1,m}$, що відповідає додатковій небазисній змінній x_{n+k} структура оптимального плану задачі (3.36)—(3.38) залишиться постійною.

В. Розглянемо випадок, коли додаткова змінна базисна.

Якщо додаткова змінна x_{n+k} базисна, то це означає, що у (3.42) d_k — одиничний вектор з *k*-ю компонентою рівною одиниці, отже, система нерівностей (3.43) перетвориться на таку:

$$\begin{cases} x_1^* \ge 0, \\ x_2^* \ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+k}^* + \Delta b_k \ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m^* \ge 0 \end{cases}$$

Очевидно, що значення додаткової базисної змінної визначає діапазон змін, у якому відповідна компонента b_k може зменшуватись (збільшуватись для обмежень типу «$\ge$»).

Оптимальний план залишається незмінним у діапазоні $b_k + \Delta b_k$ для тих $k=\overline{1,m}$, яким відповідають додаткові базисні змінні x_{n+k}, де

$$-x_{n+k}^* \le \Delta b_k < \infty \qquad (3.45)$$

для обмежень системи (3.37) типу «$\le$».

Для задачі знаходження мінімального значення цільової функції та обмежень системи (3.37) типу «$\ge$» можливі зміни компонент правої частини системи обмежень визначаються з нерівності:

$$-\infty < \Delta b_k \le x_{n+k}^*. \qquad (3.46)$$

С. Якщо компоненти вектора вільних членів системи обмежень задачі лінійного програмування змінюються одночасно для кількох чи всіх значень $i=\overline{1,m}$, то визначення границь можливих змін величин $b_k, (k=\overline{1,m})$ стає надто складною проблемою. Однак у такому випадку завжди можна перевірити, чи задовольняють конкретні зміни величин $b_k, (k=\overline{1,m})$ системі

$$X'^* = D^{-1}B + \Delta b_k D^{-1}E = X^* + \Delta b_k D^{-1} \ge 0,$$

де E — одинична матриця. Якщо позначити елементи матриці D^{-1} $a_{i,n+k}, (i=\overline{1,m}), (k=\overline{1,m})$, тоді

$$X'^* = X^* + \Delta b_k D^{-1} \text{ або } x_i^* + \sum_{k=1}^{m} a_{i,n+k}\Delta b_k, (i=\overline{1,m}).$$

Оскільки необхідно, щоб план X'^* також був оптимальним, має виконуватися умова невід’ємності всіх компонент вектора, отже,

$$x_i^* + \sum_{k=1}^{m} a_{i,n+k}\Delta b_k \ge 0, (i=\overline{1,m}),$$

тобто

$$\begin{cases} x_1^* + a_{1,n+1}\Delta b_1 + a_{2,n+1}\Delta b_2 + \ldots + a_{m,n+1}\Delta b_m \ge 0, \\ x_2^* + a_{1,n+2}\Delta b_1 + a_{2,n+2}\Delta b_2 + \ldots + a_{m,n+2}\Delta b_m \ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m^* + a_{1,n+m}\Delta b_1 + a_{2,n+m}\Delta b_2 + \ldots + a_{m,n+m}\Delta b_m \ge 0. \end{cases} \qquad (3.47)$$

Тоді якщо значення $\Delta b_k, (k=\overline{1,m})$ задовольняють всі нерівності системи (3.47) при змінах вільних членів початкової системи обмежень на $\Delta b_k, (k=\overline{1,m})$, структура оптимального плану задачі (3.36)—(3.38) залишається постійною.

Для визначення верхньої і нижньої границь змін $\Delta b_k, (k = \overline{1,m})$, у межах яких структура оптимального плану залишається постійною, необхідно розв'язати систему (3.37). Однак у більшості випадків для знаходження оптимального плану нової задачі лінійного програмування X'^* простіше розв'язати задачу симплексним методом, змінюючи вільні члени системи (3.37) на $b_i' = b_i + \Delta b_i, (i = \overline{1,m})$.

D. Для двох значень $\Delta b_r, \Delta b_s$, що задовольняють систему (3.47), причому за оптимальним планом обмеження, що відповідають b_r, b_s у системі (3.37) виконуються як рівняння, можна визначити норму заміщення, що вказує, наскільки необхідно збільшити (зменшити) величину b_s при зменшенні (збільшенні) b_r, щоб значення цільової функції залишилось незмінним.

З третьої теореми двоїстості відомо, що за малих значень $\Delta b_i, (i = \overline{1,m})$, тобто при таких значення приросту, які не змінюють значення двоїстих оцінок, а отже, задовольняють систему (3.47), виконується $y_i^* = \frac{\partial F}{\partial b_i}$,

або
$$y_i^* = \frac{\partial F}{\partial b_i} = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}.$$

Нехай величина b_r змінилась на Δb_r. Визначимо як необхідно змінити b_s, щоб значення цільової функції залишилось сталим. Зміна b_r означає $y_r^* = \frac{\Delta F_r}{\Delta b_{ir}} \Rightarrow \Delta F_r = y_r^* \Delta b_r$, аналогічно при зміні b_s на Δb_s маємо $y_s^* = \frac{\Delta F_s}{\Delta b_{sr}} \Rightarrow \Delta F_s = y_s^* \Delta b_s$. Для того щоб значення функціоналу залишилось, незмінним необхідно

$$\Delta F_r = \Delta F_s = y_r^* \Delta b_r = y_s^* \Delta b_s.$$

Звідси виразимо шуканий вплив Δb_r на Δb_s:

$$\Delta b_r = \frac{y_s^*}{y_r^*} \Delta b_s. \tag{3.48}$$

При відповідній заміні величин b_r і b_s значення цільової функції задачі (3.36)—(3.38) не зміниться проте оптимальний план буде іншим.

Економічний зміст нерівностей (3.44), (3.45), (3.46), (3.47) визначають границі змін загального обсягу ресурсів, у межах яких визначена оптимальним планом структура виробництва продукції залишається незмінною.

Рівняння (3.48) визначає, якою кількістю одного дефіцитного ресурсу можна замінити інший дефіцитний ресурс, щоб цільова функція не змінилась.

3.5.2. Зміна коефіцієнтів цільової функції. Розглянемо задачу лінійного програмування (3.36)—(3.38). Припустимо, що коефіцієнт цільової функції при деякій *k*-й змінній $k = \overline{1,n}$ з початковим значенням c_k змінився на величину Δc_k. Отже, цільова функція (3.36) набуде вигляду

$$F' = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + (c_k + \Delta c_k) x_k + \ldots + c_n x_n = (C + \Delta c_k e_k) X, \tag{3.49}$$

де *C*, *X* — вектор компонент цільової функції і вектор змінних; e_k — одиничний вектор-рядок, де одиниця відповідає *k*-й компоненті.

Дослідимо питання визначення границь можливих змін коефіцієнтів цільової функції, в межах яких структура оптимального плану залишається постійною.

А. Перший випадок — коефіцієнт c_k відповідає базисній змінній оптимального плану. За припущенням, базисними змінними оптимального плану є перші *m* векторів останньої симплексної таблиці, отже, $k = \overline{1,n}$.

Зміни коефіцієнтів цільової функції в процесі реалізації симплексного методу впливатимуть лише на значення оцінкового ряду ($F_j - c_j$).

Для оптимального плану задачі (3.36)—(3.38), як відомо з пп. 2.7.4, оцінки векторів розраховують, як

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X) - c_j = CX - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j ,\ j = 1,2,...,n .$$

Якщо цільова функція має вигляд (3.49), тоді оцінки векторів розраховуватимуться за формулою:

$$\begin{aligned} \Delta'_j &= F'_j - c_j = F'(X) - c_j = \left(C + \Delta c_k e_k\right)X - c_j = \\ &= \left(CX - c_j\right) + \Delta c_k e_k X = \left(F_j - c_j\right) + \Delta c_k e_k X = \Delta_j + a_{kj}\Delta c_k ,(j = \overline{1,n}) \end{aligned},$$

де a_{kj} — елементи вектора-рядка, який є результатом добутку $e_k X$.

Остання симплексна таблиця (табл. 3.4) набуває такого вигляду.

Таблиця 3.4

i	Базис	Сб	План	c_1	c_2	...	$c_k + \Delta c_k$	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
1	x_1	c_1	x_1^*	1	0	...	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2	x_2^*	0	1	...	0	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	x_j	$c_k + \Delta c_k$	x_k^*	0	0	...	1	...	0	$a_{k,m+1}$		a_{jn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_m	c_m	x_m^*	0	0	...	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		F'	*0*	*0*	...	*0*	...	*0*	Δ_{m+1}	...	Δ_n

Для того щоб план задачі з цільовою функцією (3.49) і системою обмежень (3.37), (3.38) також був оптимальним, має виконуватися умова

$$\Delta_j + a_{kj}\Delta c_k \geq 0, (j = \overline{m+1,n}). \tag{3.50}$$

Отже, у разі зміни коефіцієнтів цільової функції, що відповідають базисним змінним, діапазон стійкості оптимального плану визначається з (3.50):

$$\max_{a_{kj}>0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\} \leq \Delta c_k \leq \min_{a_{kj}<0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\}. \tag{3.51}$$

Тоді нижня і верхня границі зміни значення c_k будуть

$$\underline{c_k} = c_k - \Delta c_k = c_k + \max_{a_{kj}>0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\}$$

$$\overline{c_k} = c_k + \Delta c_k = c_k + \min_{a_{kj}<0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\}.$$

Якщо не існує жодного $a_{kj} > 0$ для $k = \overline{1, m}$, то $\Delta c_k > -\infty$, а якщо не існує жодного $a_{kj} < 0$ для $k = \overline{1, m}$, то $\Delta c_k < \infty$.

Отже, при змінах в інтервалі $\underline{c_k} \leq c_k \leq \overline{c_k}$ будь-якого значенні $k = \overline{1, m}$, що відповідає базисній змінній структура оптимального плану, задачі (3.36)—(3.38) залишиться постійною.

B. Другий випадок — змінюється коефіцієнт цільової функції при небазисній змінній.

Зміна коефіцієнта цільової функції небазисної змінної впливає на оцінку лише цієї змінної. Припустимо, що це коефіцієнт c_k і за припущенням в даній задачі $k = \overline{m+1, n}$. Нехай цей коефіцієнт зміниться на величину Δc_k. Тоді для задачі з цільовою функцією (3.50) в останній симплексній таблиці зміниться лише одна оцінка, що відповідає небазисній змінній x_k:

$$\Delta'_k = \Delta_k + \Delta c_k,$$

де Δ_k — оцінка вектора при змінній x_k задачі (3.36)—(3.38). Дана оцінка має бути невід'ємною, отже, $\Delta'_k = \Delta_k + \Delta c_k \geq 0$.

Для небазисної змінної діапазон стійкості оптимального плану визначається нерівністю

$$-\infty < \Delta c_k \leq \Delta_k, \tag{3.52}$$

тобто для коефіцієнтів цільової функції при небазисних змінних існує лише верхня межа зміни діапазону Δc_k.

C. Якщо коефіцієнти при змінних цільової функції (3.36) задачі лінійного програмування змінюються одночасно для кількох чи всіх значень $k = \overline{1, n}$, то визначення границь можливих змін величин $c_k, (k = \overline{1, n})$ здійснюється аналогічно випадку (A).

Для того щоб план задачі з цільовою функцією, в якій одночасно змінюються кілька чи всі значення $\Delta c_k, (k = \overline{1, n})$, і системою обмежень (3.37), (3.38) також був оптимальним, має виконуватися аналогічна (3.50) умова:

$$\Delta_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \Delta c_k \geq 0, (k = \overline{1, m}). \tag{3.53}$$

З системи (3.53) знаходять діапазон змін $\Delta c_k, (k = \overline{1, n})$, для якого структура оптимального плану початкової задачі буде незмінною.

Економічний зміст нерівностей (3.51), (3.52) і (3.53) — визначають границі можливої зміни ціни (собівартості, прибутку) одиниці кожного виду продукції, у межах яких встановлена оптимальним планом структура виробництва продукції залишається незмінною.

3.5.3. Зміна коефіцієнтів матриці обмежень. Як правило, коефіцієнти $a_{ij}, (i = \overline{1, m})$, $(j = \overline{1, n})$ матриці системи обмежень задачі (3.36)—(3.38) відомі з більшою достовірністю, ніж компоненти вектора цільової функції чи вектора обмежень, оскільки вони є переважно технологічними коефіцієнтами (нормативами використання ресурсу на одиницю виготовлення кожного виду продукції) і не підпадають під вплив випадкових факторів у такій мірі, як ціни чи ресурси.

Розглянемо лише випадок зміни коефіцієнтів, що відповідають небазисним змінним, оскільки зміна значень коефіцієнтів матриці обмежень, що відповідає базисним змінним, приводить до зміни базисної матриці *D*, і здійснити аналіз досить складно.

Розглянемо *k*-ту небазисну змінну ($k = \overline{1, n}$) і відповідний їй стовпчик з компонентами $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$.

Якщо деяка *l*-та компонента ($l = \overline{1, m}$) (чи кілька компонент) даного вектора зміниться на величину Δa_{lk}, за алгоритмом симплексного методу це приведе до зміни значення оцінки відповідного вектора Δ_k.

Для оптимального плану задачі (3.36)—(3.38), як відомо з пп. 2.7.4, оцінки векторів розраховують, як

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X) - c_j = CX - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j,\ j = 1,2,...,n \tag{3.54}$$

або, якщо $j = k$, маємо $\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} - c_k$.

Позначимо $A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$. Нехай для деякого k виконується

$$A'_k = A_k + \Delta a_{lk} e_k. \tag{3.55}$$

Розрахуємо значення оцінки вектора A'_k, підставляючи у (3.54) нові значення a_{ij}:

$$\Delta'_k = \left(\sum_{i=1}^{m} c_k a_{ik} - c_k \right) + c_k \Delta a_{lk}. \tag{3.56}$$

Для того щоб план нової задачі також був оптимальним має виконуватися умова, аналогічна

$$\Delta'_k = \left(\left(\sum_{i=1}^{m} c_k a_{ik} - c_k \right) + c_k \Delta a_{lk} \right) \geq 0. \tag{3.57}$$

Отже, розв'язок залишається оптимальним в діапазоні змін:

$$\Delta a_{lk} \leq \frac{\Delta_k}{-c_k},\ \text{якщо}\ c_k < 0, \tag{3.58}$$

$$\Delta a_{lk} \geq \frac{-\Delta_k}{c_k},\ \text{якщо}\ c_k > 0. \tag{3.59}$$

Економічний зміст нерівностей (3.58), (3.59) — визначають границі можливої зміни норм використання ресурсів на виготовлення одиниці продукції, в межах яких визначена оптимальним планом структура виробництва продукції залишається незмінною.

Розглянутий випадок стосується зміни коефіцієнтів $\Delta a_{ij}\ (i = \overline{1,m}),(j = \overline{1,n})$ для тих видів продукції, виготовлення яких за оптимальним планом є недоцільним.

На перший погляд здається, що таке дослідження є беззмістовним. Однак виконані розрахунки містять додаткову інформацію яку можна використати при прийнятті управлінських рішень у виробництві. Приміром визначити, яким чином необхідно змінити норми використання ресурсів на виготовлення одиниці нерентабельної продукції для зміни асортименту виробництва.

3.5.4. Двоїстий симплексний метод. Як відомо з попередніх параграфів даного розділу, кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність двоїсту. Теоремами двоїстості встановлено зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач. Для пошуку розв'язку однієї зі спряжених задач можна перейти до двоїстої і, використовуючи її оптимальний план, визначити оптимальний план початкової.

Перехід до двоїстої задачі не обов'язковий. Легко побачити, що звичайна симплексна таблиця у стовпчиках містить початкову задачу, а в рядках — двоїсту.

Оцінками плану прямої задачі є рядок $\Delta_j = F_j - c_j\ (j = \overline{1,n})$, а оцінками плану двоїстої — стовпчик «План» з компонентами вектора вільних членів системи обмежень B. Таким чином, розв'язуючи пряму задачу, симплексний метод дозволяє одночасно знаходити і розв'язок двоїстої задачі.

Однак можна також розв'язати двоїсту задачу за таблицею, у якій записана пряма, знайти оптимальний план двоїстої задачі і разом з тим одержати план початкової задачі. Такий спосіб розв'язування задачі лінійного програмування має назву *двоїстий симплексний метод*. Симплексний і двоїстий симплексний методи пов'язані між собою теорією двоїстості.

Нехай необхідно розв'язати задачу лінійного програмування, подану в канонічному вигляді

$$\min F = CX \tag{3.60}$$

$$AX = B\,, \tag{3.61}$$
$$X \geq 0\,, \tag{3.62}$$

тоді двоїста буде

$$\max Z = BY \tag{3.63}$$
$$YA \leq C\,. \tag{3.64}$$

Двоїстий симплексний метод як перший опорний план обирає деякий допустимий розв'язок двоїстої задачі (іноді в літературі зустрічається назва *псевдоплан*) і зберігає його допустимість для двоїстої задачі протягом усіх кроків.

Припустимо, початковий базис складається з m векторів $D = (A_1, A_2, \ldots A_l, \ldots, A_m)$, причому хоча б одна з компонент вектора $X = D^{-1}B = (x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_n)$ від'ємна, нехай $x_l < 0$, однак справедливий критерій оптимальності плану, тобто всі оцінки векторів $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ ($j = \overline{1,n}$).

На основі першої теореми двоїстості план двоїстої задачі шукаємо у вигляді $Y = C_{\ddagger} D^{-1}$. Цей план не є оптимальним для прямої задачі, оскільки не задовольняє умову невід'ємності змінних (3.62) і не є оптимальним для двоїстої задачі, оскільки всі оцінки векторів оптимального плану двоїстої задачі мають бути невід'ємними.

Отже, вектор, що відповідає компоненті $x_l < 0$, потрібно виключити з базису початкової задачі, а вектор двоїстої задачі, що відповідає від'ємній оцінці, — включити до базису двоїстої.

У прямому симплекс-методі спочатку виявляємо змінну, яку слід вивести з базису, в двоїстому симплекс-методі, навпаки, — спочатку визначається змінна, яку виключають до базису, а потім змінну, яка вводиться в базис. У літературі зустрічаються різні варіанти двоїстого симплексного методу, які не мають принципової різниці.

Розглянемо *алгоритм двоїстого симплексного методу.*

1. Звести всі обмеження задачі до вигляду «≤», ввести додаткові невід'ємні змінні, визначити початковий базис і перший опорний план $X = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

2. Якщо всі оцінки векторів $\Delta_j = F_j - c_j \leq 0$ і компоненти вектора-стовпчика «План» $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \geq 0$ для всіх $i = \overline{1,m}$, то задача розв'язана. Інакше необхідно обрати найбільший за модулем (найменший) $b_l < 0$, відповідну змінну x_l потрібно виключити з базису.

3. Якщо в l-му рядку, що відповідає змінній x_l, не міститься жодного $a_{lj} < 0$, то цільова функція двоїстої задачі не обмежена на багатокутнику розв'язків, а початкова задача розв'язку не має. Інакше, існують деякі $a_{lj} < 0$, тоді для відповідних стовпчиків визначаємо аналог оцінки θ прямого симплекс-методу:

$$\theta_j = \max_j \left(\frac{\Delta_j}{a_{lj}} \right) \; (a_{lj} < 0) \text{ або } \theta_j = \min_j \left| \frac{\Delta_j}{a_{lj}} \right| \; (a_{lj} < 0),$$

що дає змогу обрати вектор, який буде включено в базис.

4. Виконуючи крок методу повних виключень Жордана—Гауса переходимо до наступної симплексної таблиці. Перехід до п. 2.

Відмітимо, що для задачі знаходження максимального значення цільової функції за наведеним алгоритмом, необхідно перейти до цільової функції $F' = -F$, або дещо змінити сам алгоритм.

Приклад 3.6. Знайти мінімальне значення функції

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Розв'язування: Домножимо другу нерівність на (–1) і введемо додаткові змінні:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,5})$$

Початковий базис — вектори A_4 і A_5. Псевдоплан $X = (x_4 = 4; x_5 = -5)$.

Базис	$C_{баз}$	План	–2	1	5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4 $\leftarrow x_5$	0 0	4 –5	1 –1	1 5	–1 –1	1 0	0 1
$F_j - c_j \leq 0$		0	2	–1	–5	0	0

Оскільки $b_2 = -5 < 0$, то з базису необхідно вивести вектор A_5 і відповідну змінну x_5.

Для визначення вектора, що вводиться до базису, розрахуємо значення θ_j. У другому рядку міститься два від'ємні коефіцієнти $a_{21} = -1, a_{23} = -1$, які відповідають векторам A_1 і A_3. Визначимо, який із цих векторів треба вводити в базис.

$$\left|\frac{\Delta_1}{a_{21}}\right| = \left|\frac{2}{-1}\right| < \left|\frac{\Delta_3}{a_{23}}\right| = \left|\frac{-5}{-1}\right|$$

Отже, $\theta_2 = \min(2;5) = 2$, тоді вводиться вектор A_1. Розв'язувальний елемент (–1).

У результаті реалізації методу повних виключень Жордана—Гауса матимемо оптимальний план.

$\leftarrow x_4$ x_1	0 –2	–1 5	0 1	6 –5	–2 1	1 0	1 –1
$F_j - c_j \leq 0$		–10	0	9	–7	0	2
x_3 x_1	5 –2	1/2 9/2	0 1	–3 –2	1 0	–1/2 1/2	–1/2 –1/2
$F_j - c_j \leq 0$		–13/2	0	–12	0	–7/2	–3/2

Оптимальний план початкової задачі:

$$X^* = \left(\frac{9}{2}; 0; \frac{1}{2}\right),\ F_{\min} = -\frac{13}{2}.$$

Оптимальний план двоїстої задачі:

$$Y^* = \left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right),\ Z_{\max} = -\frac{13}{2}.$$

Для розрахунку оптимального плану двоїстої задачі треба було значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$ домножити на (–1), так як дані спряжені задачі є симетричними.

Зауважимо, що в більшості випадків двоїстий симплексний метод за кількістю ітерацій не кращий від звичайного. Однак в окремих задачах він дає можливість спростити розрахунки.

У наведеному вище прикладі для пошуку оптимального плану звичайним симплексним методом потрібно було б вводити штучну змінну. Завдяки двоїстому симплекс-методу розв'язування більш просте, зменшена кількість ітерацій.

Крім того, двоїстий симплексний метод буває корисним при розв'язуванні задач, що випливають з уже розв'язаних, додаванням кількох нових обмежень, які уточнюють задачу або ж пристосовують її до змінених реальних умов.

Параметричні зміни вектора коефіцієнтів цільової функції. Розглянемо випадок лінійної залежності коефіцієнтів цільової функції від параметра, можливі значення якого задані неперервним числовим інтервалом, тобто в задачі лінійного програмування

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{3.80}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3.81)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}) \quad (3.82)$$

покладемо

$$c'_j = c_j + tp_j, \ t \in [a;b]. \quad (3.83)$$

Усі ж інші коефіцієнти і вільні члени залишаються сталими величинами.

Запишемо параметричну задачу такого вигляду в загальній формі:

$$\max \ F = (c_1 + tp_1)x_1 + (c_2 + tp_2)x_2 + \ldots + (c_n + tp_n)x_n \quad (3.84)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3.85)$$

$$t \in [a;b]$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}) \quad (3.86)$$

За деякого фіксованого значення $t = t_0$ задача (3.84)—(3.86) перетворюється на звичайну задачу лінійного програмування. Зміни коефіцієнтів цільової функції в процесі реалізації симплексного методу впливатимуть на значення оцінкового ряду ($\Delta_j = F_j - c_j$).

Для оптимального плану задачі лінійного програмування в постановці (3.36)—(3.38), як відомо з пп. 2.7.4, оцінки векторів розраховують, як

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X) - c_j = CX - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, \ j = 1,2,\ldots,n$$

Якщо цільова функція має вигляд (3.84), оцінки векторів розраховуватимуться за формулою

$$\Delta'_j = F'_j - c'_j = (c_j + t_0 p_j)X - (c_j + t_0 p_j) = \Delta_j + t_0 p_j, (j = \overline{1,n})$$

Позначимо перетворені методом повних виключені Жордана—Гауса в процесі перерахунку початкової симплексної таблиці. $\Delta'_j, (j = \overline{1,n})$ через $\hat{\Delta}_j, (j = \overline{1,n})$, аналогічно $p_j, (j = \overline{1,n})$ як $\hat{p}_j, (j = \overline{1,n})$. Остання симплексна таблиця (табл. 3.6) набуває вигляду

Таблиця 3.6

i	Базис	$C_б$	План	$c_1+t_0p_1$	...	$c_m+t_0p_m$	...	$c_n+t_0p_n$
				x_1	...	x_m	...	x_n
1	x_1	$c_1+t_0p_1$	x_1^*	a_{11}	...	a_{1m}	...	$a_{1,n}$
2	x_2	$c_2+t_0p_2$	x_2^*	a_{21}	...	a_{2m}	...	a_{2n}
m	x_m	$c_m+t_0p_m$	x_m^*	a_{m1}	...	a_{mm}	...	a_{mn}
$m+1$	$\hat{\Delta}_j$		$\hat{\Delta}$	$\hat{\Delta}_1$		$\hat{\Delta}_m$		$\hat{\Delta}_n$
$m+2$	$\hat{p}_i$		$\hat{P}$	$\hat{p}_1$	...	$\hat{p}_m$	...	$\hat{p}_n$
$m+3$	$F_j - c_j \geq 0$		X'^*	$\Delta_1 + t_0\hat{p}_1$	...	$\Delta_m + t_0\hat{p}_m$	...	$\Delta_n + t_0\hat{p}_n$

Таблиця (аналогічно випадку параметричної зміні вектора обмежень — табл. 3.5) містить два додаткові рядки, що дає змогу стежити за перетвореннями величин $\hat{\Delta}_j, \hat{p}_j, (j=\overline{1,n})$ при ітераціях.

Очевидно, що задача параметричної зміни вектора обмежень є двоїстою до параметричної зміни вектора коефіцієнтів цільової функції, тому можна скористатись *алгоритмом розв'язування параметричної задачі*, що наведено в попередньому параграфі.

1. Зафіксувати деяке $t=t_0\in[a;b]$ і розв'язати задачу (3.84)—(3.86) як звичайну задачу лінійного програмування симплексним методом.

2. Оптимальний план з останньої симплексної табл. 3.6 є сумою двох доданків, значення яких знаходяться в рядках $\hat{\Delta}$ і $\hat{P}$, причому має виконуватися умова невід'ємності всіх компонент вектора, що є оцінками параметрів останньої симплексної таблиці, отже

$$\hat{\Delta}_j + t_0\hat{p}_j \ge 0, (j=\overline{1,n})$$

3. Встановлюємо границі значень параметра *t*, для яких вектор X'^* буде залишатися оптимальним планом. Для цього з останньої симплексної таблиці складаємо систему нерівностей:

$$\hat{\Delta}_j + t\hat{p}_j \ge 0, (j=\overline{1,n}) \tag{3.87}$$

а) якщо існують такі значення *j*, для яких $\hat{p}_j > 0$, тоді розв'язок відповідних нерівностей буде

$$t=t_0 \ge \frac{-\hat{\Delta}_j}{\hat{p}_j} \Rightarrow a_0 = \max_{\hat{p}_j>0}\left\{-\frac{\hat{\Delta}_j}{\hat{p}_j}\right\} \tag{3.88}$$

і дає нижню границю шуканого інтервалу, яка може дорівнювати *a* або бути меншою за неї $a_0 < a$.

Якщо немає $\hat{p}_i > 0$, тобто всі $\hat{p}_i \le 0$, то значення *t*, для яких знайдений X'^* буде оптимальним, знизу необмежені, тобто $a_0 \to -\infty$;

б) якщо існують такі значення *i*, для яких $\hat{p}_i < 0$, то розв'язки відповідних нерівностей будуть

$$t=t_0 \ge \frac{-\hat{\Delta}_j}{\hat{p}_j} \Rightarrow b_0 = \min_{\hat{p}_j<0}\left\{-\frac{\hat{\Delta}_j}{\hat{p}_j}\right\} \tag{3.89}$$

дає верхню границю шуканого інтервалу, яка може дорівнювати або бути більшою за *a* ($b_0 > a$). Якщо немає $\hat{p}_i < 0$, тобто всі $\hat{p}_i \ge 0$, то сукупність значень *t*, для яких знайдений план X'^*, буде оптимальним, зверху необмежена ($b_0 \to +\infty$) і в цьому останньому випадку задача розв'язана повністю, оскільки

$$a < b < b_0 \to +\infty$$

4. Система (3.74) визначає вектор, який необхідно вивести з базису. Припустимо, що при деякому $t=b_0+\Delta t$, де $\Delta t>0$ мінімальне значення в (3.89), яке визначає верхню границю інтервалу $[a_0;b_0]$, досягається для $i=k$, отже, порушується *k*-та нерівність з (3.87) і з базису необхідно виводити вектор, що відповідає змінній x_k. Тому при $t=b_0$ необхідно провести заміну базису для чого виконують один крок двоїстого симплекс-методу (розглянутого в п. 3.6) і визначити нове значення X''^*.

5. Розглядаємо знову систему нерівностей (3.87) для $t>b_0=a_1$ за формулою (3.77), визначаємо верхню границю b_1 тих значень *t*, для яких знайдений план X''^* буде оптимальним.

6. Процедуру повторюємо доти, поки не матимемо значення верхньої границі чергового інтервалу, що дорівнює або перевищує верхню границю заданого інтервалу $[a;b]$, можливих значень *t*, тобто

$$b_s = a_{s+1} \geq b \qquad (3.90)$$

Співвідношення (3.79) і є ознакою того, що задачу розв’язано.

Таким чином, заданий проміжок $[a;b]$ розбивають на ряд інтервалів $[a;b_0],[b_1;b_2],...,[b_{s-1};b]$, для кожного з яких максимум цільової функції досягається при одному оптимальному плані.

Приклад 3.7. Розв’язати параметричну задачу

$$\max F = (-3+2t)x_1 + (2-t)x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$1 \leq t \leq 10.$$

Покладемо $t = 1$ і розв’яжемо задачу симплексним методом використовуючи таблицю з двома додатковими рядками.

Базис	$C_{баз}$	План	–1	1	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	0	10	3	2	1	0	0	0
x_4	0	–2	–1	–1	0	1	0	0
← x_5	0	3	–2	1	–1	0	1	0
x_6	0	5	3	–2	0	0	0	1
$F_j - c_j \geq 0$		0	1	–1	0	0	0	0
Δ_j		0	3	–2	0	0	0	0
p_j		0	–2	1	0	0	0	0
← x_3	0	4	7	0	1	0	–2	0
x_4	0	1	–3	0	0	1	1	0
x_2	1	3	–2	1	0	0	1	0
x_6	0	11	–1	0	0	0	2	1
$F_j - c_j \geq 0$		3	–1	0	0	0	1	0
Δ_j		6	–1	0	0	0	2	0
p_j		–3	0	0	0	0	–1	0
x_1	–1	4/7	1	0	1/7	0	–2/7	0
x_4	0	19/7	0	0	3/7	1	1/7	0
x_2	1	29/7	0	1	2/7	0	3/7	0
x_6	0	81/7	0	0	1/7	0	12/7	1
$F_j - c_j \geq 0$		25/7	0	0	1/7	0	5/7	0
Δ_j		46/7	0	0	–1/7	0	12/7	0
p_j		–3	0	0	0	0	–1	0

Остання симплексна таблиця дає перший оптимальний план задачі $X^* = \left(x_1^* = \frac{4}{7}; x_2^* = \frac{29}{7}\right), Z_{t=1}^* = \frac{25}{7}$.

Верхня границя першого проміжку згідно з (3.89) дорівнює $b_0 = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$. Отже, на інтервалі $\left[1;\frac{12}{7}\right]$ план $X^*\left(\frac{4}{7};\frac{29}{7}\right)$ буде оптимальним, причому оптимальне значення цільової функції буде такою лінійною функцією параметра:

$$Z(X^*) = \max Z\left(1;\frac{12}{7}\right) = \frac{1}{7}(46-21t)$$

і при $t = \frac{12}{7}$ $\max Z_{t=\frac{12}{7}} = \frac{10}{7}$.

Оскільки при $t = \frac{12}{7} = b_0$ елемент m + 2 рядка і другої колонки буде нульовим, беремо другу колонку за ведучу і, відкинувши $m+2$ рядок, робимо одну ітерацію. У m + 3 рядку цієї таблиці немає від'ємних елементів, а тому, за формулою (3.89), знайдений план $X'^*\left(x_1' = \frac{5}{2}; x_2' = \frac{5}{4}\right)$ буде оптимальним для всіх значень t, що лежать у проміжку $\left[\frac{12}{7};+\infty\right]$, а оптимальне значення цільової функції є такою лінійною функцією параметра t:

$Z(X'^*) = \max Z\left[\frac{12}{7};+\infty\right] = -5 + \frac{15}{4}t$. При $t = 10$ $Z(X'^*) = 32{,}5$. Отже, задача розв'язана повністю.

3.5.7. Параметричне програмування. У п. 3.5 було розглянуто, яким чином змінюється оптимальний план задачі лінійного програмування, якщо змінюються коефіцієнти цільової функції чи компоненти вектора обмежень. Однак дослідження стосувалися лише визначення діапазону змін, у межах якого структура оптимального плану залишалась постійною, до того ж кожного разу розглядали вплив зміни лише однієї складової.

Однак на практиці трапляються випадки, коли коефіцієнти цільової функції чи компоненти вектора обмежень залежать від якоїсь однієї величини, наприклад, часу, і потрібно знайти розв'язок задачі при довільній зміни цієї величини, яку називають *параметром задачі*.

Параметричне програмування — це метод визначення залежності змін розв'язку задачі від зміни вектора коефіцієнтів цільової функції чи вектора обмежень.

Параметричні зміни вектора обмежень. Розглянемо задачу лінійного програмування у випадку лінійної залежності компонентів вектора обмежень від параметру t. Нехай

$$b_i' = b_i + tp_i, \tag{3.65}$$

$(i = \overline{1,n})$, $t \in [a;b]$. Тоді задачу лінійного програмування сформулюємо у вигляді

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{3.66}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 + tp_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 + tp_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m + tp_m. \end{cases} \tag{3.67}$$

$$t \in [a;b]$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}) \tag{3.68}$$

Очевидно, що при кожному фіксованому значенні $t = t_0 \in [a;b]$ задача (3.66) — (3.68) є звичайною задачею лінійного програмування і може бути розв'язана за допомогою симплексного методу.

У випадку визначення розв'язку задачі для придатного для довільного можливого значення величини $t \in [a;b]$, потрібні розв'язки іноді вдається знаходити за допомогою дещо видозміненого алгоритму симплексного методу.

Нехай $t = t_0$, тоді з першої теореми двоїстості відомо, що оптимальний план прямої задачі (як і кожен поточний опорний план) можна представити у вигляді

$$X^* = D^{-1}B, \tag{3.69}$$

де D — матриця, що складена з компонент векторів останнього базису; $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ — оптимальний план задачі (3.66)—(3.68); B — вектор, що складається з вільних членів системи обмежень в останній симплексній таблиці.

Таким чином, якщо змінюються компоненти вектора B, змінюються також значення $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. У векторній формі (3.65) має вигляд

$$B' = B + t_0 P, \tag{3.70}$$

де B — вектор із компонентами b_i, а вектор P складається з компонент p_i виразу (3.65). Використовуючи (3.69), маємо

$$X'^* = D^{-1}B' = D^{-1}B + t_0 D^{-1}P. \tag{3.71}$$

Результат добутку $D^{-1}B$ дасть вектор, який позначимо $\hat{B}$, а результат добутку $D^{-1}P - \hat{P}$, тоді

$$X'^* = \hat{B} + t_0 \hat{P}. \tag{3.72}$$

Припустимо, що задачу (3.66)—(3.68) розв'язано й остання симплексна таблиця (табл. 3.5) матиме вигляд

Таблиця 3.5

i	Базис	$С_б$	$\hat{B}$	$\hat{P}$	План	c_1	...	c_{m+1}	...	c_n
						x_1	...	x_{m+1}	...	x_n
1	x_1	c_1	$\hat{b}_1$	$\hat{p}_1$	$+t_0\hat{p}_1$	a_{11}	...	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2	$\hat{b}_2$	$\hat{p}_2$	$x_2^* + t_0\hat{p}_2$	a_{21}	...	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
m	x_m	c_m	$\hat{b}_m$	$\hat{p}_m$	$x_m^* + t_0\hat{p}_m$	a_{m1}	...	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$\hat{B}^*$	$\hat{P}^*$	X'^*	Δ_1	...	Δ_{m+1}	...	Δ_n

Таблиця містить два додаткові стовпчики, що дає змогу стежити за перетвореннями величин $\hat{b}_i, \hat{p}_i, (i = \overline{1,m})$ при ітераціях.

Оскільки табл. 3.5 містить оптимальний план задачі (3.66)—(3.68), X'^* має виконуватися умова невід'ємності всіх компонент вектора (3.72), отже,

$$\hat{b}_i + t_0 \hat{p}_i \geq 0, (i = \overline{1,m}). \tag{3.73}$$

Припустимо, що у формулі (3.73) параметр t_0 не фіксований, а може набувати довільних значень у заданому проміжку $[a; b]$. Якщо для всіх цих значень параметра нерівності (3.73) задовольняються, тобто

$$\hat{b}_i + t\hat{p}_i \geq 0, (i = \overline{1,m}), \quad (a \leq t \leq b), \tag{3.74}$$

то це означає, що знайдений план X'^* — оптимальний для всіх $t \in [a; b]$ і є розв'язком параметричної задачі (3.66)—(3.68). Проте в загальному випадку за певних значень $t \in [a; b]$ нерівності (3.73) не задовольняються і план X'^* уже не буде оптимальним. Тому необхідно виявити множину всіх значень $t = t_0 \in [a_0; b_0]$, для яких знайдений план оптимальний, і, виключивши її з подальшого розгляду, знаходити оптимальний план для другої множини точок з інтервалу $[a;b]$ і т. д.

Отже, розв'язуванні параметричної задачі полягає в процесі послідовного розбиття заданого проміжку $[a;b]$ зміни параметру *t* на ряд підпроміжків, таких, щоб для всіх значень $t_0 \in [a_0; b_0]$ того самого підпроміжку оптимум цільової функції досягався в одній точці (вершині) многогранника планів задачі, так, щоб кожному підпроміжку зміни параметру відповідав свій оптимальний план.

Отже, розв'язування параметричної задачі (3.66)—(3.68) починаємо з деякого значення $t = t_0$ і записуємо задачу (3.66)—(3.68) у вигляді початкової симплексної таблиці, що має вигляд аналогічний табл. 3.5.

Знаходимо симплексним методом оптимальний план задачі (якщо він існує) за даного значення параметра (див. табл. 3.5). Зазначимо, що компонент оптимального плану подано у вигляді двох доданків, що розташовані у двох додаткових стовпчиках $\hat{B}$ і $\hat{P}$. Загальні значення оптимального плану дістають як суму стовпців $\hat{B}$ і стовпця $\hat{P}$ помноженого на $t = t_0$. Таким чином, величина $X'^* = \hat{B}^* + t_0\hat{P}^*$ є лінійною функцією параметра *t*.

Встановимо границі значень параметра *t*, для яких вектор X'^* буде оптимальним планом. Для цього з остаточної табл. 3.5, де $t = t_0$, складаємо і розв'язуємо систему нерівностей (3.74). У разі існування оптимального плану задачі при $t = t_0$ система нерівностей (3.74), очевидно, сумісна, оскільки існує хоча б один її розв'язок. Зрозуміло також, що обов'язково деякі з $p_i \neq 0$, бо інакше параметричної задачі не було б.

Слід розрізняти два випадки у розв'язку нерівностей (3.74):

а) якщо існують такі значення *i*, для яких $\hat{p}_i > 0$, тоді розв'язок відповідних нерівностей буде

$$t = t_0 \geq \frac{-\hat{b}_i}{\hat{p}_i} \Rightarrow a_0 = \max_{\hat{p}_i > 0}\left\{-\frac{\hat{b}_i}{\hat{p}_i}\right\} \tag{3.75}$$

і дає нижню границю шуканого інтервалу, яка може дорівнювати *a* або бути меншою за неї $a_0 < a$.

Якщо немає $\hat{p}_i > 0$, тобто всі $\hat{p}_i \leq 0$, то значення *t*, для яких знайдений X'^*, буде оптимальним, знизу необмежені, тобто $a_0 \to -\infty$;

б) якщо існують такі значення *i*, для яких $\hat{p}_i < 0$, то розв'язки відповідних нерівностей будуть

$$t = t_0 \leq \frac{-\hat{b}_i}{\hat{p}_i} \Rightarrow b_0 = \min_{\hat{p}_i < 0}\left\{-\frac{\hat{b}_i}{\hat{p}_i}\right\} \tag{3.76}$$

дає верхню границю шуканого інтервалу, яка може дорівнювати або бути більшою за *a* ($b_0 > a$).

Якщо немає $\hat{p}_i < 0$, тобто всі $\hat{p}_i \geq 0$, то сукупність значень *t*, для яких знайдений план X'^*, буде оптимальним, зверху необмежена ($b_0 \to +\infty$) і в цьому останньому випадку задача розв'язана повністю, оскільки

$$a < b < b_0 \to +\infty .$$

Таким чином, для верхньої границі шуканого інтервалу дістаємо формулу

$$b_0 = \begin{cases} \min\limits_{\hat{p}_i < 0}\left\{-\dfrac{\hat{b}_i}{\hat{p}_i}\right\}, & \textit{якщо існують } \hat{p}_i < 0, \\ +\infty, & \textit{якщо всі } \hat{p}_i \geq 0 \end{cases} \tag{3.77}$$

Аналогічна формула для нижньої границі має вигляд

$$a_0 = \begin{cases} \max\limits_{\hat{p}_i > 0}\left\{-\dfrac{\hat{b}_i}{\hat{p}_i}\right\}, & \textit{якщо існують } \hat{p}_i > 0, \\ -\infty, & \textit{якщо всі } \hat{p}_i \leq 0 \end{cases} \tag{3.78}$$

За найменшого зрушення значення t за межі визначеного інтервалу $[a_0;b_0]$ значення нового оптимального плану X'^* будуть від'ємними (порушуватиметься виконання нерівностей (3.74)), тобто (3.74) визначає вектор, який необхідно вивести з базису.

Припустимо, що за деякого $t = b_0 + \Delta t$, де $\Delta t > 0$ мінімальне значення в (3.77), яке визначає верхню границю інтервалу $[a_0;b_0]$ досягається для $i = k$, отже, порушується k-та нерівність з (3.74) і з базису необхідно виводити вектор, що відповідає змінній x_k. Тому при $t = b_0$ треба провести заміну базису, для чого виконують один крок двоїстого симплекс-методу (розглянутого в п. 3.6.) і визначити нове значення X''^*.

Далі розглядаємо знову систему нерівностей (3.74) для $t > b_0 = a_1$ за формулою (3.77), визначаємо верхню границю b_1 тих значень t, для яких знайдений план X''^* буде оптимальним. Таку процедуру повторюємо доти, доки не матимемо значення верхньої границі чергового інтервалу, що дорівнює або перевищує верхню границю заданого інтервалу $[a;b]$, можливих значень t, тобто

$$b_s = a_{s+1} \geq b\,. \tag{3.79}$$

Співвідношення (3.79) і є ознакою того, що задачу розв'язано.

Таким чином, заданий проміжок $[a;b]$ розбивають на ряд інтервалів $[a;b_0],[b_1;b_2],...,[b_{s-1};b]$, для кожного з яких максимум цільової функції досягається при одному оптимальному плані.

3.6. Аналіз розв'язків спряжених оптимізаційних задач

Теорія двоїстості є потужним математичним апаратом обґрунтування структури виробництва в передплановому періоді. Вона дає змогу насамперед визначити статус ресурсів та інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасів дефіцитних ресурсів. В умовах ринкової економіки ціни на ресурси можуть змінюватися в доволі широких межах. Крім того, постачальники не з своєї волі можуть не виконати попередніх домовленостей. Тому аналіз ринку ресурсів у передплановому періоді має чимале значення. Важливою є проблема заміни даного дефіцитного ресурсу іншим, більш дорогим.

Використання двоїстих оцінок дає можливість визначити рентабельність кожного виду продукції, яка виробляється підприємством. При цьому можна оцінити інтервали можливої зміни цін одиниці кожного виду продукції, що дуже важливо в умовах ринку.

Отже, аналіз лінійної економіко-математичної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і змогу дослідити вплив можливих змін на результати господарської діяльності.

Розроблена економіко-математична модель може бути використана для машинної імітації процесу виробництва. Це дає можливість перевірити:

1) за яких умов оптимальний план є стійким;
2) чи є вигідним додаткове залучення ресурсів;
3) як зміниться ефективність виробництва в разі загострення конкуренції на ринку збуту (оцінити виправданість у цій ситуації зниження цін на продукцію);
4) доцільність виробництва нової продукції;
5) як вплине на ефективність діяльності підприємства порушення споживачами продукції попередніх угод — відмова від частини або всієї продукції. Як має виробник у цій ситуації змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Зауважимо, що дослідження планів на стійкість, здобутих за економіко-математичними моделями, а також оцінювання ситуацій мають виконуватися в передплановому періоді.

Економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач і проведення післяоптимізаційного аналізу розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$. Норма витрат кожного ресурсу на одиницю продукції становить $a_{ij}\left(j=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m}\right)$. Ціна реалізації одиниці продукції j-го виду дорівнює $c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j\,; \tag{3.80}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right); \tag{3.81}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{3.82}$$

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $x^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*\right)$, який дає найбільшу виручку від реалізації.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$\min F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i\,; \tag{3.83}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{3.84}$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, m}\right). \tag{3.85}$$

Економічних зміст двоїстої задачі — визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, що використовуються для виробництва продукції, при яких загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i-го ресурсу. Академік Л. В. Канторович назвав їх *об'єктивно обумовленими оцінками відповідного ресурсу*.

Згідно з теоретичним положенням попереднього параграфу розглянемо використання двоїстих оцінок на прикладі аналізу економіко-математичних моделей виду (3.80)—(3.82) і (3.83)—(3.85).

Приклад 3.8. Деяке підприємство виробляє чотири види продукції *A*, *B*, *C* і *D*, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю кожної продукції (в умовних одиницях) наведено в таблиці.

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, ум. од., за видами продукції				Запас ресурсу
	A	B	C	*D*	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80

Відома ціна реалізації одиниці продукції кожного виду: для продукції *A* — 2 ум. од., для *B* і *D* — по 4 од., для *C* — 3 од.

Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству найбільшу виручку від реалізації продукції.

Розв'язування. Математичні моделі прямої та двоїстої задачі мають такий вигляд:

$$\begin{gathered} \max Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4; \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 250, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 280, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 80, \end{cases} \\ x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,4}; \end{gathered} \tag{3.86}$$

де x_j — обсяг виробництва продукції j-го виду $\left(j = \overline{1, 4}\right)$;

$$\begin{gathered} \min F = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3; \\ \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 4, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3, \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4, \end{cases} \\ y_i \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}, \end{gathered} \tag{3.87}$$

де y_i — оцінка одиниці i-го виду ресурсу $\left(i = \overline{1, 3}\right)$.

Симплексна таблиця, що відповідає оптимальному плану поставленої задачі, матиме вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	45	–2	1/2	0	1	1/2	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	3/2	1	0	–1/2	0	2
$Z_j - C_j = 0$		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Аналіз розв'язків економіко-математичних моделей спряжених задач. З наведеної симплекс-таблиці маємо оптимальний план прямої та двоїстої задач. Оптимальний план прямої задачі позначимо X^*, а оптимальний план двоїстої — Y^*.

$$X^* = (0;\ 0;\ 35;\ 45;\ 0;\ 30;\ 0),\ \max Z = 285;$$

$$Y^* = (4;\ 0;\ 3) \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2;\ 0;\ 2);$$

$$\min F = 250/2 + 160 = 285 = \max Z.$$

Основні змінні прямої задачі	Додаткові змінні прямої задачі
$x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 35$; $x_4 = 45$	$x_5 = 0$; $x_6 = 30$; $x_7 = 0$

Основні змінні оптимального плану *прямої задачі* визначають обсяги виробництва всіх видів продукції. Випуск продукції A і B не передбачається ($x_1 = x_2 = 0$), а C і D у кількості 35 і 45 од. відповідно

Додаткові змінні оптимального плану *прямої задачі* x_5, x_6, x_7 характеризуються залишок (невикористану частину) ресурсів 1, 2 і 3 відповідно. Оскільки $x_6 = 30$, другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а перший і третій ресурси — повністю ($x_5 = x_7 = 0$).

За такого оптимального плану виробництва продукції та використання ресурсів підприємство отримує найбільшу виручку у розмірі 285 ум. од.

З розділу III відомо, що між змінними прямої та двоїстої задач існує відповідність:

Основні змінні прямої задачі				Додаткові змінні прямої задачі		
$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 35$	$x_4 = 45$	$x_5 = 0$	$x_6 = 30$	$x_7 = 0$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$y_4 = 5$	$y_5 = 5/2$	$y_6 = 0$	$y_7 = 0$	$y_1 = 1/2$	$y_2 = 0$	$y_3 = 2$
Додаткові змінні двоїстої задачі				Основні змінні двоїстої задачі		

Оптимальний план двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві.

Основні змінні двоїстої задачі за наведеною схемою відповідають додатковим змінним прямої, що характеризують міру використання ресурсу при виробництві за оптимальним планом. Отже, змінні y_1, y_2 і y_3 також дають певну характеристику відповідних видів ресурсів. Так, $y_1 = 1/2$ і $y_3 = 2$ відмінні від нуля, а ресурси 1 і 2 (за значеннями додаткових змінних прямої задачі) використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі.

Крім того, за третьою теоремою двоїстості відомо: якщо деяка основна змінна оптимального плану двоїстої задачі $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів відповідного i-го ресурсу приводить до відповідної зміни значення цільової функції на величину y_i. Якщо $y_i = 0$, то значення цільової функції залишається незмінним.

Отже $y_1 = 1/2$, якщо запас першого ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то цільова функція max Z збільшиться за інших однакових умов на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме max $Z = 285 + 1/2 = 285{,}5$ ум. од. Аналогічно збільшення на 1 ум. од. третього ресурсу ($b_3 = 80 + 1 = 81$) приведе до збільшення за інших однакових умов цільової функції на $y_3 = 2$ ум. од., що становитиме max $Z = 285 + 2 = 287$ ум. од. Лише незначні зміни обсягу другого ресурсу ніяк не впливатимуть на значення цільової функції, оскільки $y_2 = 0$.

Додаткові змінні оптимального плану *двоїстої задачі* відповідають основним змінним прямої задачі і, оскільки останні визначають виробництво кожного виду продукції, відповідні їм y_4, y_5, y_6 і y_7 також певним чином мають характеризувати виробництво відповідних видів продукції. За правилами побудови двоїстої задачі очевидно, що додаткові змінні оптимального плану двоїстої задачі показують, наскільки вартість ресурсів у виробництві перевищує ціну одиниці відповідної продукції.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оцінковому рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках «x_1» — «x_4». Їх оптимальні значення $y_4 = 5$; $y_5 = 5/2$; $y_6 = 0$; $y_7 = 0$. Тому витрати на виробництво продукції A і B перевищують їх ціну відповідно на 5 і 5/2 ум. од., а для продукції C і D такого перевищення немає. Це підтверджується також попереднім аналізом основних змінних оптимального плану прямої задачі, оскільки за оптимальним планом доцільно виготовляти саме продукцію C і D.

Розрахована оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: min $F = 285$ ум. од.

3.6.1. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний виду продукції.

Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю усіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції c_j, виготовляти продукцію не вигідно, вона *нерентабельна* і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j > 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона *рентабельна* і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Підставимо значення оптимального плану Y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2\cdot 1/2 + 1\cdot 0 + 3\cdot 2 = 7 > 2 \quad \text{(продукція } A \text{ нерентабельна);} \\ 5\cdot 1/2 + 6\cdot 0 + 2\cdot 2 = 13/2 > 4 \quad \text{(продукція } B \text{ нерентабельна);} \\ 2\cdot 1/2 + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 = 3 = 3 \quad \text{(продукція } C \text{ рентабельна);} \\ 4\cdot 1/2 + 4\cdot 0 + 1\cdot 2 = 4 = 4 \quad \text{(продукція } D \text{ рентабельна).} \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши додаткові змінні оптимального плану двоїстої задачі. Як з'ясовано вище, значення додаткових змінних показують, наскільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція — нерентабельна.

Оптимальні значення $y_4 = 5 \neq 0$; $y_5 = 5/2 \neq 0$, тому продукція A і B нерентабельна, а $y_6 = 0$; $y_7 = 0$, тобто продукція C і D — рентабельна.

Дослідимо питання про доцільність введення нового ($n+1$)-го виду продукції. Відомі витрати кожного ресурсу на виготовлення одиниці продукції – $a_{i,n+1}$, $\left(i = \overline{1,m}\right)$ і ціна реалізації — c_{n+1}. За умови введення нового виду продукції у виробництво в економіко-математичну модель початкової задачі необхідно ввести нову змінну, отже:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m,n+1}x_{n+1} \le b_m. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1; n+1}$$

Таким чином, відповідна математична модель двоїстої задачі міститиме не n, а $(n+1)$ нерівність і відрізнятиметься від початкової наявністю обмеження, що описує витрати на виробництво нового виду продукції:

$$a_{1,n+1}y_1 + a_{2,n+1}y_2 + ... + a_{m,n+1}y_m \geq c_{n+1} . \tag{3.88}$$

Оскільки значення $a_{i,n+1}$, $\left(i=\overline{1,m}\right)$ і c_{n+1} за умовою відомі, розраховані також значення $y_i, i=\overline{1,m}$, можна перевірити виконання нерівності (3.88). Як зазначено вище, рентабельною є продукція, для якої відповідне обмеження виконується як рівняння, а нерентабельною, якщо ліва частина нерівності (витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції) перевищує праву (ціна реалізації одиниці продукції).

Припустимо, що для умов прикладу (3.8) запропоновано включити у виробництво один із двох видів нової продукції *Б* чи *Г*. Відомі витрати кожного ресурсу на виготовлення одиниці продукції, що складають для продукції виду *Б* — 4, 7, 2 ум. од. і для продукції виду *Г* — 4, 8, 1 ум. од. Ціна реалізації одиниці продукції *Б* – 4,5 ум. од., *Г* – 4,5 ум. од.

Складемо відповідне обмеження двоїстої задачі. Наступний вид продукції буде позначатися X_5, тому маємо

$$a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 \geq c_5$$
$$Y^* = (y_1 = 1/2; y_2 = 0; y_3 = 2).$$

Перевіримо виконання обмеження спочатку для продукції *Б*:

$$4 \cdot 1/2 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \geq 4{,}5$$
$$6 > 4{,}5$$

Обмеження виконується як строга нерівність, отже, для умов даного виробництва включення продукції *Б* є недоцільним.

Зауважимо, що остання нерівність визначає мінімальне значення ціни реалізації одиниці продукції, за якої її випуск є рентабельним. Отже, мінімальна вартість за умов даного виробництва на одиницю продукції *Б* має становити не менше як 6 ум. од.

Визначимо співвідношення між витратами на виробництво та ціною для продукції *Г*:

$$4 \cdot 1/2 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 2 < 4{,}5$$
$$4 < 4{,}5$$

З останньої нерівності маємо, що витрати на виробництво одиниці продукції *Г* менші від ціни реалізації. Така продукція є рентабельною за умов даного виробництва та її доцільно включити до плану випуску.

Для визначення оптимального плану виробництва з введеним додатково видом продукції обов'язково необхідно розв'язати нову задачу лінійного програмування. Двоїсті оцінки лише вказують на доцільність (недоцільність) розв'язування такої задачі.

3.6.2 Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів. За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на *дефіцитні* і *недефіцитні* залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо деяке значення двоїстої оцінки y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є *недефіцитним*. Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то i-й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається *дефіцитним*. Відомо (третя теорема двоїстості), що величина двоїстої оцінки показує, наскільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший — підстановкою X^* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс — дефіцитний, в іншому разі — недефіцитний.

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 & (\text{ресурс 1 дефіцитний}); \\ 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 < 280 & (\text{ресурс 2 недефіцитний}); \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 35 + 1 \cdot 45 = 80 & (\text{ресурс 3 дефіцитний}). \end{cases}$$

Другий спосіб — за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс — дефіцитний, а якщо відмінна від нуля — ресурс недефіцитний.

Третій спосіб — за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i-го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $y_i = 0$, то i-й ресурс недефіцитний. Так у нашому випадку

$y_1 = 1/2 > 0$ (ресурс 1 дефіцитний);
$y_2 = 0$ (ресурс 2 недефіцитний);
$y_3 = 2 > 0$ (ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то цільова функція max Z збільшиться за інших однакових умов на $y_1 =$ $= 1/2$ ум. од. і становитиме max $Z = 285{,}5$ ум. од.

Цікавим є питання, за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Як відомо з п. 3.5.1 інформацію про це дають елементи стовпчика «x_5» останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці даного ресурсу $y_1 = 1/2$.

Якщо в початковій задачі значення першого ресурсу зросте на одиницю, то (за табл. 3.3) отримаємо:

Базис	$C_б$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	**250+1**	2	5	2	4	**1**	0	0
x_6	0	**280+0**	1	6	2	4	**0**	1	0
x_7	0	**80+0**	3	2	1	1	**0**	0	1
$F_j - c_j \geq 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	**62,5+** $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	**30 – 1**	–1	1	0	0	**–1**	1	0
x_7	0	**17,5–** $\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$F_j - c_j \geq 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	**45+** $\frac{1}{2}$	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	**30–1**	–1	1	0	0	**–1**	1	0
x_3	3	**35–** $\frac{1}{2}$	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$F_j - c_j \geq 0$		**285+** $\frac{1}{2}$	5	5/2	0	0	1/2	0	2

У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_4^* збільшиться на 1/2, змінної x_6^* — зменшиться на одиницю, а x_3^* — 1/2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення будуть такими:

$$X^* = (0;\ 0;\ 34{,}5;\ 45{,}5;\ 0;\ 29;\ 0).$$

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов приводить до зростання випуску продукції D і падіння виробництва продукції C, а обсяг використання другого ресурсу збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде max $Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 34{,}5 + 4 \cdot 45{,}5 = 285{,}5$, тобто зросте на $y_1 = 1/2$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 2 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю ($b_3 = 80 + 1 = 81$). Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $y_3 = 2$, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0; 0; 37; 44; 0; 30; 0).$$
$$\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 44 = 287.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції *C* на 2 од. і зменшення випуску продукції *D* на 1 од. При цьому обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: оскільки збільшення третього ресурсу на одиницю приводить до найбільш значного підвищення значення функціоналу, чи можна збільшити третій дефіцитний ресурс на 50, 100 і т.д. ум. од., тим самим значно збільшуючи виручку підприємства.

З п. 3.5.1 відомо, щоб однозначно відповісти на поставлене запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої *зміни обсягів дефіцитних ресурсів*, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень, тобто розв'язати систему нерівностей (3.43).

Якщо приріст (зміну) запасу першого ресурсу позначимо Δb_1, тоді

Базис	$C_б$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5 x_6 x_7	0 0 0	**250+1 Δb_1** **280+0 Δb_1** **80+0 Δb_1**	2 1 3	5 6 2	2 2 1	4 4 1	**1** **0** **0**	0 1 0	0 0 1
$Z_j - C_j \geq 0$		0	-2	-4	-3	-4	0	0	0
x_4	4	**62,5+$\frac{1}{4}\Delta b_1$**	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	0	0
x_6	0	**30 – 1 Δb_1**	–1	1	0	0	**–1**	1	0
x_7	0	**17,5–$\frac{1}{4}\Delta b_1$**	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\mathbf{\frac{1}{4}}$	0	1
$Z_j - C_j \geq 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	**45+$\frac{1}{2}\Delta b_1$**	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	–1
x_6	0	**30–1 Δb_1**	–1	1	0	0	**–1**	1	0
x_3	3	**35–$\frac{1}{2}\Delta b_1$**	5	3/2	1	0	$-\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	2
$Z_j - C_j \geq 0$		**285+$\frac{1}{2}\Delta b_1$**	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Тоді новий оптимальний план

$$X^* = (0; 0; 35–1/2\Delta b_1; 45 + 1/2\Delta b_1; 0; 30 - \Delta b_1; 0).$$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, — це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 35 - 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 45 + 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 30 - \Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \leq 70; \\ \Delta b_1 \geq 90; \\ \Delta b_1 \leq 30; \end{cases}$$
$$-90 \leq \Delta b_1 \leq 30 .$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум. од. або зменшиться на 90 ум. од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу 1 залишиться $y_1 = 1/2$. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах

$$250 - 90 \le b_1 + \Delta b_1 \le 250 + 30,$$

$$160 \le b_1 \le 280.$$

Згідно з цим максимально можливий дохід підприємства перебуватиме в межах

$$285 - 90 \cdot 1/2 \le Z_{\max} \le 285 + 30 \cdot 1/2,$$

$$240 \le Z_{\max} \le 300,$$

а оптимальний план виробництва продукції

$$(0;\ 0;\ 80;\ 0;\ 0;\ 120;\ 0) = X^* = (0;\ 0;\ 20;\ 60;\ 0;\ 0;\ 0).$$

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 2$ дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35 + 2b_3 \ge 0; \\ 45 - \Delta b_3 \ge 0; \\ 30 + 0\Delta b_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \ge -17{,}5; \\ \Delta b_3 \le 45; \end{cases}$$

$$-17{,}5 \le \Delta b_3 \le 45,$$

$$62{,}5 \le b_3 \le 125.$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум. од. або зменшиться на 17,5 ум. од., то двоїста оцінка $y_3 = 2$ цього ресурсу залишиться оптимальною. Згідно із цим можливий дохід підприємства та оптимальний план виробництва продукції перебуватимуть у межах

$$250 \le \max Z \le 375;$$

$$(0;\ 0;\ 0;\ 62{,}5;\ 0;\ 30;\ 0) = X^* = (0;\ 0;\ 125;\ 0;\ 0;\ 30;\ 0).$$

Для розрахунку інтервалу зміни недефіцитного ресурсу досить розв’язати одну нерівність.

У нашому випадку недефіцитним є другий ресурс. Відомо, що при оптимальному плані виробництва ресурс залишається в обсязі $x_6 = 30$ ум. од. Отже, зменшення даного ресурсу на 30 ум. од. не змінить структури оптимального плану. Якщо зміну загального запасу другого ресурсу позначити Δb_2, маємо:

$$-30 \le \Delta b_2 < \infty.$$

Таким чином, інтервал зміни недефіцитного ресурсу, в межах якого структура оптимального плану залишиться постійною буде:

$$250 \le b_2 \le \infty.$$

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів для визначення інтервалів таких змін необхідно розв’язати систему нерівностей.

Більш простою для дослідження є ситуація, коли зміни ресурсів відомі і необхідно визначити лише новий оптимальний план. Нехай додатковою умовою прикладу 4.1 є зміна обсягів усіх трьох ресурсів, що змінюються $\Delta b_1 = +10$, $\Delta b_2 = -10$, $\Delta b_3 = +20$ відповідно. Для визначення компонентів нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу. З першої теореми двоїстості відомо $X^* = D^{-1} \cdot \vec{B}$.

З останньої симплекс-таблиці отримуємо обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B}=\begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2+\Delta b_2 \\ b_3+\Delta b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 250+10 \\ 280-10 \\ 80+20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів

$$X^*=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix},$$

тобто X^* = (0; 0; 70; 30; 0; 10; 0).

Усі $x_j \ge 0$, і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається Y^* = (1/2; 0; 2). Загальний максимальний дохід підприємства зміниться на $\Delta F_{\max} = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 10 \cdot 1/2 - 10 \cdot 0 + 20 \cdot 2 = +45$ ум. од. і становитиме max F = 285 + 45 = 330 ум. од.

Використовуючи (3.48), проведемо дослідження *взаємозамінювання ресурсів*. Використаємо теоретичні положення п. 3.5.1 пункт *D*.

Якщо у виробничій системі існує два чи більше дефіцитні ресурси, то певна кількість одного з них може бути замінена деякою кількістю іншого, причому значення цільової функції залишиться незмінним.

Для умов прикладу 3.8 попередній аналіз двоїстих оцінок виявив, що дефіцитними є перший і третій ресурси. Припустимо, що забезпечення виробництва необхідним запасом третього ресурсу можливе не завжди. У такому випадку доцільним є визначення, якою кількістю першого ресурсу можна замінити третій, щоб не втратити значення прибутку.

Оскільки $\Delta b_r = \dfrac{y_s^*}{y_r^*}\Delta b_s$, де $\Delta b_r, \Delta b_s$ — величини зміни дефіцитних ресурсів y_s^*, y_r^* — двоїсті оцінки відповідних ресурсів, то зміна обсягу третього ресурсу на одиницю $\Delta b_3 = 1$ вимагає додаткового використання $\Delta b_1 = \dfrac{y_3^*}{y_1^*}\Delta b_3 = \dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot 1 = 4$ ум. од. першого ресурсу.

Отже, якщо перший ресурс збільшити на 4 ум. од. і використовувати в обсязі 284 ум. од., а третій зменшити на 1 ум. од. і залишити у виробництві 79 ум. од., то значення виручки від реалізації продукції залишиться незмінним порівняно з початковими умовами прикладу 4.1 — 285 ум. од.

3.6.3. Аналіз коефіцієнтів цільової функції. Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися чи зменшуватися). І тому завжди цікаво знати, у межах яких змін ціни продукції кожного виду структура оптимального плану виробництва залишається постійною.

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємось розглянутими в п. 3.5.2 положеннями. Як було з’ясовано, перетворення симплексної таблиці при зміні коефіцієнтів цільової функції стосуються лише елементів оцінкового рядка. Дослідимо питання зміни коефіцієнтів цільової функції для прикладу 4.1. Нехай змінюється ціна на одиницю продукції виду *А*, тобто початкове значення 2 ум. од. представимо, як $2+\Delta c_1$, де Δc_1 — величина зміни ціни одиниці продукції виду *А*. Тоді симплексні перетворення матимуть вигляд:

Базис	$C_б$	План	2	4	$3+\Delta c_3$	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	250	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	280	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	80	3	2	1	1	0	0	1
$F_j - c_j \ge 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	62,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0

Закінчення табл.

Базис	$C_б$	План	2	4	$3+\Delta c_3$	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	17,5	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$F_j - c_j \geq 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	45	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	**$3+\Delta c_3$**	**35**	**5**	**3/2**	**1**	**0**	$-\frac{1}{2}$	**0**	**2**
$F_j - c_j \geq 0$		**$285+35\Delta c_3$**	**$5+5\Delta c_3$**	**$5/2+3/2\Delta c_3$**	**0**	**0**	**$1/2–1/2\Delta c_3$**	**0**	**$2+2\Delta c_3$**

Симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів стовпчика «$C_{баз}$» що, у свою чергу, впливає на значення всіх ненульових оцінок ($F_j - c_j$). *Для базисної змінної* x_3 зміна коефіцієнта на Δc_3 приведе до таких оцінок:

$$(F_1 - c_1) = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + (3 + \Delta c_3) \cdot 5 - 2 = 5 + 5\Delta c_3;$$
$$(F_2 - c_2) = 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1 + (3 + \Delta c_3) \cdot 3/2 - 4 = 5/2 + 3/2\Delta c_3;$$
$$(F_5 - c_5) = 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot (-1) + (3 + \Delta c_3) \cdot (-1/2) - 0 = 1/2 - 1/2\Delta c_3;$$
$$(F_7 - c_7) = 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + (3 + \Delta c_3) \cdot 2 - 0 = 2 + 2\Delta c_3.$$

Нові значення оцінок мають задовольняти умову оптимальності, тобто $F_j — c_j \geq 0$, тому інтервал для Δc_3 визначається з такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 5+5\Delta C_3 \geq 0, \\ 5/2+3/2\Delta C_3 \geq 0, \\ 1/2-1/2\Delta C_3 \geq 0, \\ 2+2\Delta C_3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta C_3 \geq -1, \\ \Delta C_3 \geq -5/3, \\ \Delta C_3 \leq 1, \\ \Delta C_3 \geq -1; \end{cases}$$
$$-1 \leq \Delta C_3 \leq 1,$$
$$2 \leq C_3 \leq 4.$$

Отже, ціна одиниці продукції виду C може збільшуватися та зменшуватися на 1 ум. од. і перебувати в межах від 2 до 4 ум. од., але оптимальним планом виробництва продукції залишається $X^* = (0; 0; 35; 45)$.

Для базисної невідомої x_4 інтервал зміни коефіцієнта c_4 розраховується аналогічно

$$\begin{cases} 5-2\Delta C_4 \geq 0; \\ 5/2+1/2\Delta C_4 \geq 0; \\ 1/2+1/2\Delta C_4 \geq 0; \\ 2-1\Delta C_4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta C_4 \leq 5/2, \\ \Delta C_4 \geq -5, \\ \Delta C_4 \geq -1, \\ \Delta C_4 \leq 2; \end{cases}$$
$$-1 \leq \Delta C_4 \leq 2,$$
$$3 \leq C_4 \leq 6.$$

Якщо за інших однакових умов ціна одиниці продукції D зменшиться до 3 ум. од. або збільшиться до 6 ум. од., то оптимальний план виробництва продукції на підприємстві не зміниться ($X^* = (0; 0; 35; 45)$).

Розрахунок інтервалів зміни значень коефіцієнтів цільової функції *для небазисних змінних*.

Симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком ненульових значень оцінкового рядка ($F_j - c_j$). Нові оцінки ($F_j - c_j$) мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта c_1 позначимо Δc_1. Оскільки x_1 — небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна оцінка $F_1 - c_1$:

$$(F_1 - c_1) = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3/2 - (2 + \Delta c_1) = 5 - \Delta c_1.$$

За умови $F_1 - c_1 \geq 0$ дістанемо нерівність $5 - \Delta c_1 \geq 0$, тобто $\Delta c_1 \geq 5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції A за інших рівних умов зросте не більш як на 5 ум. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві однаково залишиться $X^* = (0; 0; 35; 45)$. Лише максимальний дохід зміниться на $\max \Delta F = \Delta c_1 x_1$.

Аналогічно розраховується інтервал зміни коефіцієнта Δc_2:

$$(F_2 - c_2) = 5/2 - \Delta c_2 = 0;\ \Delta c_2 = 5/2.$$

Зі зростанням ціни одиниці продукції B на 5/2 ум. од. за інших однакових умов оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а $\max \Delta F = \Delta c_2 x_2$.

Якщо ж коливання ціни продукції виходять за визначені межі, то план $X = (0; 0; 35; 45)$ вже не буде оптимальним і його необхідно буде поліпшити згідно з алгоритмом симплекс-методу, тобто продовжити розв'язування задачі.

3.6.4. Аналіз коефіцієнтів матриці обмежень. Як зазначалося в більшості випадків коефіцієнти $a_{ij}, (i = \overline{1,m}), (j = \overline{1,n})$ матриці системи обмежень задачі лінійного програмування є технологічними коефіцієнтами (нормативами використання ресурсу на одиницю виготовлення кожного виду продукції) і не підпадають під вплив випадкових факторів у такій мірі, як ціни чи ресурси.

Розглянемо випадок зміни коефіцієнтів, що відповідають лише небазисним змінним, оскільки зміна значень коефіцієнтів матриці обмежень, що відповідає базисним змінним, приводить до зміни базисної матриці D і здійснити аналіз досить складно.

Припустимо, що для умов прикладу 3.8 додатково відомо, що витрати ресурсів на виготовлення продукції A і B коливаються залежно від використання різних видів устаткування в процесі виробництва продукції. За оптимальним планом виготовлення обох видів продукції є нерентабельним, оскільки витрати на виробництво одиниці продукції перевищують ціну реалізації. Проведений аналіз двоїстих оцінок, що відповідають змінним x_1, x_2 свідчить, що для виготовлення одиниці продукції A витрати перевищують ціну на 5 ум. од., а для B — вдвічі менше (на 2,5 ум. од.). Отже, очевидно, що за деяких змін норм використання ресурсів продукція B може стати рентабельною. З попереднього аналізу дефіцитних ресурсів відомо, що найціннішим для виробництва є третій ресурс. Визначимо, в яких межах можлива зміна B.

Позначимо Δa_{32} — величина зміни норми використання третього ресурсу на виготовлення одиниці продукції другого виду. Тоді симплексні перетворення будуть:

Базис	$C_б$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	250	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	280	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	80	3	$2+\Delta a_{32}$	1	1	0	0	1
$F_j - c_j \geq 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	62,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	17,5	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}+\Delta a_{32}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$F_j - c_j \geq 0$		69	0	**6**	–1	0	1	0	0

Закінчення табл.

Базис	Сб	План	2	4	3	4	0	0	0
			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x_4	4	45	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	$3/2+2\,\Delta a_{32}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$F_j - c_j \geq 0$		285	5	$\mathbf{5/2+6\,\Delta a_{32}}$	0	0	1/2	0	2

Для оптимальності плану необхідне виконання в останній симплексній таблиці умови невід'ємності всіх оцінок, тому має виконуватися нерівність

$$5/2+2\,\Delta a_{32} \geq 0,$$

звідси $\Delta a_{32} \geq -5$, тоді $0 \leq a_{32} \leq \infty$.

Таким чином, лише у випадку коли третій ресурс взагалі не буде використовуватися для виробництва продукції *B*, структура оптимального плану зміниться і, можливо, цей вид продукції стане рентабельним. За всіх інших змін ($0 \leq a_{32} \leq \infty$) структура оптимального плану буде постійною, а отже, продукція виду *B* буде нерентабельною.

При дослідженні зміни коефіцієнта, що відповідає базисній змінній, чи одночасній зміні кількох коефіцієнтів матриці обмежень, раціональнішим виявляється розв'язування нової задачі лінійного програмування.

3.7. Приклад практичного використання двоїстих оцінок у аналізі оптимізаційної економічної задачі

Приклад 3.9. Фірма виготовляє продукцію трьох виді *A*, *B* і *C*. Для цього потрібний певний час обробки кожної продукції на різних групах обладнання (1, 2, 3) (див. табл.).

Група обладнання	Час обробки одиниці продукції, год, за видами		
	A	*B*	*C*
I	1	2	4
II	2	4	2
III	1	1	2

Можливий час роботи обладнання кожного типу становить відповідно 360, 520 і 220 год на місяць. Ціна одиниці продукції *A* дорівнює 90 дол., продукції *B* — 110 дол., а продукції *C* — 150 дол. Визначити, яку продукцію і в якій кількості слід виготовляти, щоб фірма отримувала найбільший дохід.

Розв'язування задачі симплекс-методом дає таку останню симплексну таблицю:

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2
$F_j - c_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70

Керівництво фірми цікавить, чи зміниться оптимальний план виробництва продукції і якщо зміниться, то яким буде новий оптимальний план у кожній із наведених далі ситуацій.

1. Фірма може збільшити час роботи обладнання груп 2 і 3 на 100 та 80 год. за місяць відповідно, орендуючи для цього додаткове обладнання, яке коштуватиме 5000 дол. Чи вигідно це? Якщо вигідно, то яким має бути новий план виробництва продукції?

2. Фінансовий відділ фірми вважає, що загострення конкуренції на ринку збуту може призвести до зниження ціни на продукцію *B* на 25 дол. Як це позначиться на оптимальному плані виробництва продукції фірми?

3. Відділ досліджень і розробок фірми пропонує виготовляти дешевшу модифікацію продукції *C*. Для виробництва одиниці цієї нової продукції потрібний час роботи обладнання груп 1, 2 і 3 становить 4, 3 і 1 год відповідно. Орієнтовна ціна одиниці нової продукції дорівнює 120 дол. Керівництво фірми цікавить, чи буде за таких умов виробництво нової продукції вигідним.

4. Споживач продукції *A* за певних обставин порушує попередню домовленість і відмовляється прийняти більш як 100 од. продукції *A*. Визначити, як фірма має змінити план виробництва своєї продукції, щоб уникнути втрат, пов’язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Розв’язування. Із наведеної в умові задачі симплекс-таблиці маємо $X^* = (180; 40; 0; 100; 0; 0)$, $\max F = 20600$, $Y^* = (0; 10; 70)$. Оптимальним планом виробництва продукції на фірмі є випуск 180 од. продукції *A* і 40 од. продукції *B*. Виготовлення продукції виду *C* не передбачається. При цьому фірма матиме максимальний дохід у розмірі 20 600 дол. на місяць.

1. Збільшення часу роботи обладнання дасть змогу збільшити випуск продукції, тобто змінить оптимальний план і дохід фірми. Оскільки $\Delta b_1 = 0$, $\Delta b_2 = 100$, $\Delta b_3 = 80$, новий оптимальний план визначається так:

$$X^* = D^{-1} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 360+0 \\ 520+100 \\ 220+80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 290 \end{pmatrix}.$$

Новий план допустимий (всі $x_j \geq 0$), і тому оптимальні двоїсті оцінки зберігають свої значення $Y^* = (0; 10; 70)$. Приріст доходу фірми в результаті зміни оптимального плану виробництва продукції розраховується так:

$$\max\Delta Z = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 100 \cdot 10 + 80 \cdot 70 = 6600 \text{ дол.}$$

Оскільки дохід фірми від додаткового використання обладнання груп 2 і 3 перевищує витрати на оренду цього обладнання ($6600 > 5000$), то природно, що така тактика фірми буде вигідною. При цьому оптимальним планом виробництва стане випуск 290 од. продукції *A* і 10 од. продукції *B*. Невикористаний час роботи обладнання групи І зменшиться до 50 год на місяць, а дохід фірми за відрахуванням витрат на оренду обладнання дорівнюватиме 20600 + (6600 – 5000) = 22 200 дол. на місяць.

2. Зміна ціни одиниці продукції *B* на Δc_2 (25 дол.) стосується всього оцінкового рядка симплекс-таблиці, оскільки x_2 є базисною змінною. Нові $F_j - c_j$ матимуть такі значення:

$$F_3 - c_3 = 10 - 1\Delta c_2 = 10 + 25 = 35;$$
$$F_5 - c_5 = 10 + 1/2\Delta c_2 = 10 - 12{,}5 = -2{,}5;$$
$$F_6 - c_6 = 70 - 1\Delta c_2 = 70 + 25 = 95.$$

Коли б усі здобуті оцінки задовольняли умову $Z_j - C_j \geq 0$, то це означало б, що попри зниження ціни план виробництва продукції на фірмі не зміниться. Але оцінка $F_5 - c_5$ не задовольняє умову оптимальності задачі на максимум, і тому можна зробити такий висновок. Суттєве зниження ціни одиниці продукції *B* порушує визначений раніше оптимальний план виробництва продукції, оскільки випуск продукції *B* стає для фірми невигідним, нерентабельним.

Новий оптимальний план визначається у процесі подальшого розв’язування задачі симплекс-методом:

Базис	$C_{баз}$	План	90	85	150	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0
x_2	85	40	0	1	–1	0	1/2	–1
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2
$F_j - c_j \geq 0$		19600	0	0	35	0	–2,5	95
x_4	0	140	0	1	2	1	0	–1
x_5	0	80	0	2	–2	0	1	–2
x_1	90	220	1	1	2	0	0	1
$F_j - c_j \geq 0$		19800	0	5	30	0	0	90

Отже, у розглянутій ситуації зниження ціни одиниці продукції виду B на 25 дол. різко змінить структуру та обсяги виробництва продукції на фірмі. Вигідним стане випуск лише продукції A у кількості 220 од.: при цьому час роботи обладнання груп 1 і 2 використовуватиметься повністю. Усе це призведе до зменшення доходу фірми до 19 800 дол. на місяць.

3. Обсяг виробництва нової продукції в оптимальному плані позначимо x_7, тоді математична модель прямої задачі матиме такий вигляд:

$$\max Z = 90x_1 + 10x_2 + 150x_3 + 120x_7;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_7 \le 360, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_7 \le 520, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 \le 220, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

У математичній моделі двоїстої задачі змінній x_7 відповідатиме таке обмеження: $4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 120$. Оцінимо рентабельність нової продукції за допомогою двоїстих оцінок: $4 \cdot 0 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 70 = 100$, що є меншим за 120 дол. Загальна вартість усіх ресурсів, що витрачаються на випуск одиниці нової продукції, не перевищує орієнтовної ціни цієї продукції, і тому її виробництво для фірми є вигідним, рентабельним. Завдяки цьому визначений раніше оптимальний план виробництва продукції можна поліпшити за рахунок уведення в нього x_7.

Для цього за допомогою оберненої матриці необхідно визначити елементи стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці:

$$D^{-1} \times \begin{pmatrix} a_{17} \\ a_{27} \\ a_{37} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Результати однієї ітерації симплекс-методу, що приводить до нового оптимального плану задачі, наведено далі.

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0	120	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	5/2	40
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	1/2	80
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	1/2	360
$F_j - c_j \ge 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	–20	
x_7	120	40	0	0	6/5	2/5	–1/5	0	1	
x_2	110	20	0	1	–8/5	–1/5	3/5	–1	0	
x_1	90	160	1	0	12/5	–1/5	–2/5	2	0	
$F_j - c_j \ge 0$		21 400	0	0	34	8	6	70	0	

Як бачимо з таблиці, $X^* = (160; 20; 0; 0; 0; 0; 40)$, $\max Z = 21400$. Керівництво фірми має підтримати пропозицію відділу досліджень і розробок та налагодити виробництво нової продукції, яка є рентабельною, виготовляючи її в кількості 40 од.; відповідно продукції A — 160 од. і продукції B — 20 од. Такий новий оптимальний план виробництва продукції збільшить дохід фірми до 21 400 дол. на місяць.

4. Четверта запропонована ситуація математично пов'язана з уведенням в умову задачі додаткового обмеження, що може привести до таких наслідків:

а) нове обмеження для визначеного оптимального плану виконується, і тоді воно є надлишковим, зайвим і його включення до моделі не змінює визначеного плану;

б) нове обмеження для визначеного оптимального плану не виконується, і тоді за допомогою двоїстого симплекс-методу необхідно знайти новий оптимальний план.

За умовою задач додатковим є обмеження $x_1 < 100$, але воно суперечить оптимальній кількості продукції A, яка дорівнює 180 од. Тому необхідно приєднати це додаткове обмеження до симплекс-таблиці і продовжити розв'язування задачі, але вже за допомогою двоїстого симплекс-методу. Для цього спочатку зведемо додаткове обмеження до канонічного вигляду:

$$x_1 + x_7 = 100.$$

Оскільки в оптимальному плані змінна x_1 є базисною, її необхідно записати через небазисні невідомі. Це робиться так. У симплекс-таблиці, яку наведено в умові задачі, рядок змінної «x_1» подається рівнянням

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1/2 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 = 180.$$

З нього запишемо вираз для x_1:

$$x_1 = 180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6.$$

Підставивши цей вираз в додаткове обмеження, отримаємо

$$180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = 100,$$

або

$$-x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = -80.$$

У такому вигляді додаткове обмеження дописується у симплекс-таблицю. Застосування двоїстого симплекс-методу приведе до нового оптимального плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	0
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	0
_ x_7	0	–80	0	0	–3	0	1/2	–2	1
$F_j - c_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	0
x_4	0	20	0	0	0	1	0	–2	1
x_2	110	200/3	0	1	0	0	1/3	–1/3	–1/3
x_1	90	100	1	0	0	0	0	0	1
x_3	150	80/3	0	0	1	0	–1/6	2/3	–1/3
$F_j - c_j \geq 0$		61 000/3	0	0	0	0	35/3	190/3	10/3

В останній таблиці маємо $X^* = (100; 200/3; 80/3; 20; 0;0)$, max$Z = 61000/3 \approx 20333$.

Проаналізуємо цей план. Реалізація запропонованої в умові задачі ситуації змінює структуру та кількісний вираз оптимального плану. Тепер з урахуванням вимог споживача фірма виготовлятиме 100 од. продукції *A*, 200/3 од. продукції *B* і 80/3 од. продукції *C*. У результаті такого плану випуску продукції дохід фірми зменшиться до 20333 дол. на місяць.

3.8. Аналіз оптимальних планів задач лінійного програмування за допомогою Microsoft Excel Solver

Розглянемо приклад розв'язування та аналізу лінійної оптимізаційної задачі за допомогою Microsoft Excel Solver.

1. *Економічна постановка задачі.*

Підприємство хімічної промисловості виготовляє продукцію чотирьох видів: чисті хімікати, гуму, скловолокно та каустичну соду. На виробництві використовуються основні види ресурсів: сировина, обладнання та електроенергія. Витрати ресурсів на місяць відомі і наведені в таблиці:

Виробничий ресурс	Витрати ресурсу на виробництво 1 т продукції				Загальний запас ресурсу
	чисті хімікати	гума	скловолокно	каустична сода	
Сировина, т	2	5	3	4	250
Обладнання, год	10	60	50	40	2800
Електроенергія, кВт/год	90	70	100	60	8000

Прибуток від 1 т кожного виду продукції відомі і становлять: чисті хімікати — 4200 грн, гума — 3600 грн, скловолокно — 7500 грн і каустична сода — 2500 грн.

Необхідно визначити оптимальний план виробництва продукції на місяць з метою отримання максимального прибутку.

2. *Побудова математичних моделей початкової і двоїстої задач*.

Математична модель початкової задачі.

Позначимо x_1 — обсяг виробництва чистих хімікатів, т; x_2 — обсяг виробництва гуми, т; x_3 — обсяг виробництва скловолокна, т; x_4 — обсяг виробництва каустичної соди, т.

Обмеження задачі описують наведені за умовою витрати ресурсів: сировини, обладнання та електроенергії:

$$F = 4200x_1 + 3600x_2 + 7500x_3 + 2500x_4 \to max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 250, \\ 10x_1 + 60x_2 + 50x_3 + 40x_4 \le 2800, \\ 90x_1 + 70x_2 + 100x_3 + 60x_4 \le 8000, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,3,4.$$

За правилами побудови двоїстих задач маємо таку двоїсту задачу до початкової:

$$Z = 250y_1 + 2800y_2 + 8000y_3 \to min$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 10y_2 + 90y_3 \ge 4200, \\ 5y_1 + 60y_2 + 70y_3 \ge 3600, \\ 3y_1 + 50y_2 + 100y_3 \ge 7500, \\ 4y_1 + 40y_2 + 60y_3 \ge 2500, \end{cases}$$
$$y_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

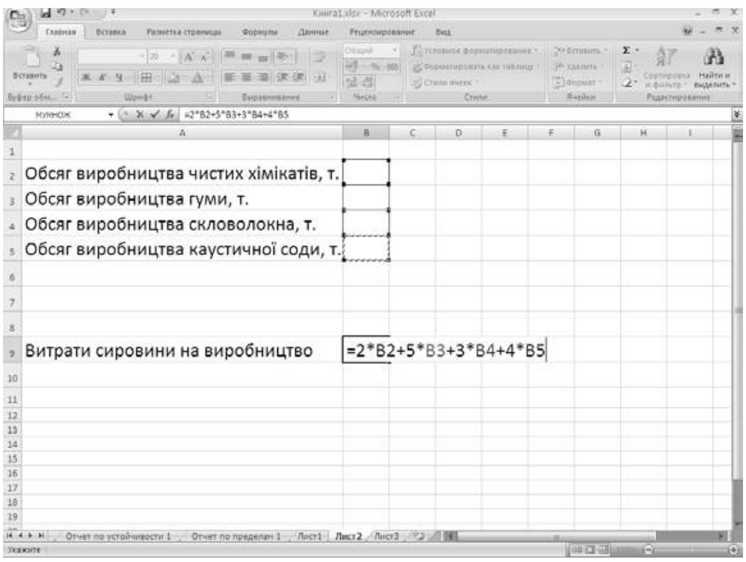
3. Реалізація розроблених моделей початкової і двоїстої задач на ПЕОМ.

Отримана математична модель початкової задачі (та двоїста до неї) належить до класу лінійних оптимізаційних задач і розв’язується симплексним методом. Нагадаємо, що реалізація симплексного методу засобами MS Excel здійснюється за допомогою надбудови «Поиск решения».

Розглянемо ще один спосіб проведення підготовчої роботи для використання надбудови «Поиск решения». Для пошуку оптимального плану лінійної оптимізаційної задачі, використовуючи дану надбудову, необхідно виконати такі дії.

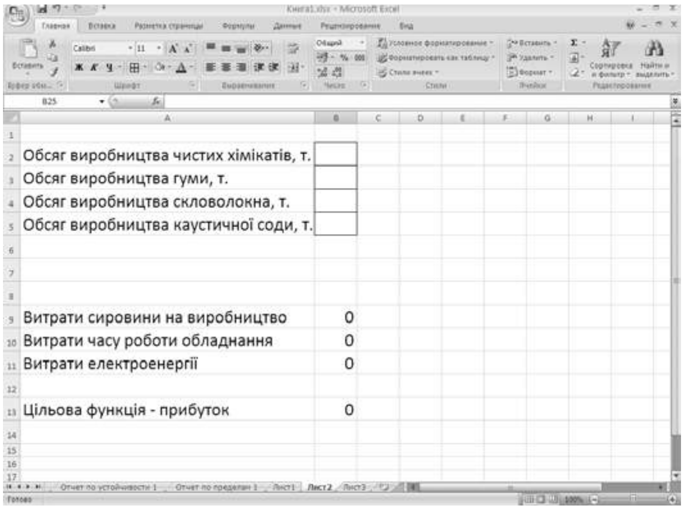
1. Виділити (у будь-якому місці таблиці Excel) потрібну кількість пустих клітин, у яких будуть розташовані значення змінних (отже, кількість таких клітин повинна відповідати кількості змінних задачі). Зручно поруч з виділеними клітинами записати позначення, які відповідають економічному змісту змінних.

Для наведеного прикладу необхідно виділити чотири пусті клітини, оскільки початкова задача містить чотири змінні. Наприклад, виділяються пусті клітини B1, B2, B3 і B4, позначення економічного змісту відповідних змінних розташовані поруч, у клітинах A1, A2, A3 і A4

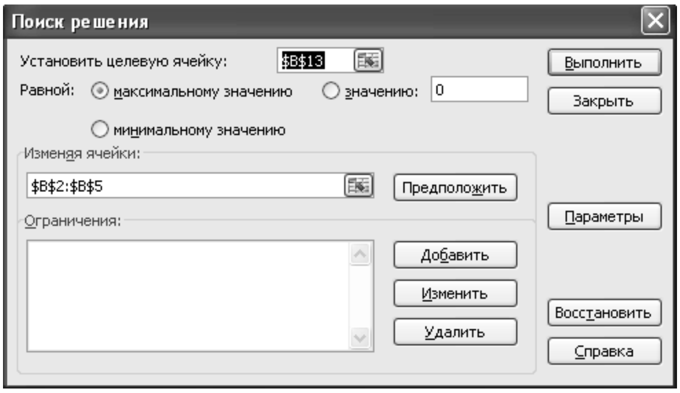


2. В інші пусті клітини (у будь-якому місці таблиці Excel), у вигляді формул, вводяться ліві частини кожного з обмежень і цільова функція. При введенні обмежень позначення змінних у математичній моделі потрібно замінити на адреси тих пустих клітин, які відведено для змінних.

Для наведеного прикладу, змінна x_1 замінюється на адресу відповідної клітини, а саме — B1, змінна x_2 — на адресу B2, x_3 — на адресу B3, x_4 — на адресу B4. Зручно також ввести позначення для кожного з обмежень відповідно до умови задачі, яку вони описують. Після введення всіх лівих частин обмежень і цільової функції відповідні клітини набувають значення нулів.

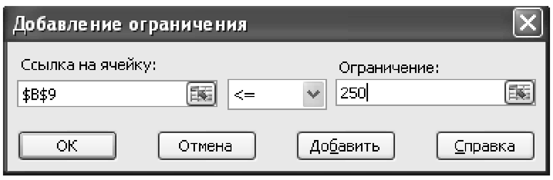


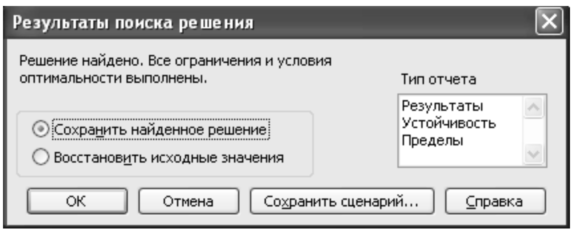
3. Викликати надбудову «Поиск решения» і заповнити вікно запиту у такий спосіб: вказати адресу клітини, в якій розташований вираз, що описує цільову функцію; обрати позицію відповідно до необхідності пошуку максимального чи мінімального значень цільової функції; у полі «Изменяя ячейки» вказати масив пустих клітин, що відведено для змінних задачі; у полі «Ограничения» обрати кнопку «Добавить» і в новому вікні по одному ввести кожне обмеження задачі; обрати кнопку «Параметры» і встановити дві позиції: «Линейная модель» і «Неотрицательные значения»; повернутись в початкове вікно та обрати кнопку «Выполнить».



Якщо задача має оптимальний план, то повертається вікно з відповідним написом. Якщо задача не має розв’язку, відповідна інформація також буде повідомлена в даному вікні.

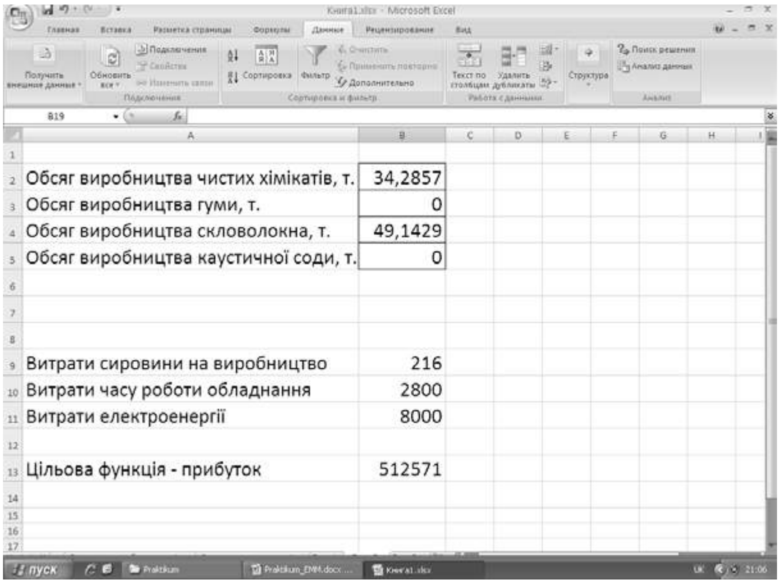
За наявності оптимального плану задачі у вікні, що повертається надбудовою після розв’язування, крім повідомлень про наявність розв’язку, пропонуються три типи звітів, які містять інформацію про стійкість оптимальних планів: «Результаты», «Устойчивость», «Пределы». Всі три типи звітів будуть сформовані автоматично, якщо їх виділити та натиснути кнопку «Ок».





Значення змінних оптимального плану будуть відображатись у відведених, на початковому етапі, клітках таблиці Excel, у клітках, які містили ліві частини обмежень, будуть розташовані значення, які відповідають витратам ресурсів у виробництві продукції за оптимальним планом, а в клітинках, у яких був розташований вираз цільової функції, міститиметься її значення для оптимального плану.

Для наведеного прикладу розв’язок матиме такий вигляд. Отже, щоб мати максимальний прибуток для умов даного виробництва треба виготовляти 34,2857 т чистих хімікатів і 49,1429 т скловолокна і не виготовляти гуму і каустичну соду. Максимальний прибуток становитиме 512 571 грн.



4. ***Аналіз лінійних моделей і розв’язків початкової і двоїстої задач***.

4.1. Економічне тлумачення оптимальних планів початкової й двоїстої задач. Усі значення основних і додаткових змінних в оптимальних планах подані у звітах з назвами «Отчет по результатам», «Отчет по устойчивости».

Значення оптимального плану початкової задачі розташовані в «Отчет по результатам». Для наведеного прикладу маємо такий оптимальний план початкової задачі:

$$X^*(x_1 = 34{,}29;\ x_2 = 0;\ x_3 = 49{,}14;\ x_4 = 0;\ x_5 = 34;\ x_6 = 0;\ x_7 = 0\ ).$$

Значення основних змінних оптимального плану початкової задачі розташовано в «Отчет по результатам», блок «Изменяемые ячейки», стовпець «Результат»:

$$x_1 = 34{,}29;\ x_2 = 0;\ x_3 = 49{,}14;\ x_4 = 0.$$

Економічний зміст основних змінних оптимального плану початкової задачі вказує на оптимальні обсяги виробництва відповідних видів продукції.

Для наведеного прикладу маємо: обсяг виробництва чистих хімікатів повинен становити 34,29 т ($x_1 = 34{,}29$), обсяг виробництва скловолокна — 49,14 т ($x_3 = 49{,}14$), виробництво гуми і каустичної соди за оптимальним планом є недоцільним: ($x_2 = 0;\ x_4 = 0$).

Значення додаткових змінних оптимального плану початкової задачі розташовано в «Отчет по результатам», блок «Ограничения», стовпець «Разница»: $x_5 = 34;\ x_6 = 0;\ x_7 = 0$.

Економічний зміст змінних додаткових змінних оптимального плану початкової задачі вказує на кількість залишків відповідних видів ресурсів за оптимального виробництва продукції.

Для наведеного прикладу маємо лише залишки сировини, обсягом 34 т ($x_5 = 34$). Час роботи обладнання і наявний обсяг електроенергії використані повністю ($x_6 = 0;\ x_7 = 0$).

Значення оптимального плану двоїстої задачі розміщені в «Отчет по устойчивости».

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам

Рабочий лист: [Книга1.xlsx]Лист2

Отчет создан: 08.06.2012 21:57:46

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
B13	Цільова функція - прибуток	0	512571,4286

Основні змінні початкової задачі

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
B2	Обсяг виробництва чистих хімікатів, т.	0	34,28571429
B3	Обсяг виробництва гуми, т.	0	0
B4	Обсяг виробництва скловолокна, т.	0	49,14285714
B5	Обсяг виробництва каустичної соди, т.	0	0

Додаткові змінні початкової задачі

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
B9	Витрати сировини на виробництво	216	B9<=250	не связан.	34
B10	Витрати часу роботи обладнання	2800	B10<=2800	связанное	0
B11	Витрати електроенергії	8000	B11<=8000	связанное	0

Для наведеного прикладу маємо такий оптимальний план двоїстої задачі:

$Y^*(y_1 = 0;\ y_2 = 72{,}86;\ y_3 = 38{,}57;\ y_4 = 0;\ y_5 = 3471{,}43;\ y_6 = 0;\ y_7 = 2728{,}57\ )$Значення основних змінних оптимального плану двоїстої задачі — в «Отчет по устойчивости», блок «Ограничения», стовпець «Теневая цена»: $y_1 = 0;\ y_2 = 72{,}86;\ y_3 = 38{,}57$.

Економічний зміст змінних основних змінних оптимального плану двоїстої задачі вказує, наскільки зросте значення цільової функції, якщо значення правої частина відповідного обмеження збільшиться на 1.

Для наведеного прикладу маємо: у разі збільшення запасів сировини на виробництві на 1 т (права частина обмеження) прибуток (цільова функція) залишиться незмінним ($y_1 = 0$), у разі збільшення часу роботи обладнання на 1 год прибуток зросте на 72,86 грн ($y_2 = 72{,}86$), у разі збільшення обсягу електроенергії на 1 кВт/год прибуток зросте на 38,57 грн ($y_3 = 38{,}57$).

Значення додаткових змінних оптимального плану двоїстої задачі розташовані в «Отчет по устойчивости», блок «Изменяемые ячейки», стовпець «Нормир. стоимость»: $y_4 = 0;\ y_5 = y_6 = 0; y_7 = 2728{,}57$.

Економічний зміст змінних додаткових змінних оптимального плану двоїстої задачі вказує, наскільки витрати на виробництво одиниці продукції перевищують прибуток від її реалізації (іншими словами, визначають доцільність чи недоцільність виробництва кожного виду продукції).

Для наведеного прикладу маємо: доцільним є виробництво чистих хімікатів і скловолокна ($y_4 = 0;\ y_6 = 0;$). Витрати на виробництво 1 т гуми перевищують прибуток від її реалізації на $3471{,}43$ грн ($y_5 = 3471{,}43$), а витрати на виробництво 1 т каустичної соди перевищують прибуток від її реалізації на $2728{,}57$ грн ($y_7 = 2728{,}57$). Отже, виробництво таких видів продукції є недоцільним.

Microsoft Excel 12.0
Отчет по устойчивости

Рабочий лист: [Книга1.xlsx]Лист2

Отчет создан: 08.06.2012 21:57:46

Додаткові змінні двоїстої задачі

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
B2	Обсяг виробництва чистих хімікатів, т.	34,28571	0	4200	2550	2700
B3	Обсяг виробництва гуми, т.	0	–3471,42857	3600	3471,42857	1E+30
B4	Обсяг виробництва скловолокна, т.	49,142857	0	7500	13 500	2585,106383
B5	Обсяг виробництва каустичної соди, т.	0	–2728,57143	2500	2728,57143	1E+30

Основні змінні двоїстої задачі

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
B9	Витрати сировини на виробництво	216	0	250	1E+30	34
B10	Витрати часу роботи обладнання	2800	72,8571429	2800	1200	1911,111111
B11	Витрати електроенергії	8000	38,5714286	8000	1700	2400

В «Отчет по устойчивости» значення додаткових змінних двоїстої задачі наведені з протилежним знаком, вказуючи на ті втрати, які будуть отримані під час виробництва відповідних видів продукції. Для наведеного прикладу матимемо: під час виробництва 1 т гуми буде втрачено 3471,43 грн, 1 т каустичної соди — 2728,57 грн; чистих хімікатів і скловолокна втрат прибутку не буде, саме тому виробництво даних видів продукції є доцільним.

4.2. Аналіз доцільність розширення асортименту продукції за рахунок включення нового виду продукції. Розглянемо питання про доцільність включення у виробництво нового виду продукції. припустимо, що для умов виробництва з наведеного прикладу розглядається доцільність включення такого виду продукції, як кальцинована сода. Відомо, що витрати ресурсів на 1 т такого виду продукції становлять 2 т сировини, 20 год роботи обладнання і 60 квт/год витрат електроенергії, причому прибуток від реалізації 1 т продукції становитиме 3700 грн.

Для включення до математичної моделі задачі нового виду продукції треба ввести позначення нової змінної. Позначимо x_5 — обсяг виробництва кальцинованої соди, т. У математичній моделі задачі дана змінна з'явиться в обмеженнях задачі та цільовій функції з відповідними коефіцієнтами і математична модель набуде такого вигляду:

$$F = 4200x_1 + 3600x_2 + 7500x_3 + 2500x_4 + 3700x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 \le 250, \\ 10x_1 + 60x_2 + 50x_3 + 40x_4 + 20x_5 \le 2800, \\ 90x_1 + 70x_2 + 100x_3 + 60x_4 + 60x_5 \le 8000, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Якщо отримано розв'язок попередньої задачі, то для відповіді на питання про доцільність (недоцільність) введення нового виду продукції розв'язувати нову задачу не треба. Достатньо розглянути лише нове обмеження, яке з'явиться в двоїстій задачі відповідно до введеної в модель нової змінної.

Для наведеної вище задачі матимемо таку двоїсту задачу:

$$Z = 250y_1 + 2800y_2 + 8000y_3 \to min$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 10y_2 + 90y_3 \geq 4200, \\ 5y_1 + 60y_2 + 70y_3 \geq 3600, \\ 3y_1 + 50y_2 + 100y_3 \geq 7500, \\ 4y_1 + 40y_2 + 60y_3 \geq 2500, \\ 2y_1 + 20y_2 + 60y_3 \geq 3700, \end{cases}$$
$$y_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Ця модель двоїстої задачі відрізняється від попередньої моделі двоїстої задачі лише наявністю останнього обмеження, яке описує виробництво нового виду продукції:

$$2y_1 + 20y_2 + 60y_3 \geq 3700.$$

У лівій частині даного обмеження є вираз, що описує витрати ресурсів (у грошовому вираженні) на виробництво 1 т кальцинованої соди, а в правій частині — прибуток від реалізації 1 т згаданої продукції. Оскільки значення двоїстих оцінок за оптимальним планом задачі відомі, то залишається лише розглянути, чи виконується нове обмеження за відомих значень y_1, y_2, y_3. Таким чином, в лівій частині обмеження маємо

$$2y_1 + 20y_2 + 60y_3 = 2 * 0 + 20 * 72{,}86 + 60 * 38{,}57 = 3771{,}4.$$

Отже, витрати на виробництво 1 т кальцинованої соди для умов даної задачі становлять 3771,4 грн, що перевищує запланований прибуток 3700 грн, тому введення у виробництво даного виду продукції є недоцільним.

Для того щоб виготовляти кальциновану соду в наведених умовах виробництва, необхідно змінювати початкові умови, наприклад, збільшити прибуток від реалізації 1 т продукції не менш як на 71,4 грн.

4.3. Визначення дефіцитних і недефіцитних ресурсів. Для задачі визначення оптимального плану виробництва розрізняють дефіцитні та недефіцитні ресурси. Дефіцитним називають ресурс, який у разі оптимального плану виробництва буде використаний повністю. Недефіцитним вважається ресурс, який у разі оптимального плану виробництва не використовується повністю.

Статус ресурсів (дефіцитний чи недефіцитний) прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший — підстановкою значень оптимального плану X^* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, в іншому разі — недефіцитний.

Для наведеного прикладу визначимо статус ресурсів першим способом. Перший ресурс — запас сировини:

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 * 34{,}29 + 5 * 0 + 3 * 49{,}14 + 4 * 0 = 216 < 250.$$

Обмеження виконується як строга нерівність, тобто ресурс за оптимального плану виробництва використовується неповністю, отже, є недефіцитним.

Для другого ресурсу — час роботи обладнання:

$$10 * 34{,}29 + 60 * 0 + 50 * 49{,}14 + 40 * 0 = 2800.$$

Обмеження виконується як рівняння, тобто ресурс за оптимального плану виробництва використовується повністю, отже, є дефіцитним.

Для третього ресурсу — запас електроенергії:

$$90x_1 + 70x_2 + 100x_3 + 60x_4 = 90 * 34{,}29 + 70 * 0 + 100 * 49{,}14 + 60 * 0 = 8000.$$

Обмеження виконується як рівняння, тобто ресурс при оптимальному плані виробництва використовується повністю, отже, також є дефіцитним.

Другий спосіб визначення статусу ресурсу — за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля — ресурс недефіцитний.

Для наведеного прикладу маємо $x_5 = 34$, тобто є залишки сировини обсягом 34 т, тому такий ресурс є недефіцитним. $x_6 = 0$ та $x_7 = 0$, Іншими словами, час роботи обладнання і наявний обсяг електроенергії використані повністю, отже, ці два ресурси є дефіцитними.

Третій спосіб — за допомогою основних змінних двоїстої задачі. Якщо $y_j \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів j-го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $y_j = 0$, то j-й ресурс недефіцитний.

Для наведеного прикладу маємо $y_1 = 0$, тому перший ресурс — сировина, є недефіцитним, значення $y_1 = 0$ означає, що у разі збільшення запасів сировини на виробництві на 1 т, за незмінних інших умов виробництва, прибуток залишиться незмінним, $y_2 = 72{,}86$, тому другий ресурс — час роботи обладнання, дефіцитний. Значення $y_2 = 72{,}86$ вказує, що у разі збільшення часу роботи обладнання на 1 год, за незмінних інших умов виробництва, прибуток зросте на 72,86 грн, $y_3 = 38{,}57$, і тому третій ресурс — електроенергія, також дефіцитний. Значення $y_3 = 38{,}57$ вказує, що у разі збільшення обсягу електроенергії на 1 кВт/год, за незмінних інших умов виробництва, прибуток зросте на 38,57 грн.

Отже, якщо запас часу роботи обладнання (дефіцитний ресурс) збільшити на 1 год ($2800 + 1 = 2801$), тоді, за незмінних усіх інших умов виробництва, значення цільової функції зросте на $y_2 = 72{,}86$ грн і становитиме $F = 512644{,}3$ грн.

4.4. Визначення рентабельної та нерентабельної продукції. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції. Підставимо значення оптимального плану двоїстої задачі Y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (значення у лівій частині обмеження) перевищує прибуток від реалізації одиниці цієї продукції (значення у правій частині обмеження), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне (нерентабельне). Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 10 \cdot 72{,}86 + 90 \cdot 38{,}57 = 4200, \text{(продукція рентабельна)} \\ 5 \cdot 0 + 60 \cdot 72{,}86 + 70 \cdot 38{,}57 = 7071{,}5 > 3600, \text{(продукція нерентабельна)} \\ 3 \cdot 0 + 50 \cdot 72{,}86 + 100 \cdot 38{,}57 = 7500, \text{(продукція рентабельна)} \\ 4 \cdot 0 + 40 \cdot 72{,}86 + 60 \cdot 38{,}57 = 5228{,}6 > 2500, \text{(продукція нерентабельна)} \end{cases}$$

Таким чином, перше обмеження вказує, що витрати на виробництво одиниці першого виду продукції (чистих хімікатів) не перевищують прибуток від її реалізації, а отже, виробництво даного виду продукції є рентабельним. У разі виробництва одиниці продукції другого виду (1 т гуми) витрати на виробництво становитимуть 7071,5 грн, тобто перевищують прибуток від реалізації 1 т гуми, а отже, виробництво такого виду продукції є нерентабельним. Аналогічно третє обмеження вказує, що витрати на виробництво одиниці третього виду продукції (скловолокна) не перевищують прибуток від її реалізації, а отже, виробництво даного виду продукції є рентабельним, а у виробництві одиниці продукції четвертого виду (1 т каустичної соди) витрати на виробництво становитимуть 5228,6 грн, тобто перевищують прибуток від реалізації 1 т каустичної соди, а отже, виробництво такого виду продукції є нерентабельним.

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши значення додаткових змінних двоїстої задачі, які показують, наскільки вартість ресурсів на виробництво одиниці продукції перевищує прибуток від реалізації одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює 0, то продукція рентабельна, і навпаки, якщо $y_j \neq 0$, тоді відповідна продукція нерентабельна.

Для наведеного прикладу додаткові змінні двоїстої задачі набувають значення $y_4 = 0$; $y_5 = 3471{,}43$; $y_6 = 0$; $y_7 = 2728{,}57$. Так як $y_4 = 0$ і $y_6 = 0$, тоді перший та третій види продукції (чисті хімікати і скловолокно) є рентабельними, а змінні $y_5 = 3471{,}43$ та $y_7 = 2728{,}57$ вказують, що у разі виробництва одиниці другого виду продукції (гума) витрати на 3471,43 грн перевищують прибуток від її реалізації; а при виробництві одиниці продукції четвертого виду (каустична сода) витрати на 2728,57 грн перевищують прибуток від її реалізації, отже їх виробництво є нерентабельним.

4.5. Знаходження меж зміни обсягів дефіцитних ресурсів при сталій структурі виробництва. У п. 4.3 з'ясовано, що у разі зміни обсягів дефіцитних ресурсів значення цільової функції зростатиме за значення відповідної змінної двоїстої задачі. Наприклад, значення $\boldsymbol{y_2 = 72{,}86}$ вказує, що при збільшенні часу роботи обладнання на 1 год, за незмінних інших умов виробництва, прибуток зросте на 72,86 грн.

Після проведеного аналізу постає логічне запитання, чи зберігатиметься структура оптимального плану, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на 1, а, наприклад, на 10 ум. од.? Щоб однозначно відповісти на це, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки y_j залишаються на рівні оптимальних значень, а отже, структура оптимального плану початкової задачі залишається незмінною.

Під структурою оптимального плану розуміють співвідношення змінних в оптимальному плані, які набувають нульові значення, і тих, які набувають ненульові значення. Для наведеного прикладу оптимальний план початкової задачі матиме вигляд

$$X^*(x_1 = 34{,}29;\ x_2 = 0;\ x_3 = 49{,}14;\ x_4 = 0\ ).$$

Структура даного оптимального плану складається з двох ненульових значень змінних $x_1 = 34{,}29$; $x_3 = 49{,}14$ (що вказують, яку кількість продукції і якого виду необхідно виготовляти для максимального значення прибутку) та двох змінних, що набувають значення 0 (вказують, виготовлення яких видів продукції є недоцільним).

Отже, питання незмінної структури оптимального плану з економічної точки зору є дуже важливим. У визначенні оптимального плану виробництво буде орієнтоване на виготовлення саме тих видів продукції, що вказані в оптимальному плані, і зміни умов, які призводитимуть до зміни структури оптимального плану, означатимуть переорієнтацію виробництва з одних видів продукції на інші, що, зрозуміло, значно ускладнюватиме всі виробничі процеси. Тому визначення меж змін обсягів ресурсів та прибутку від одиниці продукції, для яких структура оптимального плану залишається незмінною (межі стійкості оптимального плану), вкаже всі ті можливі зміни, які незначним чином впливатимуть на виробництво і не призведуть до необхідності його помітних порушень.

Симплексний метод дозволяє визначити межі зміни правих частин обмежень і коефіцієнтів цільової функції, в межах яких структура оптимального плану залишається незмінною.

Важливо розуміти, що описані інтервали будуть стосуватися випадків, коли змінюється тільки одна з початкових умов задачі, а всі інші — фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох умов підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

Межі, в яких можуть змінюватись значення правих частин обмежень, знаходяться в «Отчет по устойчивости» у блоці «Ограничения» в трьох останніх стовпцях: «Ограничения правая часть» — містить початкові значення правих частин обмежень задачі; «Допустимое увеличение» — вказує на скільки може бути збільшене початкове значення правої частини обмеження; «Допустимое уменьшение» — вказує, наскільки може бути зменшене початкове значення правої частини обмеження.

Для наведеного прикладу обчислимо межі зміни обсягів ресурсів, для яких структура оптимального плану залишиться незмінною.

Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости

Рабочий лист: [Книга1.xlsx]Лист2
Отчет создан: 08.06.2012 21:57:46

Межі зміни коефіцієнтів цільової функції задачі при незмінній структурі оптимального плану

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
B2	Обсяг виробництва чистих хімікатів, т.	34,28571	0	4200	2550	2700
B3	Обсяг виробництва гуми, т.	0	-3471,42857	3600	3471,42857	1E+30
B4	Обсяг виробництва скловолокна, т.	49,142857	0	7500	13500	2585,106383
B5	Обсяг виробництва каустичної соди, т.	0	-2728,57143	2500	2728,57143	1E+30

Межі зміни правих частин обмежень задачі при незмінній структурі оптимального плану

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
B9	Витрати сировини на виробництво	216	0	250	1E+30	34
B10	Витрати часу роботи обладнання	2800	72,8571429	2800	1200	1911,11111
B11	Витрати електроенергії	8000	38,5714286	8000	1700	24[illegible]0

Початкове значення правої частини першого обмеження — 250, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо число 1Е+30 (даний формат представляє число 10^{+30}, таке число встановлюється у відповідність знаку ∞), тому верхня межа зміни першого ресурсу за незмінної структури оптимального плану буде $250 + \infty = \infty$. У відповідному рядку стовпця «Допустимое уменьшение» маємо число 34, тому нижня межа зміни першого ресурсу за незмінної структури оптимального плану буде $250 - 34 = 216$. У результаті маємо, якщо обсяг сировини буде змінюватись у межах від 216 т до нескінченності, то структура оптимального плану залишиться незмінною, тобто буде рентабельним лише виробництво чистих хімікатів і скловолокна. Якщо ж обсяги сировини вийдуть за обчислені межі, наприклад, початковий обсяг сировини буде складати 200 т, то неможливо стверджувати, що рентабельними для виробництва будуть чисті хімікати і скловолокно, може статись, що потрібно буде виготовляти зовсім інші види продукції, наприклад, гуму і каустичну соду.

Обчислимо межі зміни для другого та третього видів ресурсів.

Початкове значення правої частини другого обмеження — 2800, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо число 1200, тому верхня межа зміни другого ресурсу за незмінної структури оптимального плану буде $2800 + 1200 = 4000$. У відповідному рядку стовпця «Допустимое уменьшение» маємо число 1911,11, тому нижня межа зміни другого ресурсу за незмінної структури оптимального плану буде $2800 - 1911{,}11 = 888{,}89$. У результаті маємо, якщо час роботи обладнання буде змінюватись у межах від 888,89 до 4000 год, то структура оптимального плану залишиться незмінною.

Початкове значення правої частини третього обмеження — 8000, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо число 1700, тому верхня межа зміни третього ресурсу за незмінної структури оптимального плану буде $8000 + 1700 = 9700$. У відповідному рядку стовпця «Допустимое уменьшение» маємо число 2400, тому нижня межа зміни третього ресурсу за незмінної структури оптимального плану буде $8000 - 2400 = 5600$. У результаті маємо, якщо запас електроенергії буде змінюватись в межах від 5600 до 9700 кВт/год, то структура оптимального плану залишиться незмінною.

4.6. Знаходження меж зміни цін рентабельної продукції при сталій структурі виробництва. Для знаходження меж зміни цін рентабельної продукції при сталій структурі виробництва проводяться аналогічні попередньому пункту розрахунки та висновки.

Потрібна інформація розташована в «Отчет по устойчивости», в блоці «Изменяемые ячейки» в трьох останніх стовпцях: «Целевой коэффициент» — містить початкові значення коефіцієнтів цільової функції задачі; «Допустимое увеличение» — вказує, наскільки може бути збільшене початкове значення відповідного коефіцієнта; «Допустимое уменьшение» — вказує, наскільки може бути зменшене початкове значення відповідного коефіцієнта.

Для наведеного прикладу обчислимо межі зміни значень прибутку від реалізації одиниці продукції для яких структура оптимального плану залишиться незмінною.

Початкове коефіцієнту при змінній x_1 (тобто прибуток від реалізації 1 т чистих хімікатів) — 4200, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо число 2550, тому верхня межа зміни значення першого коефіцієнту за незмінної структури оптимального плану буде $4200{+}2500 = 6750$, у відповідному рядку стовпця «Допустимое уменьшение» маємо число 2700, тому нижня межа зміни першого коефіцієнта за незмінної структури оптимального плану буде $4200 - 2700 = 1500$. У результаті маємо, якщо прибуток від реалізації 1 т чистих хімікатів буде змінюватись у межах від 1500 до 6750 грн, тоді структура оптимального плану залишиться незмінною, тобто буде рентабельним лише виробництво чистих хімікатів і скловолокна. Якщо ж значення прибутку за 1 т хімікатів вийде за обчислені межі, наприклад, буде становити 1000 грн, то неможливо стверджувати, що рентабельними для виробництва будуть чисті хімікати і скловолокно, може статись, що потрібно буде виготовляти зовсім інші види продукції, наприклад, гуму і каустичну соду.

Обчислимо межі зміни коефіцієнтів цільової функції для другого, третього і четвертого видів продукції.

Початкове значення другого коефіцієнта цільової функції — 3600, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо 3471,43, тому верхня межа зміни другого коефіцієнта цільової функції за незмінної структури оптимального плану буде $3600 + 3471{,}43 = 7071{,}43$. У відповідному рядку стовпця «Допустимое уменьшение» маємо число 1Е+30 (даний формат представляє число 10^{+30}, таке число встановлюється у відповідність знаку ∞), тому нижня межа зміни другого ресурсу за незмінної структури оптимального плану буде $3600 - \infty = -\infty$. Оскільки в даному випадку розраховується значення економічного показника такого, як прибуток, то логічно прийняти за нижню межу значення 0. У результаті маємо, якщо прибуток від реалізації 1 т гуми буде змінюватись у межах від 0 до 7071,43 грн, то структура оптимального плану залишиться незмінною.

5. *Загальні висновки по роботі*.

Повне проведення аналізу оптимальних планів і визначення меж їх стійкості дає можливість надати рекомендації для кожного конкретного випадку щодо напрямів збільшення значення цільової функції за незмінної структури оптимального плану.

Для наведеного прикладу можна запропонувати такі зміни умов виробництва, які, за незмінної структури оптимального плану, збільшать значення цільової функції, тобто прибутку підприємства.

Важливо, що для проведеного аналізу розглядалися випадки зміни лише однієї з умов задачі, а всі інші залишалися незмінними, тому з наведених далі пропозицій можна обрати лише одну.

1. Якщо дозволяють умови, то потрібно збільшити запас одного виду ресурсу. Для вибору потрібного виду ресурсу використовується попередній аналіз оптимальних планів.

З п. 4.3 відомо, що другий і третій ресурси (час роботи обладнання та запаси електроенергії) є дефіцитними. Крім того, значення $y_2 = 72{,}86$ вказує, що у разі збільшення часу роботи обладнання на 1 год, за незмінних інших умов виробництва, прибуток зросте на 72,86 грн, а значення $y_3 = 38{,}57$ вказує, що у разі збільшення обсягу електроенергії на 1 кВт/год, за незмінних інших умов виробництва, прибуток зросте на 38,57 грн.

Оскільки змінити можливо обсяг лише одного виду ресурсу, визначимо, збільшення якого з видів ресурсів приведе до більшого зростання прибутку (цільової функції).

У п. 4.5 визначені межі зміни другого та третього ресурсів за незмінної структури оптимального плану. Маємо початкове значення часу роботи обладнання — 2800 год, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо число 1200, отже, можна збільшити даний ресурс на 1200 год. Обчислимо величину, на яку зросте значення прибутку при такій зміні ресурсу: $1200 \cdot 72{,}86 = 87432$ грн.

Аналогічні міркування для третього виду ресурсу дають такий результат: початкове значення запасу електроенергії — 8000 кВт/год, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо число 1700, отже, можна збільшити даний ресурс на 1700 кВт/год. Обчислимо величину, на яку зросте значення прибутку за такої зміни ресурсу: $1700 \cdot 38{,}57 = 65569$ грн.

Порівнюючи дві величини, доходимо висновку, що, коли дозволяють умови виробництва, потрібно збільшувати на 1200 год час роботи обладнання, що підвищить загальний прибуток на 87432 грн.

2. Якщо перша пропозиція не може бути реалізована, можна запропонувати збільшити ціну реалізації одного виду продукції.

Для вибору потрібного виду ресурсу використовується попередній аналіз оптимальних планів.

З п. 4.4 відомо, що рентабельними є перший і третій види продукції (рентабельно виробляти чисті хімікати і скловолокно) та оптимальні значення виробництва продукції для чистих хімікатів $x_1 = 34{,}29$ (т) і для скловолокна — $x_3 = 49{,}14$ т. Крім того, відомі межі зростання прибутку від реалізації 1 т вказаних видів продукції, при яких структура оптимального плану залишається постійною.

Оскільки змінити можна прибуток лише для одного виду продукції, визначимо, збільшення якого з коефіцієнтів цільової функції (прибутку від реалізації 1 т продукції) приведе до більшого зростання прибутку (загального значення цільової функції).

У п. 4.6 визначені потрібні межі зміни коефіцієнтів цільової функції при незмінній структурі оптимального плану, маємо початкове значення прибутку від реалізації 1 т чистих хімікатів (коефіцієнт цільової функції при змінній x_1 — 4200 грн, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо число 2550, отже, можна збільшити даний прибуток на 2550 грн. Обчислимо величину, на яку зросте загальне значення прибутку за такої зміни: $34{,}29 \cdot 2550 = 87439{,}5$ грн.

Аналогічні міркування для третього виду продукції дають такий результат: початкове значення прибутку від 1 т продукції — 7500 грн, у відповідному рядку стовпця «Допустимое увеличение» маємо число 13 500, отже, можна збільшити прибуток від реалізації 1 т скловолокна на 13 500 грн. Обчислимо величину, на яку зросте загальне значення прибутку за такої зміни: $49{,}14 \cdot 13500 = 663390$ грн.

Порівнюючи дві величини, доходимо висновку, що, коли дозволяють зовнішні умови (конкуренція тощо), потрібно збільшити на 13 500 грн прибуток від реалізації 1 т скловолокна, що збільшить загальний прибуток на 663 390 грн.

3. Якщо жодна з розглянутих вище пропозицій не може бути реалізована, можна запропонувати реалізувати залишки тих видів ресурсів, які не використовуються при оптимальному плані виробництва.

З п. 4.1 відомо, що значення залишків усіх видів ресурсів, що використовуються при оптимальному виробництві продукції, відповідають значенням додаткових змінних оптимального плану початкової задачі.

Для наведеного прикладу маємо лише залишки сировини, обсягом 34 т ($x_5 = 34$). Час роботи обладнання і наявний обсяг електроенергії використані повністю ($x_6 = 0$; $x_7 = 0$). Таким чином, можна реалізувати 34 т сировини, що також принесе додатковий прибуток.

З наведених трьох пропозиції можливо обрати лише одну, для збереження структури оптимального плану. Найбільше зростання загального значення прибутку дає збільшення прибутку від реалізації 1 т скловолокна. Однак цього можна досягти за умови значного підвищення ціни на даний вид продукції, що в умовах наявності конкуренції виробників неможливо. Тому в умовах даного виробництва більш реальною є рекомендація орієнтуватись на розширення виробництва за рахунок збільшення часу роботи обладнання на 1200 год, що збільшить загальний прибуток на 87432 грн.

Стислі висновки

Поняття двоїстості задач математичного програмування має велике значення не лише в теоретичному плані, а також широко використовується на практиці. Двоїстість у лінійному програмуванні була розроблена академіком Л. В. Канторовичем ще в 1939 р. У 1975 р. Канторович і американський математик Т. Купманс за відкриття двоїстості та її застосування в економічних дослідженнях здобули Нобелівську премію. Значні теоретичні дослідження у цій галузі мали В. В. Новожилов, В. С. Нємчинов, А. Л. Лур'є, В. С. Михалевич, Ю. М. Ермолєв та інші вчені.

Двоїсті задачі мають чітку геометричну та економічну інтерпретації. Теореми двоїстості широко використовуються в економічних дослідженнях. У 1970-х роках у Радянському Союзі велась дискусія з приводу використання двоїстих оцінок в економіці. Економісти того часу недооцінювали цю важливу економічну категорію. Проблема полягала ще й у тому, що ціни в Радянському Союзі не були обґрунтованими, не враховувались реальні витрати живої та уречевленої праці, попит і пропозиція на продукцію. Радянські економісти не розуміли, що недефіцитні ресурси мають нульову оцінку.

Для сучасного фахівця з економіки отримання оптимального плану задачі не може слугувати кінцевою метою. Більш важливим є аналіз отриманого розв'язку. Оскільки зовнішні (та внутрішні) умови для будь-якої економічної системи досить мінливі, то спеціаліста, який ставить задачу, як правило, цікавлять також і ті зміни оптимального плану, що пов'язані зі змінами у відповідних лінійних моделях коефіцієнтів, які містяться у векторах C, B, матриці A. Можливості розрахунку зміни обсягів ресурсів, цін одиниці продукції, коефіцієнтів технологічної матриці визначають, в яких рамках вплив зміни умов функціонування економічної системи призводитиме до несуттєвих змін оптимального плану, а коли такий план стає навіть недопустимим.

Крім того, за результатами аналізу лінійних моделей можна визначити напрями розвитку системи, що досліджується (вказати ресурси, збільшення обсягу яких призведе до покращання значення цільової функції, можливості граничної зміни ціни одиниці виготовленої продукції тощо), в рамках яких структура оптимального плану не зміниться.

Лінійне програмування забезпечує широкі можливості в аналізі моделей на чутливість і проведення параметричних досліджень.

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Дайте економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач.
2. Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним)?
3. Як визначити, що продукція є рентабельна (нерентабельна)?
4. Як впливає на оптимальний план введення додаткового обмеження?
5. Як впливає на оптимальний план введення нової змінної?
6. Як визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів?
7. Як визначити план виробництва продукції та зміну доходу підприємства, якщо збільшити (зменшити) обсяг ресурсів?
8. Як визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві?
9. Як розрахувати інтервали можливої зміни ціни на одиницю кожного виду продукції?
10. Як виробник має змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції?

У задачах виконати такі дії:

1) записати математичні моделі прямої та двоїстої задачі;
2) записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач, подати їх економічний аналіз;
3) визначити статус ресурсів, що використовуються для виробництва продукції, та рентабельність кожного виду продукції;
4) обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасів дефіцитних ресурсів;
5) розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

Задача 3.1. Підприємство виготовляє три види продукції A, B і C, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Підприємство виготовляє три види продукції A, B і C, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: A — 9 ум. од., B — 10 ум. од. і C — 16 ум. од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Остання симплекс-таблиці даної задачі має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	9	10	16	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
x_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
x_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
$Z_j - C_j \geq 0$		400	5	0	0	2/9	5/3	0

Задача 3.2. Підприємство виготовляє продукцію A, B і C, для чого використовує три види ресурсів 1, 2, 3. Норма витрат усіх ресурсів на одиницю кожної продукції та обсяги ресурсів на підприємстві наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	244

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: A — 10 ум. од., B — 14 ум. од. і C — 12 ум. од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план задачі, має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	10	14	12	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
x_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	–5/8
x_3	12	16	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4
$Z_j - C_j \geq 0$		1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Задача 3.3. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів A, B, C і D, для чого використовує три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів на підприємстві наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	1	280
2	1	—	1	1	80
3	1	5	1	—	250

Відома ціна одиниці продукції кожного виду продукції: A — 4 ум. од., B — 3 ум. од., C — 6 ум. од., D — 7 ум. од.

Визначити план виробництва продукції, який максимізує дохід підприємства.

Остання симплекс-таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	4	3	6	7	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	150	4/5	0	–1/5	0	1	–1	–1/5
x_4	7	80	1	0	1	1	0	1	0
x_2	3	50	1/5	1	1/5	0	0	0	1/5
$Z_j - C_j \geq 0$		710	18/5	0	8/5	0	0	7	3/5

Основні терміни та поняття

- Двоїста задача
- Двоїсті оцінки
- Дефіцитні (недефіцитні) ресурси
- Межі зміни приросту дефіцитних ресурсів
- Межі зміни приросту цін на рентабельну (нерентабельну) продукцію
- Пара взаємоспряжених задач
- Пряма задача
- Рентабельна продукція
- Стійкість двоїстих оцінок
- Теореми двоїстості

Розділ 4

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:

- ✓ особливості економічної та математичної постановки транспортної задачі;
- ✓ поняття опорного плану транспортної задачі та його властивості;
- ✓ методи побудови опорного плану транспортної задачі, звільнення від виродження;
- ✓ методи розв'язування одно етапних та двоетапних транспортних задач;
- ✓ методи розв'язування транспортної задачі на мережі;

а також УМІТИ:

- побудувати математичну модель транспортної задачі;
- будувати опорні плани задачі та звільнятися, при необхідності, від його виродження;
- розв'язувати транспортну задачу за певними алгоритмами та на ПК;
- розв'язувати транспортну задачу на мережі;
- розв'язувати транспортну задачу за критерієм часу.

4.1. Економічна і математична постановка транспортної задачі

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нераціональним за рахунок великих розмірностей задач. Специфічна структура транспортної задачі дозволяє вводити альтернативний метод через пошук оптимального плану у вигляді простішої порівняно з симплексним методом обчислювальної процедури, хоча в її основі залишаються основні елементи симплексного методу та очевидною є чітка аналогія з алгоритмом його реалізації.

Транспортна задача належить до класу розподільчих задач лінійного програмування. Економічна постановка таких задач може стосуватись різноманітних проблем, що в більшості випадків не пов'язано з задачею перевезення вантажів, наприклад, задачі розміщення виробництва, задачі оптимального призначення тощо. Деякі з таких задач розглянемо в даному розділі.

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється таким чином.

Деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в кількості $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць. Відповідно треба перевезти n споживачам B_j у кількості $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i-го постачальника до кожного B_j-го споживача, що подані матрицею вигляду

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{n1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Необхідно скласти план перевезень, за яким уся продукція буде вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість усіх перевезень буде мінімальною.

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається через його вартість і така задача має назву *транспортної задачі за критерієм вартості.*

Запишемо математичну модель транспортної задачі за критерієм часу.

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$. Тоді умови задачі зручно подати у вигляді таблиці (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Споживачі / Постачальники		B_1	B_2	...	B_n
		b_1	b_2	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}

Необхідно задовольнити такі умови:

1) сумарна кількість продукції, що вивозиться з кожного *i*-го пункту, має дорівнювати запасам продукції у даному пункті:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m \end{cases};$$

2) сумарна кількість продукції, що ввезена кожному *j*-му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n \end{cases};$$

3) сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$\begin{aligned} \min F = {} & c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+ \\ & +c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+ \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn} \end{aligned};$$

Очевидно, $x_{ij} \ge 0, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$.

Скорочений запис математичної моделі транспортної задачі за критерієм часу матиме такий вигляд:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \tag{4.1}$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right); \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right); \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}\right). \tag{4.4}$$

У розглянутій задачі виконується умова, що загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{4.5}$$

Транспорту задачу називають *збалансованою*, або *закритою*, якщо виконується (4.5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають *незбалансованою*, або *відкритою*.

Домовимося, що планом транспортної задачі називати будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (4.2)—(4.4), який позначають матрицею $X = (x_{ij})\ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$. Значення x_{ij} — кількість одиниць продукції, перевезених від A_i постачальника до B_j споживача, називатимемо перевезеннями.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = (x_{ij}^*)\ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (4.1) набуває найменшого значення.

Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі). Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі (4.1)—(4.4) є її збалансованість: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

***Доведення*. *Необхідність*.** Нехай задача (4.1)—(4.4) має розв'язок $X^*(x_{11}^*, x_{12}^*, ..., x_{mn}^*)$, тоді для нього виконуються (4.2) і (4.3). Просумуємо ліві та праві частини (4.2), (4.3) і матимемо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} a_i \,, \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{4.7}$$

Оскільки праві частини рівнянь (4.6) і (4.7) збігаються, то збігатимуться також і ліві, отже, виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{4.8}$$

***Достатність*.** Потрібно показати, що при заданій умові (4.8) існує хоча б один план задачі і цільова функція на множині планів обмежена.

Нехай $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ = W > 0. Розглянемо величини $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{W}$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$. Підставимо значення x_{ij} у систему обмежень задачі (4.1) — (4.4) і матимемо

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{W} = \frac{a_i}{W}\sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{W} W = a_i \,,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{W} = \frac{b_j}{W}\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{W} W = b_j \,.$$

Умови (4.2) і (4.3) виконуються, отже, $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{W}$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ є планом наведеної транспортної задачі.

Виберемо з елементів $c_{ij}, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ найбільше значення і позначимо його $\overline{c} = \max c_{ij}$. Якщо замінити у цільовій функції (4.1) всі коефіцієнти на $\overline{c}$, то, враховуючи (4.2), матимемо:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \le \overline{c}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \overline{c}\sum_{i=1}^{m} a_i = \overline{c}W \,.$$

Виберемо з елементів $c_{ij}, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ найменше значення і позначимо його $\underline{c} = \min c_{ij}$. Якщо замінити у цільовій функції (4.1) всі коефіцієнти на $\underline{c}$, то, враховуючи (4.2), матимемо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ge \underline{c}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \underline{c}\sum_{i=1}^{m} a_i = \underline{c}W \,.$$

Іншими словами, цільова функція на множині допустимих планів транспортної задачі є обмеженою

$$\underline{c}W \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \le \bar{c}W .$$

Теорему доведено.

Якщо під час перевірки збалансованості (4.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із ресурсами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{m+1}(або фіктивного споживача B_{n+1}) позначається однією величиною для кожного з споживачів (виробників) і має бути або набагато більшою за реальні витрати, або дорівнювати нулю. Як правило, використовують нульові значення вартостей перевезень, що дозволяє спростити подальші обчислення.

Як уже згадувалось, транспортна задача (4.1)—(4.4) є звичайною задачею лінійного програмування і може бути розв'язана симплексним методом. Однак особливості побудови математичної моделі транспортної задачі дозволяють розв'язати її простішим способом. Нескладно помітити, що всі коефіцієнти при змінних у рівняннях (4.2) і (4.3) дорівнюють одиниці, а сама система обмежень (4.2) і (4.3) є системою рівнянь, тобто задана в канонічній формі. Крім того, система обмежень (4.2) і (4.3) складається з mn невідомих і $m + n$ рівнянь, які пов'язані між собою співвідношенням (4.8). Якщо скласти окремо рівняння (4.2) і (4.3) дістанемо два однакові рівняння:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Наявність у системі обмежень двох однакових рівнянь говорить про її лінійну залежність. Якщо одне з цих рівнянь відкинути, то в загальному випадку система обмежень буде містити $m + n - 1$ лінійно незалежне рівняння, отже, можна розв'язати їх стосовно $m + n - 1$ базисних змінних, якщо виразити їх через інші вільні. Назвемо *опорним планом транспортної задачі* такий допустимий її план, що містить не більш як $m + n - 1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю.

4.2. Властивості опорних планів транспортної задачі

Якщо умови транспортної задачі та її опорний план записані у вигляді табл. 4.1, то клітини, в яких $x_{ij} > 0$ (значення поставок ненульові), називаються заповненими, всі інші — пустими. Заповнені клітини відповідають базисним змінним і для невиродженого плану їх кількість дорівнює $m + n - 1$.

Назвемо циклом таку послідовність заповнених клітин табл. 4.1, яка задовольняє умову, що лише дві сусідні клітини містяться або в одному рядку, або в одному стовпці таблиці, причому перша клітина циклу є і його останньою клітиною. Якщо для певного набору заповнених клітин неможливо побудувати цикл, така послідовність клітин є ациклічною.

Лема. Число клітин, які утворюють всякий цикл транспортної задачі, завжди парне.

Доведення. Якщо позначити кожну клітину циклу двома індексами (i, j), то довільний цикл, що складається з n клітин, можна записати одним із двох способів:

або $$(i_1, j_1);(i_2, j_1);(i_2, j_2);...;(i_l, j_l);(i_1, j_l);(i_1, j_1), \tag{4.1}$$

або

$$(i_1, j_1);(i_1, j_2);(i_2, j_2);...;(i_l, j_l);(i_l, j_1);(i_1, j_1). \tag{4.2}$$

Оскільки перша та остання клітини циклу є однією клітиною, виключаємо її з наведених послідовностей. Число клітин, що залишилось, — парне, бо кожній клітині виду (i_k, j_k) у (4.1) і (4.2) відповідає така (i_p, j_k) або $(i_k, j_p)(p \neq k)$. Саме такими клітинами закінчуються наведені послідовності. Передостанньою клітиною є також клітина виду (i_k, j_k), де $k = l$. Отже, цикл утворюється клітинами, які містяться в l рядках і l стовпцях, тобто загальна їх кількість $n = 2l$. Лему доведено.

Теорема 4.1. Для того щоб деякий план транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо його ациклічність.

Доведення. Необхідність. Нехай у табл. 4.1 міститься опорний план транспортної задачі, тобто не більше як $m + n - 1$ будуть заповненими. Якщо заповнених клітин менше як $m + n - 1$, то решта базисних клітин потрапить до незаповнених.

Довести необхідність умови теореми означає довести ациклічність опорного плану.

Вектори, що відповідають базисним клітинам, тобто базисним змінним, є лінійно незалежними і потрібно довести ациклічність набору клітин, що відповідає будь-якій системі лінійно незалежних векторів.

Припустимо протилежне. Нехай деяка підсистема з системи базисних векторів утворює цикл, а саме:

$$(i_1, j_1);(i_1, j_2);(i_2, j_2);...;(i_k, j_k);(i_k, j_1). \tag{4.3}$$

Складемо лінійну комбінацію таких векторів, що дорівнює нулю. Оскільки кожна змінна входить у систему обмежень лише двічі, то базисні вектори матимуть вигляд

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftrightarrow \quad i \\ \\ \\ \\ \leftrightarrow m+j \\ \\ \\ \\ \end{array},$$

лінійна комбінація базисних векторів буде

$$1\times \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftrightarrow \quad i_1 \\ \\ \\ \\ \leftrightarrow m+j_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} -1\times \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftrightarrow \quad i_1 \\ \\ \\ \\ \leftrightarrow m+j_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} +\ldots -1\times \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftrightarrow \quad i_k \\ \\ \\ \\ \leftrightarrow m+j_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

або $$1\cdot a_{i_1 j_1} - 1\cdot a_{i_1 j_2} + 1\cdot a_{i_2 j_2} - \ldots - 1\cdot a_{i_k j_1} = 0 . \qquad (4.4)$$

Проте рівність (4.4) суперечить умові лінійної незалежності векторів, отже, послідовність (4.3) є ациклічною.

Достатність. Нехай деякий план транспортної задачі є ациклічним. Потрібно показати, що він є опорним планом, тобто довести лінійну незалежність векторів, що відповідають ненульовим компонентам плану.

Всякий план не може містити від'ємних компонент, а число лінійно незалежних між собою векторів в обмеженнях транспортної задачі завжди дорівнює $m + n - 1$, так що число відмінних від нуля компонент плану, якщо він опорний, не перевищує цієї величини.

Позначимо множину всіх заповнених клітин H, а відповідні вектори — a_{ij}^*. Доведемо достатність від супротивного. Нехай вектори a_{ij}^* лінійно залежні. Розглянемо нульову лінійну комбінацію векторів:

$$\sum_{(i,j)\in H} \lambda_{ij} a_{ij}^* = 0 , \qquad (4.5)$$

причому деякі з коефіцієнтів λ_{ij} відрізняються від нуля. Нехай один із таких коефіцієнтів відповідає індексам i_1, j_1, тобто $\lambda_{i_1 j_1} \neq 0$. Тоді відповідний доданок у рівності (4.5) можна перенести в ліву частину рівняння:

$$-\lambda_{i_1 j_1} a_{i_1 j_1}^* = \sum_{(i,j)\in H_1} \lambda_{ij} a_{ij}^* , \qquad (4.6)$$

де $H_1 = H - (i_1, j_1)$.

Оскільки i_1-й компонент у лівій частині (4.6) відмінний від нуля, то в правій частині також має бути хоча б один доданок з *i*-м компонентом, що відмінний від нуля, припустимо $\lambda_{i_1 j_2} \neq 0$. Відповідний доданок також можна перенести в ліву частину (4.6):

$$-\lambda_{i_1 j_1} a_{i_1 j_1}^* - \lambda_{i_1 j_2} a_{i_1 j_2}^* = \sum_{(i,j)\in H_2} \lambda_{ij} a_{ij}^* , \qquad (4.7)$$

де $H_2 = H_1 - (i_1, j_2)$.

Оскільки $j_2 \neq j_1$ (інакше клітина (i_1, j_1) входила б в суму (4.5) двічі), і компонент $m + j_2$ лівої частини (4.7) відмінний від нуля, то серед доданків правої частини знайдеться хоча б один, для якого $\lambda_{i_2 j_2} \neq 0$. Перенесемо його також у ліву частину рівняння:

$$-\lambda_{i_1 j_1} a_{i_1 j_1}^* - \lambda_{i_1 j_2} a_{i_1 j_2}^* - \lambda_{i_2 j_2} a_{i_2 j_2}^* = \sum_{(i,j)\in H_3} \lambda_{ij} a_{ij}^* , \qquad (4.8)$$

$H_3 = H_2 - (i_2, j_2)$.

Оскільки число заповнених клітин, що входять у множину H, а отже, і кількість векторів a_{ij}^*, скінченне і не перевищує $m \times n \geq N$, то через N кроків описаний процес перенесень обов'язково скінчиться.

Після деякого непарного числа кроків $2k - 1$ дістанемо рівність

$$-\sum_{p=1}^{k} \lambda_{i_p j_p} a_{i_p j_p}^* - \sum_{p=1}^{k-1} \lambda_{i_p j_{p+1}} a_{i_p j_{p+1}}^* = \sum_{(i,j)\in H_{2k-1}} \lambda_{ij} a_{ij}^* , \qquad (4.9)$$

$H_{2k-1} = H_{2k-2} - (i_k, j_k)$.

Якщо число кроків було непарне, матимемо

$$-\sum_{p=1}^{k} \lambda_{i_p j_p} a_{i_p j_p}^* - \sum_{p=1}^{k-1} \lambda_{i_p j_{p+1}} a_{i_p j_{p+1}}^* = \sum_{(i,j)\in H_{2k}} \lambda_{ij} a_{ij}^* , \qquad (4.10)$$

$H_{2k} = H_{2k-1} - (i_k, j_k)$.

Розглянемо (4.9). За деякого значення $k\left(2 \le k \le \frac{N}{2}\right)$ серед доданків другої суми лівої частини знайдеться такий, що має індекс $i_w = i_k, 1 \le w \le k-1$. Тоді всі клітини, що були перенесені в ліву частину, після $(2w-1)$ -го кроку утворюють цикл.

Аналогічні міркування стосуються також (4.10).

Покажемо, що до закінчення процесу виходячи з рівності (4.9) обов'язково матимемо цикл. Для цього припустимо, що $i_k \ne i_w$. Тоді згідно з попередніми міркуваннями у правій частині (4.9) обов'язково знайдеться доданок з індексами $\left(i_k, j_{k+1}\right)$, для якого $\lambda_{i_k j_{k+1}} \ne 0$, бо інакше б рівність (4.9) не виконувалась. Отже, процес перенесення у випадку, коли $i_k \ne i_w$, буде продовжуватись. Проте внаслідок згаданої скінченності процесу, умова виконання рівностей (4.9), (4.10) рівносильна тому, що випадок $i_k = i_w$ обов'язково матиме місце, що означає побудову циклу.

Отже, з припущення лінійної залежності векторів $a_{ij}^*, (i, j) \in H$, що описується рівнянням (4.5), означає, що серед відповідних клітин існує цикл, що суперечить умові теореми. Таким чином, достатність згаданої умови, а разом і всю теорему доведено.

Отже, базисні клітини опорного плану завжди утворюють ациклічну послідовність клітин.

Теорема 4.2 (Наслідок теореми 4.1) Будь-яка сукупність і з $(m+n)$ клітин матриці транспортної задачі утворює цикл.

Доведення. Як зазначалось, сукупність лінійно незалежних векторів задачі не перевищує $m+n-1$, отже, всяка сукупність з $m+n$ векторів буде лінійно залежною. Як випливає з доведення попередньої теореми, відповідні клітини завжди утворюють цикл.

Отже, сукупність усіх базисних клітин і одна вільна клітина таблиці транспортної задачі завжди утворюватимуть цикл.

Теорема 4.3. Якщо всі запаси $a_i, (i = \overline{1, m})$ і всі потреби $b_j, (j = \overline{1, n})$ є невід'ємними числами, то будь-який опорний план складається із значень, що є цілими числами.

Доведення. Компоненти кожної система із $m+n-1$ лінійно незалежних (базисних) векторів можуть бути подані у вигляді трикутної матриці. Нехай розглядається задача (4.1)—(4.4). Матриця з перших $m+n-1$ компонент базисних векторів системи (4.2), (4.3) матиме вигляд розв'язування системи, що визначається (4.11), включатиме лише дії додавання та віднімання, і оскільки $a_i, (i = \overline{1, m})$, $b_j, (j = \overline{1, n})$ у постановці транспортної задачі є цілими числами, то значення змінних також будуть цілими числами.

$$\begin{array}{cccc|cccc|c}
A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n-1} & A_0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n-1} \\
\multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-1}} &
\end{array} \tag{4.11}$$

4.3. Методи побудови опорного плану транспортної задачі

Як і в звичайному симплексному методі, розв'язування транспортної задачі полягає у цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Перший опорний план транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування, можна побудувати методом, який було розглянуто у розділі 2, що призведе до необхідності надто складних розрахунків. Виходячи зі згаданих вище особливостей будови математичної моделі транспортної задачі, існують кілька простих методів побудови опорного плану. Розглянемо методи північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги і метод апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядками, а споживачі — стовпчикам.

Нехай умови транспортної задачі подані в табл. 4.2.

Ідея *методу північно-західного кута* полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 і b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці, у такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Розглянемо цей процес детальніше на прикладі.

Побудову першого опорного плану за методом північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці. Не беручи до уваги вартість перевезень, завжди починають задовольняють потреби першого споживача B_1, використовуючи запаси першого постачальника A_1. Для нашого випадку потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 100$, а запаси постачальника $a_1 = 150$ (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку A_1B_1 записуємо менше із значень a_1, b_1. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені і переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2. Обсяг потреб другого споживача становитиме $b_2 = 50$; після задоволення потреб першого споживача лишки запасів першого постачальника будуть 150 – 110 = 40. Отже, від першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 40 од. продукції, тому в клітинку A_1B_2 ставимо число 40. Після чого, очевидно, запаси першого постачальника будуть повністю вичерпаними, і для продовження процесу переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2. Запаси другого постачальника $a_2 = 60$, а незадоволені потреби другого споживача 50 – 40 = 10, і тому в клітинку A_2B_2 записується число 10 і другий споживач також повністю отримав необхідну кількість продукції. Знову переходимо до задоволення потреб наступного споживача B_3. У результаті використання запасів другого постачальника лишки продукції становлять 60 – 10 = 50, отже, від другого виробника до третього споживача можна перевезти 50 од. продукції. Клітинка A_2B_3 міститиме вказане значення 50 і на цьому запаси постачальника A_2 повністю вичерпані. Переходимо до розподілу запасів останнього (третього) постачальника A_3. Залишились незадоволеними потреби третього споживача в обсязі 60 – 50 = 10, для їх задоволення скористаємося потрібним значенням із запасів A_3. У клітинку A_3B_3 ставимо значення 10 і потреби споживача B_3 є повністю задоволеними. Переходимо до останнього споживача B_4 з потребами $b_4 = 80$, які повністю задовольняє лишок запасів останнього, третього, постачальника 90 – 10 = 80.

Таблиця 4.2

	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Таким чином, у табл. 4.2 у заповнених клітинках розміщені числа, що визначають можливий план перевезень продукції. Сума чисел по рядках дорівнює запасам постачальників, а сума чисел по стовпцях — потребам споживачів.

Аналогічний результат матимемо, якщо почати з правого нижнього кута таблиці, рухаючись до лівого верхнього. Процедуру методу можна застосовувати також, починаючи розподіл поставок з лівого нижнього кута, рухаючись до правого верхнього по діагоналі.

Метод північно-західного кута — найпростіший, однак і найменш ефективним. Пошук оптимального плану початковий — опорний, для якого знайдено методом північно-західного кута пов’язаний зі значним обсягом обчислювальних робіт, і тому розглянутий метод застосовується, як правило, для реалізації на ЕОМ.

Знайдемо загальну вартість перевезень за складеним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 од. продукції за ціною 4 ум. од. (ціна показана в правому верхньому куті кожної клітини), отже, буде витрачено $110 \cdot 4 = 440$ ум. од. Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 од. продукції до другого споживача за ціною 4 ум. од. і т. д. Отже, загальна сума всіх поставок буде такою:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880 \text{ ум. од.}$$

Теорема 4.4. Опорний план транспортної задачі, знайдений методом північно-західного кута, завжди ациклічний.

Доведення. Скористаємося методом індукції по числу $p=m+n$. Для $p=2$ теорема очевидна: план $x_{11}=a_1=b_1$ ациклічний, оскільки складається з $m+n-1=1$ елементу. Так само ациклічним є план для p=3, оскільки він складається лише з двох клітин.

Нехай теорема справедлива для деякого довільного $p=m+n\geq 3$. Доведемо її справедливість для числа $p'=p+1=m+n+1=m'+n'$.

Покладемо для визначеності, що в транспортній задачі (4.1)—(4.4) $a_1<b_1$, тобто перший крок методу північно-західного кута дасть $x_{11}=\min(a_1,b_1)=a_1$, всі інші $x_{12}=x_{13}=...=x_{1n}=0$. Подальші кроки методу пов'язані з його застосуванням до таблиці розмірності $m\times n$, де $m=m'-1$, а $n=n'$, причому всі запаси і потреби нової таблиці збігаються з запасами і потребами попередньої, крім $b_1'=b_1-x_{11}=b_1-a_1$. За припущенням індукції план, знайдений методом північно-західного кута для $p=m+n$, тобто в новій таблиці ациклічний. Очевидно, приєднання до цього плану рядка з єдиним ненульовим елементом не утворить циклу, але знайдений план буде планом початкової задачі для p', чим і доводиться теорема.

Наведені властивості опорних планів стосуються і планів, що отримані розглянутими далі способами, які є в певній мірі модифікаціями методу північно-західного кута.

Очевидно, якщо при побудові опорного плану враховувати вартості перевезень сумарна вартість усіх поставок може бути зменшена й одержаний опорний план буде ближчим до оптимального.

Ідея *методу мінімальної вартості* полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками і споживачами.

Складемо за допомогою даного методу план розглянутої задачі (табл. 4.2). Найменшу вартість мають перевезення, які здійснюються від A_2 до B_3 і від A_3 до B_2 (ціна перевезення одиниці продукції — 1 ум. од.). Заповнюємо будь-яку з них, наприклад, A_2B_3. Оскільки постачальник має 60 од. продукції, а споживач потребує саме такої її кількості, у клітину A_2B_3 ставимо значення 60 і запаси першого постачальника є повністю вичерпаними, а потреби споживача повністю задоволені. Також мінімальною є вартість перевезень від третього постачальника до другого споживача, тому заповнимо також клітину A_3B_2.

З клітинок таблиці, що залишились незаповненими, обираємо таке мінімальне значення вартості, яке дорівнює 2 ум. од. — для клітин A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 і A_3B_1. Заповнення клітин A_2B_4 неможливе, оскільки постачальник A_2 повністю вичерпав власний обсяг запасів, задовольняючи потреби споживача B_3, а для клітини A_1B_3 споживач B_3 повністю задовольнив потреби, отже, можна заповнити клітину A_3B_1 чи A_3B_4. Заповнимо A_3B_1. Обсяг запасів a_3 = 90, причому 50 од. продукції надано другому споживачеві, отже, маємо залишок 90 – 50 = 40, потреби b_1 = 110, тому від третього виробника до першого споживача перевозимо 40 од. продукції. Тепер для A_3B_4 неможливо записати значення поставки, оскільки запаси третього постачальника вже повністю вичерпані.

Знову обираємо найменшу вартість для клітин таблиці, що залишились пустими, і продовжуємо доти, доки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

	b_1 = 110	b_2= 50	b_3= 60	b_4 = 80
a_1 = 150	4 70	4	2	5 80
a_2 = 60	5	3	1 60	2
a_3 = 90	2 40	1 50	4	2

У результаті матимемо початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становитиме

$$F=70\cdot 4+80\cdot 5+60\cdot 1+50\cdot 1+40\cdot 2=870 \text{ ум. од.}$$

Значення цільової функції є меншим за попередній варіант, а значить, план буде ближчим до оптимального.

Метод подвійної переваги. Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється, у такому випадку спростити пошук клітин із найменшими вартостями можливо, використовуючи метод подвійної переваги.

Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Таблиця 4.3

	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 110	4	V2	5 40
$a_2 = 60$	5	3	VV1 60	V2
$a_3 = 90$	V2	VV1 50	4	V2 40

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 830 \text{ ум. од.}$$

Застосування для побудови опорного плану даного методу дає найменше із розглянутих вище значення цільової функції, отже, такий план найближчий до оптимального.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями у кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу й у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Даний метод побудови опорного плану враховує не лише маршрути з мінімальними витратами перевезень продукції, а також і співвідношення витрат у рядку чи стовпчику, тобто розраховується, на скільки збільшиться вартість поставки на наступних кроках процедури, якщо не здійснити на поточному кроці поставку в клітину з мінімальною вартістю.

Метод апроксимації Фогеля для задач великих розмірностей дає найкращий опорний план.

Таблиця 4.4

	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	Різниці по рядках		
$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5	2	2	0
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2	1	2	
$a_3 = 90$	2	1 10	4	2 80	1	1	1
Різниці *по* стовпцях	2	2	1	3			
	2	2	1				
	2	3					

У табл. 4.4 навпроти кожного рядка і стовпчика записані величини, які знайдені як різниці між мінімальним значенням вартості і наступним за ним по рівню. Максимальне значення такої різниці відповідає четвертому стовпчці й означає, що у випадку, коли не буде одразу задоволено потреби четвертого споживача від третього постачальника ціною 2 ум. од. за одиницю продукції, то на наступних кроках найменше значення вартості може бути вже 5 ум. од. і вартість перевезень для четвертого споживача збільшиться в 2,5 разу, тоді як для всіх інших споживачів і постачальників такі співвідношення є меншими. Отже, доцільніше на першому кроці заповнити клітину A_3B_4. Після чого потреби B_4 є повністю задоволені й всі клітини четвертого стовпці виключається з наступного розрахунку різниць по рядках і стовпцях.

Розраховані різниці для більшості рядків і стовпчиків дали значення 2, тому можна заповнювати будь-яку клітину з мінімальною вартістю, наприклад A_2B_3. Після чого з розгляду виключаються одразу всі клітини другого рядка та третього стовпця, оскільки потреби третього споживача повністю задоволені, а запаси другого постачальника вичерпані.

Останній розрахунок різниць (найбільше значення 3 відповідає другому стовпчику) вказує на доцільність введення поставки від третього постачальника до другого споживача. Інші клітини заповнені методом мінімальної вартості.

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 80 \cdot 2 = 830 \text{ ум. од.}$$

Результат збігається зі значенням цільової функції для опорного плану, що розрахований попереднім методом. Ефективність методу апроксимації Фогеля, як уже згадувалось, є очевидною для задач більшої розмірності.

Зазначимо, що раціональність наведених методів можна оцінювати лише в середньому. Оскільки можлива ситуація, що методом мінімального елементу буде отримано опорний план транспортної задачі, кращий за метод подвійної переваги.

4.4. Випадок виродження опорного плану транспортної задачі

Опорний план транспортної задачі, як зазначалось раніше, має містити не більше як $(m + n - 1)$ компонент, відмінних від нуля, якщо їх кількість рівно $(m + n - 1)$, то такий опорний план має назву невиродженого, якщо ж кількість додатних компонент менше як $(m + n - 1)$, опорний план є виродженим. Випадок виродженості плану може виникати не лише при побудові опорного плану, але й при його перетвореннях у процесі пошуку оптимального плану.

Найчастіше, щоб позбутись виродженості опорного плану, в деякі клітини таблиці транспортної задачі в необхідній кількості вводять нульові поставки. Обсяги продукції постачальників і споживачів при цьому не змінюються, однак клітини зі значенням 0 вважаються заповненими.

Головною умовою при введенні нульової поставки є збереження необхідної і достатньої умови опірності плану транспортної задачі — ациклічність. Клітина має обиратись у такий спосіб, щоб неможливо було побудувати замкнений цикл.

Умови транспортної задачі та початковий опорний план подано в табл. 4.5.

Таблиця 4.5

b_j / a_i	$b_1 = 7$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$
$a_1 = 8$	0 7	5 1	2
$a_2 = 7$	2	3 7	4
$a_3 = 6$	1	2	0 6
$a_4 = 2$	0	0 2	0

Перевіримо, чи є отриманий опорний план виродженим (невиродженим). Кількість постачальників $m = 4$, кількість споживачів $n = 3$. Отже, для невиродженого опорного плану кількість заповнених клітин табл. 4.5 має дорівнювати $m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$, тоді як для наведеного опорного плану кількість заповнених клітин на одну менше (п’ять). Позбудемося виродженості опорного плану введенням нульової поставки в одну з пустих клітин. Ураховуючи необхідність збереження ациклічності опорного плану, неможливо заповнювати клітини A_2B_1 і A_4B_1, оскільки це приведе до побудови циклів.

b_j / a_i	$b_1 = 7$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$
$a_1 = 8$	0 7	5 1	2
$a_2 = 7$	2 0	3 7	4
$a_3 = 6$	1	2	0 6
$a_4 = 2$	0	0 2	0

b_j / a_i	$b_1 = 7$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$
$a_1 = 8$	0 7	5 1	2
$a_2 = 7$	2	3 7	4
$a_3 = 6$	1	2	0 6
$a_4 = 2$	0 0	0 2	0

Очевидно, введення нульової поставки в будь-яку іншу пусту клітинку не дає змоги утворення циклів, отже, можливо заповнити нулем одну з клітин A_1B_3, A_2B_3, A_3B_1, A_3B_2, A_4B_3, наприклад, A_3B_2.

a_i \ b_j	$b_1 = 7$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$
$a_1 = 8$	0 7	5 1	2
$a_2 = 7$	2	3 7	4
$a_3 = 6$	1	2 0	0 6
$a_4 = 2$	0	0 2	0

Зазначимо, що здійснення введення нульової поставки є очевиднішим на наступних етапах розв'язування транспортної задачі.

4.5. Методи розв'язування транспортної задачі

4.5.1. Задача двоїста до транспортної. Один зі способів розв'язування транспортної задачі ґрунтується на розгляді двоїстої задачі.

Розглянемо транспортну задачу (4.1)—(4.4).

Позначимо змінні двоїстої задачі, які відповідають рівнянням (4.12) через $u_i (i = \overline{1,m})$, а для рівнянь (4.13) — через $v_j (j = \overline{1,n})$. Оскільки всі обмеження транспортної задачі є рівняннями, пара спряжених задач є несиметричною і жодних обмежень на знак змінних двоїстої задачі $u_i (i = \overline{1,m})$ і $v_j (j = \overline{1,n})$ не накладається.

Для побудови двоїстої задачі поставимо у відповідність до обмежень початкової задачі змінні двоїстої:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1, & \quad u_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = a_2, & \quad u_2 \\ .... & \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = a_m & \quad u_m \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b_1, & \quad v_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2, & \quad v_2 \\ .... & \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = b_n & \quad v_n \end{cases} \tag{4.13}$$

$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$.

За загальними правилами побудови двоїстих задач, матимемо

$$\max Z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \tag{4.14}$$

за умов

$$u_i + v_j \le c_{ij} \tag{4.15}$$

$i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n$.

Змінні двоїстої до транспортної задачі (4.14), (4.15) мають назву потенціалів.

4.5.2. Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі. Сформулюємо другу теорему двоїстості для задач (4.1)—(4.4) і (4.14)—(4.15).

Для того щоб плани відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$1)\ x_{ij}^* \left(u_i^* + v_j^* - c_{ij}\right) = 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}, \tag{4.16}$$

$$2)\ \begin{cases} u_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* - a_i\right) = 0, i = \overline{1,m} \\ v_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* - b_j\right) = 0, j = \overline{1,n} \end{cases} \quad (4.17)$$

Зауважимо, що друга група умов для транспортної задачі виконується автоматично, оскільки всі обмеження задачі є рівняннями.

Перша умова виконується у двох випадках:

— якщо $x_{ij}^* = 0$, тоді $\left(u_i^* + v_j^* - c_{ij}\right) \neq 0$, точніше за умовою (4.15) $u_i + v_j \leq c_{ij}$, ($i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n$);

— якщо $x_{ij}^* \neq 0$, тобто за умовою транспортної задачі $x_{ij}^* > 0$, тоді $\left(u_i^* + v_j^* - c_{ij}\right) = 0 \Rightarrow u_i^* + v_j^* = c_{ij}$, ($i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n$).

Необхідність і достатність виконання таких умов для оптимальності планів прямої та двоїстої задач було доведено в розділі 3. Отже, як наслідок другої теореми двоїстості для транспортної задачі одержали необхідні та достатні умови оптимальності плану.

Теорема (**умова оптимальності опорного плану транспортної задачі**). Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}*)$ існують числа u_i і v_j, для яких виконуються такі умови:

1) $u_i + v_j = c_{ij}$, $x_{ij} > 0$,

2) $u_i + v_j \leq c_{ij}$, $x_{ij} = 0$,

для всіх $i = \overline{1,m}$ і $j = \overline{1,n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Використовуючи наведені умови існування розв’язку транспортної задачі, методи побудови опорних планів та умову оптимальності опорного плану транспортної задачі, сформулюємо алгоритм методу потенціалів, який повторює кроки алгоритму симплексного методу.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита) за необхідності зведення задачі до закритого типу.

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним із відомих методів.

3. Перевірка виродженості (невиродженості) опорного плану за необхідності введення нульових поставок.

4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4.1. Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких $m + n - 1$, а кількість невідомих $m + n$. Рівнянь на одне менше, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховуються однозначно.

4.2. Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним і від нього слід перейти до нового опорного плану.

4.3. Вибір змінної для введення у базис на наступному кроці. Загальний метод переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка покращить значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\max\left\{\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - c_{ij}\right\}$.

4.4. Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану. Вибрана порожня клітина разом з іншими заповненими складає $m + n$. Отже, обов’язково утвориться цикл (теореми і наслідок 5.2). У межах даного циклу здійснюють перерахування, які виконують перерозподіл продукції. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці знак «+», а всім іншим по черзі знаки «–» і «+». У клітинках зі знаком «–» обирають значення $\theta = \min x_{ij}$, і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+» і віднімають від чисел, що позначені «–». Якщо значенню θ відповідає кілька однакових перевезень, то у разі віднімання залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає можливість зберегти невиродженість опорного плану.

Унаслідок наведеного правила вибору θ дістаємо новий опорний план, який не містить від’ємних перевезень і задовольняє умови транспортної задачі. Оскільки кількість усіх клітини таблиці, що входять до циклу, є парною і для половини з них одне й те саме число θ додається, а для половини віднімається, то загальна сума перевезень по всіх колонках і рядках залишається незмінною.

Покажемо ациклічність нового плану. Вектор умов, який відповідає приєднаній клітині, є лінійною комбінацією векторів базису, які становлять разом із ним цикл, бо ці вектори входять до згаданої лінійної комбінації з відмінними від нуля коефіцієнтами (доведення теореми 5.2). Виключення до циклу одного з базисних векторів приводить до нової системи з $m+n-1$ лінійно незалежними векторами, бо інакше введений у новий базис вектор мав би два різні розклади через вектори попереднього базису, що неможливо. А системі лінійно незалежних векторів відповідає ациклічна сукупність клітин таблиці транспортної задачі, що й потрібно було довести.

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану. Якщо умова оптимальності виконується — маємо оптимальний план транспортної задачі, інакше — необхідно перейти до наступного опорного плану (п. 3 даного алгоритму) і т. д.

Зауважимо, що за аналогією з розв'язуванням загальної задачі лінійного програмування симплексним методом, якщо при перевірці оптимального плану транспортної задачі для деяких клітин виконується рівність $u_i+v_j=c_{ij}$, то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Отримати їх можна, якщо побудувати цикли перерозподілу для вказаних клітин.

4.5.3. Монотонність і скінченність методу потенціалів. Кожний новий опорний план надає меншого порівняно з попереднім значення цільової функції *Z*, тобто при невироджених опорних планах метод потенціалів дає строго монотонне зменшення цільової функції транспортної задачі. Покажемо, що це положення справедливе в загальному випадку.

Нехай план X' знайдено з плану X однією ітерацією методом потенціалів; при цьому було використано цикл (позначимо такий набір клітин через *K*), утворений клітинами з такими індексами:

$(i_1 j_1)(i_2 j_1)(i_2 j_1)(i_3 j_2)....(i_s j_{s-1})(i_s j_s)$ і приєднаною клітиною $(i_1 j_s)$,

для якої спостерігалось найбільше порушення умови оптимальності плану транспортної задачі $v_{j_s}+u_{i_1}-c_{i_1 j_s}>0$.

З першої теореми двоїстості для транспортної задачі маємо

$$Z_{\min}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}^{*}=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\,.$$

Ураховуючи останнє рівняння, встановимо зв'язок між послідовними значеннями цільової функції Z і Z', що відповідають опорним планам X і X'.

$$Z'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x'_{ij}=\sum_{(ij)\notin K}c_{ij}x_{ij}+\sum_{q=1}^{s}c_{i_q j_q}(x_{i_q j_q}-\theta)+\sum_{q=1}^{s-1}c_{i_{q+1} j_q}(x_{i_{q+1} j_q}+\theta)+c_{i_1 j_s}\theta\,.$$

Перша сума правої частини — перевезення, які не були включені до циклу *K*, друга сума поширюється на ті значення перевезень, у яких віднімалась обрана величина θ, третя й останній доданок охоплюють клітини, де початкове значення було збільшена на величину θ. Тобто

$$\begin{aligned}Z'&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{q=1}^{s}c_{i_q j_q}\theta+\sum_{q=1}^{s-1}c_{i_{q+1} j_q}\theta+c_{i_1 j_s}\theta=Z+\\&+\theta(c_{i_1 j_s}-c_{i_1 j_1}+c_{i_2 j_1}-c_{i_2 j_2}+c_{i_2 j_2}-...-c_{i_{s-1} j_{s-1}}+c_{i_s j_{s-1}}-c_{i_s j_s}=\\&=Z+\theta(c_{i_1 j_s}-(u_{i_1}+v_{j_1})+(u_{i_2}+v_{j_1})-(u_{i_2}+v_{j_2})+(u_{i_3}+v_{j_2})-...\\&-(u_{i_{s-1}}+v_{j_{s-1}})+(u_{i_s}+v_{j_{s-1}})-(u_{i_s}+v_{j_s})=Z+\theta(c_{i_1 j_s}-u_{i_1}-v_{j_s})\,.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Враховуючи додатність величини θ у невиродженому випадку і від'ємне значення виразу у дужках ($c_{i_1 j_s}-u_{i_1}-v_{j_s}<0$), доходимо висновку $Z'<Z$, що й доводить строгу монотонність алгоритму, яка у виродженому випадку не є строгою, оскільки величина θ може дорівнювати нулю.

Співвідношення (4.18) є також обґрунтуванням способу вибору клітини, яка вводиться в базис, за максимумом абсолютної величини $\left|c_{i_1 j_s} - u_{i_1} - v_{j_s}\right|$, оскільки це дасть найбільше зменшення цільової функції.

Скінченність алгоритму випливає з його монотонності і скінченності числа опорних планів задачі; однак це є обґрунтованим лише для невироджених задач, а у разі виродження, коли строга монотонність не є безумовною, теоретично можливе зациклювання алгоритму так само, як це спостерігалося для симплексного методу.

4.5.4. Приклади розв'язування транспортних задач методом потенціалів

Приклад 4.1. Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 і 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня, відповідно, 110, 40, 60 і 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i-ї фабрики до j-го замовника $(i=\overline{1,\ 3};\ \ j=\overline{1,\ 4})$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає у тому, що вся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати стосовно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом, і за умовою задачі мають бути мінімальними. Отже,

$$minZ = 4 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 2 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{22} + x_{23} + \\ + 2 \cdot x_{24} + 2 \cdot x_{31} + x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 2 \cdot x_{34}..$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$minZ = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + \\ + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0, \;\; i=\overline{1,3}; \;\; j=\overline{1,4}.$

Розв'язування. Розв'язуємо задачу за допомогою транспортних таблиць. Перший опорний план задачі в транспортній таблиці побудуємо методом мінімальної вартості.

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110	4	2 2	5 40	$u_1 = 5$
$a_2 = 60$	5	3	+ 1 60 –	– 2 + 0	$u_2 = 2$
$a_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум. од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$.

Для подальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати нульове перевезення так, щоб не порушити опірності плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку A_2B_4. Тепер перший план транспортної задачі є невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо покладемо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються, як $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$$A_1B_2\text{: } u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4;$$
$$A_1B_3\text{: } u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2;$$
$$A_2B_1\text{: } u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5;$$
$$A_2B_2\text{: } u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3;$$
$$A_3B_1\text{: } u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2;$$
$$A_3B_3\text{: } u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4.$$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, і позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку A_1B_3 переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщуються в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщуються в клітинках зі знаком «+», і віднімаємо від чисел, що розміщуються в клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку $\min\{60;\ 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка A_1B_3 — 40 од. продукції, A_2B_3 – (60 – 40) = 20 од., A_2B_4 — (0 + 40) = 40 од. Клітинка A_1B_4, звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати ($n + m - 1$).

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_I	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110 –	4	2 + 40	5	$u_1 = 0$
$a_2 = 60$	5	3	1 – 20	2 + 40	$u_2 = -1$
$a_3 = 80$	2 1 +	1 40	4	2 – 40	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому $Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану транспортної задачі і дістанемо таку таблицю:

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$a_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$a_3 = 80$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Тому $Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720$ ум. од.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний, і тому

$$x^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики і 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва і перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість виробництва і перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

Приклад 4.2. Районне агропромислове об'єднання складається з трьох господарств A_1, A_2, A_3, що спеціалізуються на вирощуванні ранніх овочів. Кожне господарство щотижня збирає 50, 30 і 20 т овочів відповідно, які необхідно відправляти в чотири магазини B_1, B_2, B_3, B_4. Магазини бажають отримувати ранні овочі в кількості 30, 30, 10 і 20 т відповідно. Вартість перевезення 1 т овочів від господарства до магазинів наведено в таблиці.

Господарство	Вартість перевезення 1 т овочів у магазини			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	4	2
A_2	5	7	1	4
A_3	9	4	3	2

Визначити такий план перевезення овочів до магазинів, за якого загальні витрати агропромислового об'єднання будуть найменшими.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість тонн овочів, які перевозять з i-го господарства j-го магазину ($i=\overline{1,\ 3}$; $j=\overline{1,\ 4}$). Тоді економіко-математична модель поставленої задачі має такий вигляд:

$$minZ = 2x_{11}+3x_{12}+4x_{13}+2x_{14}+5x_{21}+7x_{22}+x_{23}+4x_{24}+9x_{31}+4x_{32}+3x_{33}+2x_{34}$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 50, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 30, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 20, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=30, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=30, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=10, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=20. \end{cases}$$

$x_{ij}\ge 0,\ \ i=\overline{1,3};\ \ j=\overline{1,4}.$

Знак «≤» у перших трьох обмеженнях задачі пояснюється із тим, що за умовою транспортна задача є відкритою:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100;\quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 90.$$

У такій ситуації, коли попит менший за пропозицію, частина овочів залишиться в господарствах і фактично буде вивезено менше, ніж зібрано.

Розв'язування. Щоб визначити оптимальний план поставленої задачі, її необхідно збалансувати, тобто звести до закритого типу. Це виконується способом уведення додаткового, умовного споживача B_5 із попитом B_5 = 100 – 90 = 10 т. Вартість перевезення одиниці продукції до умовного споживача дорівнює нулю.

Перший опорний план транспортної задачі побудуємо методом подвійної переваги.

A_i	B_j					u_i
	b_1 = 30	b_2 = 30	b_3 = 10	b_4 = 20	b_5 = 10	
a_1 = 50	2 30	3 20	4	2	0	u_1= –4
a_2 = 30	5 1	7 10 –	1 10	4 + 0	0 10	u_2= 0
a_3 = 20	9	4 1 +	3	2 – 20	0	u_3= –2
v_j	v_1= 6	v_2= 7	v_3= 1	v_4= 0	v_5= 0	

Перший опорний план є виродженим, і тому в клітинку, наприклад, A_2B_4, поставимо нуль і вважатимемо її заповненою.

Перевірка плану за допомогою потенціалів показує, що він є неоптимальним. Перехід до другого опорного плану виконується шляхом заповнення клітинки A_3B_2 згідно із побудованим циклом. Зазначену клітинку включено до циклу тому, що в разі кількох однакових найбільших порушень ($\Delta_{21} = \Delta_{32} = 1$) заповнюють таку клітинку таблиці, яка має меншу вартість перевезення одиниці продукції ($c_{32} < c_{21}$).

Другий план транспортної задачі наведемо у вигляді таблиці:

A_j	B_j					u_i
	$b_1 = 30$	$b_2 = 30$	$b_3 = 10$	$b_4 = 20$	$b_5 = 10$	
$a_1 = 50$	2 30	3 20	4	2	0	$u_1 = –3$
$a_2 = 30$	5	7	1 10	4 10	0 10	$u_2 = 0$
$a_3 = 20$	9	4 10	3	2 10	0	$u_3 = –2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	$v_5 = 0$	

Умова оптимальності для цього опорного плану виконується, і тому можна записати:

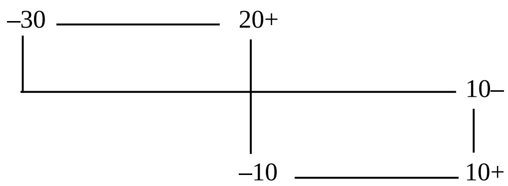
$$x_1^* = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 320 \text{ ум. од.}$$

Згідно з оптимальним планом потреба магазинів у ранніх овочах задовольняється завдяки повному вивезенню продукції з першого та третього господарств і лише частково — з другого (залишок дорівнює 10 т). У цьому разі загальна вартість усіх перевезень буде найменшою і становитиме 230 ум. од.

Але виявляється, що розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план. Ознакою цього є виконання умови оптимальності для порожньої клітинки: $u_i + v_j = c_{ij}$. В останній таблиці це справджується для порожньої клітинки A_2B_1: $u_1 + v_1 = 0 + 5 = c_{21} = 5$.

Щоб отримати альтернативний оптимальний план, достатньо заповнити зазначену клітинку таблиці, виконавши перерозподіл продукції за таким циклом:



Наведемо транспорту таблицю, що відповідає другому оптимальному плану задачі.

A_j	B_j					u_i
	$b_1 = 30$	$b_2 = 30$	$b_3 = 10$	$b_4 = 20$	$b_5 = 10$	
$a_1 = 50$	2 20	3 30	4	2	0	$u_1 = –3$
$a_2 = 30$	5 10	7	1 10	4 0	0 10	$u_2 = 0$
$a_3 = 20$	9	4	3	2 20	0	$u_3 = –2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	$v_5 = 0$	

Тому

$$x_2^* = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 230 \text{ ум. од.}$$

Другий оптимальний план задачі формулюється так. Перевезти з першого господарства 20 т овочів до першого магазину та 30 т — до другого; з другого господарства — 10 т до першого магазину та 10 т овочів до третього, залишаючи невивезеними 10 т, а також з третього господарства до четвертого магазину — 20 т овочів. У цьому разі загальні транспортні витрати становитимуть 230 ум. од. і також будуть найменшими.

У наступних параграфах наведемо (без доведення теоретичних положень алгоритмів) ще два найпоширеніших методи розв’язування транспортної задачі.

4.5.5. Розподільчий метод знаходження оптимального плану транспортної задачі. Розподільчий метод є безпосереднім застосуванням прямого симплексного методу до розв’язування транспортної задачі, заданої у формі таблиць. Оскільки детальне обґрунтування симплексного методу було наведене в розділі II, розглянемо одразу його алгоритм.

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита) за необхідності зведення задачі до закритого типу.
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.
3. Перевірка виродженості (невиродженості) опорного плану за необхідності введення нульових поставок.
4. Утворення замкнених циклів по черзі для всіх пустих клітин.
5. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність. Кожній вершині циклу приписують певний знак, починаючи з вільної клітини зі знаком «+», а всім іншим по черзі знаки «–» і «+». Знаходяться алгебраїчні суми величин вартостей перевезень із відповідними їм знаками для всіх клітин кожного циклу.
6. Вибір змінної для введення в базис. Якщо всі знайдені значення сум будуть невід’ємними, то план оптимальний. Якщо ж серед згаданих чисел є від’ємні, то клітину з найбільшою за модулем від’ємною сумою необхідно на наступному кроці включити в базис.
7. Перехід до наступного опорного плану. В обраному циклі визначають клітину, що позначена знаком «–» і має найменше перевезення θ, переносять його у порожню клітинку для інших клітин циклу величину θ додають до значень перевезень, які розміщуються в клітинках зі знаком «+» і віднімають від чисел, що позначені «–» для всього циклу. Отримали новий опорний план. Перехід до пункту 4.

Зв’язок розподільчого методу з методом потенціалів обґрунтовує така теорема.

Теорема. Для всякої небазисної клітини (i, j) алгебраїчна сума s_{ij} вартостей по циклу, що утворюється приєднанням даної клітини до деяких базисних клітин, дорівнює різниці між вартістю перевезень у цій клітині і відповідною сумою потенціалів, тобто $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

Доведення. Нехай приєднана пуста клітина разом із деякими базисними утворюють цикл, який позначимо такими індексами:

$$(i_1 j_1)(i_2 j_1)(i_2 j_1)(i_3 j_2)....(i_s j_{s-1})(i_s j_s)\ (i_1 j_s).$$

Тоді алгебраїчна сума вартостей по циклу з відповідними знаками буде:

$$\begin{aligned} s_{i_1 j_s} &= c_{i_1 j_s} - c_{i_1 j_1} + c_{i_2 j_1} - c_{i_2 j_2} + \ldots - c_{i_{s-1} j_{j-1}} + c_{i_s j_{s-1}} - c_{i_s j_s} = \\ &= c_{i_1 j_s} - (u_{i_1} + v_{j_1}) + (u_{i_2} + v_{j_1}) - (u_{i_2} + v_{j_2}) + (u_{i_3} + v_{j_2}) - \ldots \\ &- (u_{i_{s-1}} + v_{j_{s-1}}) + (u_{i_s} + v_{j_{s-1}}) - (u_{i_s} + v_{j_s}) = c_{i_1 j_s} - u_{i_1} - v_{j_s} \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Як наслідок теореми випливає висновок, що алгебраїчна сума вартостей перевезень s_{ij} по циклу певної небазисної клітини від’ємна тоді і тільки тоді, коли сума відповідних потенціалів $u_i + v_j$ більша від вартості перевезень у цій самій клітині c_{ij}.

Приклад 4.3. Знайти оптимальний план перевезень для транспортної задачі, умови якої подано у таблиці.

Розв’язування. Початковий опорний план знайдемо методом подвійної переваги.

A_j	B_j			
	b_1= 40	b_2 = 30	b_3 = 50	b_4 = 20
a_1 = 50	2 0 –	3 +	1 50	4
a_2 = 60	1 40 +	2 – 20	3	5
a_3 = 30	5	4 10	1	3 20

Отримали вироджений опорний план, оскільки кількість заповнених клітин дорівнює п'яти, тоді як необхідно $m+n-1=3+4-1=6$. Введемо нульове перевезення в клітину A_1B_1.

Використовуючи першу пусту клітину A_1B_2 утворюємо цикл і визначаємо алгебраїчну суму вартостей по даному циклу:

$$s_{12}=3-2+1-2=4\,.$$

Аналогічно знаходимо всі інші значення сум для кожної пустої клітини.

$$A_1B_4:\ s_{14}=4-2+1-2+4-3=+2\,,$$
$$A_2B_3:\ s_{23}=3-1+2-1=+3\,,$$
$$A_2B_4:\ s_{24}=5-2+4-3=+4\,,$$
$$A_3B_1:\ s_{31}=5-1+2-4=+2\,,$$
$$A_3B_3:\ s_{33}=1-1+2-1+2-4=-1\,.$$

Від'ємне значення суми відповідає клітинці A_3B_3, отже, її необхідно ввести в базис.

A_j	B_j			
	b_1= 40	b_2 = 30	b_3 = 50	b_4 = 20
a_1 = 50	2 0 +	3	1 – 50	4
a_2 = 60	1 40 ±	2 – 20 +	3	5
a_3 = 30	5	4 10	1	3 20

Найменша величина перевезень, що позначена знаком «–», θ = 10, переноситься у порожню клітинку A_3B_3 для інших клітин циклу величину θ додаютьдо значень перевезень, які розміщуються в клітинках зі знаком «+» і віднімають від чисел, що позначені «–». Маємо новий план:

A_j	B_j			
	b_1= 40	b_2 = 30	b_3 = 50	b_4 = 20
a_1 = 50	2 10	3	1 40	4
$_2$ = 60	1 30 +	2 – 30	3	5
a_3 = 30	5	4	1 10	3 20

Визначимо знову всі значення «нев'язок» s_{ij} для вільних клітин:

$$A_1B_2:\ s_{12}=3-2+1-2=0\,,$$
$$A_1B_4:\ s_{14}=4-1+1-3=+1\,,$$
$$A_2B_3:\ s_{23}=3-1+2-1=+3\,,$$
$$A_2B_4:\ s_{24}=5-1+2-1+1-3=+3\,,$$

$$A_3B_1: \ s_{31} = 5 - 2 + 1 - 1 = +3,$$
$$A_3B_2: \ s_{32} = 4 - 2 + 1 - 2 + 1 - 1 = +1.$$

Усі розраховані значення s_{ij} невід'ємні, отже знайдений план – оптимальний.

4.5.6. Угорський метод розв'язування транспортної задачі. Ідея угорського методу розв'язування транспортної задачі вперше була запропонована угорським математиком Є. Егерварі в 1931 році, тобто ще до розробки загальної теорії лінійного програмування. Спочатку метод було розроблено для розв'язування специфічного виду транспортної задачі і згодом поширено на загальний випадок. На сьогодні угорський метод є одним із найпоширеніших методів розв'язування транспортної задачі.

Метод є досить простим з обчислювальної точки зору і може бути застосований без упереджень навіть у випадку виродженості плану.

Ідея методу — здійснення послідовного переходу від деякого недопустимого плану (не всі потреби задоволені і не вся продукція вивезена) до допустимого, що є розв'язком задачі. Цей перехід здійснюється за скінчену кількість ітерацій (невідомою до кінця обчислень), що пов'язані з перетвореннями матриці вартостей $C = (c_{ij})$ і поточного плану $X = (x_{ij}), i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$.

Назвемо умовно-оптимальним планом (псевдопланом) транспортної задачі (4.1) — (4.4) таку систему невід'ємних чисел $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$, яка задовольняє задану систему нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, (i = \overline{1,m}) \tag{4.19}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, (j = \overline{1,n}) \tag{4.20}$$

і наступні умови для змінних двоїстої задачі — потенціалів:

$$x_{ij} = 0 \ \text{при} \ u_i + v_j - c_{ij} < 0,$$
$$x_{ij} \geq 0 \ \text{при} \ u_i + v_j - c_{ij} = 0.$$

Сумарною (загальною) мірою недопустимості умовно-оптимального плану може бути різниця між сумою усіх запасів (чи потреб, що те саме) і сумою усіх перевезень умовно-оптимального плану, тобто

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}. \tag{4.21}$$

Зрозуміло, що чим менша нев'язка Δ, тим ближче умовно-оптимальний план до дійсного плану транспортної задачі, а у випадку Δ = 0 він збігається з оптимальним планом.

Звідси легко усвідомити ідею розглядуваного методу розв'язування транспортної задачі: починаючи з деякого початкового плану задачі, подвійної до транспортної $u_i'(i = \overline{1,m}), v_j'(j = \overline{1,n})$, можна знайти послідовність оптимальних планів ряду допоміжних задач на мінімізацію (4.21) при обмеженнях (4.19), (4.20), кожний наступний план якої надає нев'язці (4.21) меншого значення порівняно з попереднім, а останній план цієї послідовності надає нев'язці нульового значення, збігаючись, таким чином, з оптимальним планом транспортної задачі.

Отже, кожна ітерація методу означатиме розв'язування допоміжної задачі (4.19)—(4.20) і зменшення при цьому мінімуму цільової функції (4.21) порівняно з попереднім розв'язком цієї задачі.

Щоб сформулювати допоміжну задачу, треба, крім використання величин $a_i(i = \overline{1,m})$ і $b_j(j = \overline{1,n})$, що їх містить задана транспортна задача, побудувати ще деякий план двоїстої задачі $u_i(i = \overline{1,m})$, $v_j(j = \overline{1,n})$. Для початку першої ітерації це легко зробити, поклавши, наприклад

$$u_i^{(0)} = \min_{1 \leq j \leq n}\left\{c_{ij}\right\}, \quad v_j^{(0)} = \min_{1 \leq i \leq m}\left\{c_{ij} - u_i^{(0)}\right\} \tag{4.23}$$

причому даний план задовольняє умову:

$$u_i^{(0)} + v_j^{(0)} = \min_{1 \leq j \leq n}\left\{c_{ij}\right\} + \min_{1 \leq i \leq m}\left\{c_{ij} - \min_{1 \leq j \leq n}\left\{c_{ij}\right\}\right\} \leq c_{ij} \tag{4.24}$$

а також у кожному рядку матриці перевезень внаслідок такого вибору потенціалів виконуватиметься хоча б одна рівність вигляду (4.24). Справді, покладаючи для i_0-го рядка у правій частині (4.24) $u_{i_0}^{(0)} = \min\{c_{i_0 j}\} = c_{i_0 s}$ дістанемо

$$u_{i_0}^{(0)} + v_s^{(0)} = c_{i_0 s} + (c_{i_0 s} - c_{i_0 s}) = c_{i_0 s}.$$

У наступних ітераціях утворену систему потенціалів виправляємо, але так, що вона завжди залишається планом подвійної задачі.

Наведені вище обмеження для змінних двоїстої задачі:

$$x_{ij} = 0 \text{ при } u_i + v_j - c_{ij} < 0,$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ при } u_i + v_j - c_{ij} = 0,$$

означають, що клітини, в яких для визначеної на *k*-му кроці системи потенціалів $\{u_i^{(k)}, v_j^{(k)}\}$ виконується строга нерівність $u_i^{(k)} + v_j^{(k)} - c_{ij} < 0$ не повинні заповнюватися. Отже, при розв'язуванні задачі будемо використовувати лише ті клітини, для яких $u_j^{(k)} + v_j^{(k)} - c_{ij} = 0$.

Зауважимо, що мінімізація цільової функції (4.21) рівнозначна максимізації другого її доданка.

$$\max \tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \tag{4.22}$$

при тій самій системі обмежень. Зрозуміло, що $\tilde{x} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i$, а при $\Delta = 0$ матимемо $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Виходячи з наведених теоретичних положень, розглянемо алгоритм угорського методу.

1. Побудова допоміжної задачі з цільовою функцією (4.22) та умовами (4.19), (4.20).

2. Побудова початкового опорного плану допоміжної задачі, що отримана на попередньому кроці алгоритму одним з відомих методів.

3. Відшукання оптимального плану допоміжної задачі.

3.1. Збільшення значення $\widetilde{X}$. Визначаються рядки, де сума перевезень по рядку менша від запасів, і за допомогою них стовпці, які мають в обраному рядку не заборонені для перевезень клітини. Обрані рядки і стовпці позначаються таким чином:

$$\alpha_i^{(0)} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \ \lambda_i = 0,$$
$$\beta_j = \alpha_i \text{ і } \mu_j = i, \tag{4.23}$$

потім $\alpha_i = \min\{\beta_j, x_{ij_0}\}, \ \lambda_i = j.$ (4.24)

3.2. Визначення клітин, значення перевезень у яких x_{ij} необхідно змінити. Послідовність повинна утворювати деякий ланцюг, елементи якого є у позначених рядках і колонках і за яким можна перенести лишок запасу деякого i_0-го рядка, що був позначений першим, у j_s-ту колонку, позначену останньою.

У загальному випадку послідовність матиме вигляд

$$(i_0 j_0)(i_1 j_0)(i_1 j_2)....(i_{s-1} j_s).$$

У знайденому ланцюзі позначаємо першу його клітину з кінця знаком «+», а інші по черзі знаками «+» і «–». Знайдемо величину

$$\theta = \min\left\{\beta_{j_s}, b_{j_s} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_s}\right\}. \tag{4.25}$$

Як видно з алгоритму, β_{j_s} дорівнює меншій з двох величин: найменшого елементу ланцюга, що позначений знаком «–» і невикористаного запасу в позначеному першим пунктом відправлення. Величина $b_{j_s} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij_s}$ є незадоволеною потребою в позначеному наприкінці пункті доставки.

Зсуву по ланцюгу підлягає менша з цих величин, що й приводить до наведеної формули (4.25) розрахунку θ.

4. Перехід до наступної допоміжної задачі, оптимальний план якої буде ближчим до оптимального плану початкової транспортної задачі.

У кінцевій таблиці розв'язаної допоміжної задачі позначені колонки мають баланс суми перевезень по колонці і потреб у відповідних пунктах, легко побачити, що заборону на перевезення слід знімати з тих клітин, які не належать до позначених колонок. Водночас у тій самій кінцевій таблиці попередньої допоміжної задачі серед позначених є рядки, в яких немає балансу суми перевезень і запасів, так що шукана клітина міститиметься серед позначених в остаточній таблиці рядків.

Позначимо множину позначених рядків I, а множину позначених колонок J (у кінцевій таблиці, що містить розв'язок допоміжної задачі). Знайдемо величину

$$\gamma_1 = \min_{i \in I\, j \notin J} (c_{ij} - u_i^{(0)} - v_j^{(0)}) > 0\,, \tag{4.26}$$

тобто найменше значення різниці, що стоїть у дужках серед заборонених клітин, які містяться в позначених рядках і непозначених колонках; γ_1 строго більше від нуля, оскільки в іншому разі відповідна клітина не була б забороненою для перевезення та її колонку можна було б позначити за допомогою того позначеного рядка, якому належить ця клітина, що суперечить умові $j \notin J$. Зрозуміло, що збільшивши, наприклад, потенціал u_i, який входить до формули (4.26), на величину γ_1, тим самим перетворюють відповідну клітину (в якій $\gamma_1 = c_{ij} - u_i^{(0)} - v_j^{(0)}$) на вільну для перевезень. Звичайно, таких клітин, що задовольняють умову (4.26), може бути більше, ніж одна. Тому в усіх позначених рядках збільшуємо потенціали $u_i^{(0)}$ на γ_1, а щоб зберегти попередню множину клітин вільних для перевезень величину γ_1, віднімемо від потенціалів позначених колонок $v_j^{(0)}$. Решту потенціалів залишаємо незмінними. Тут слід підкреслити, що через алгоритм розв'язку допоміжної задачі всі вільні для перевезень клітини, які є в позначених рядках, обов'язково містяться і в позначених колонках. Отже, нову систему потенціалів знаходимо, виправляючи попередню за такими формулами:

$$u_i^{(1)} = \begin{cases} u_i^{(0)} + \gamma_1, i \in I, \\ u_i^{(0)},\ i \notin I \end{cases}$$
$$v_j^{(1)} = \begin{cases} v_j^{(0)} - \gamma_1, j \in J, \\ v_j^{(0)},\ j \notin J. \end{cases} \tag{4.27}$$

Нова система потенціалів $\{u_i^{(1)}, v_j^{(1)}\}$ визначає нову множину клітин заборонених для перевезень Ω_1.

$$\Omega_1 = \{(i, j), u_i^{(1)} + v_j^{(1)} - c_{ij} < 0\},\ \Omega_1 \neq \Omega_0\,.$$

Визначивши Ω_1, знову формулюємо і розв'язуємо допоміжну задачу.

5. Кроки 2—4 повторюємо до відшукання оптимального плану початкової транспортної задачі.

Сформулюємо правила розв'язування допоміжної задачі, одночасно демонструючи їх на відповідному прикладі і додаючи в разі потреби відповідні пояснення.

Приклад 4.4. Розв'яжемо угорським методом транспортну задачу, наведену в таблиці.

A_i	B_j			
	$b_1 = 50$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$
$a_1 = 110$	7	2	4	2
$a_2 = 40$	1	2	4	1
$a_3 = 80$	5	3	2	4
$a_4 = 70$	7	3	3	9

Розв’язування. Визначаємо початкову систему потенціалів для побудови першої допоміжної задачі, використовуючи (4.23):

$$u_i^{(0)} = \min_{1 \le j \le n}\{c_{ij}\},\ v_j^{(0)} = \min_{1 \le i \le m}\{c_{ij} - u_i^{(0)}\}.$$

Матимемо:

$u_1^{(0)} = \min(7,2,4,2) = 2$,
$u_2^{(0)} = \min(1,2,4,1) = 1$,
$u_3^{(0)} = \min(5,3,2,4) = 2$,
$u_4^{(0)} = \min(7,3,3,9) = 3$.
$v_1^{(0)} = \min\{(7-2),(1-1),(5-2),(7-3)\} = 0$,
$v_2^{(0)} = \min\{(2-2),(2-1),(3-2),(3-3)\} = 0$,
$v_3^{(0)} = \min\{(4-2),(4-1),(2-2),(3-3)\} = 0$,
$v_4^{(0)} = \min\{(2-2),(1-1),(4-2),(9-3)\} = 0$.

Розраховуємо величини $c_{ij} - u_i^{(0)} - v_j^{(0)}$ і записуємо їх у вигляді таблиці:

5	0	2	0
0	1	1	0
3	1	0	2
4	0	0	6

Клітини побудованої таблиці з відмінними від нуля елементами (різницями) будуть забороненими для перевезень, чим гарантується виконання умов стосовно потенціалів, а клітини з нулями можна використати для знаходження плану допоміжної задачі.

Побудуємо початковий план допоміжної задачі, наприклад, методом північно-західного кута, ураховуючи обмеження, накладені забороною зазначених перевезень (відповідні клітини таблиці виділено іншим кольором)

<table>
<tr><td rowspan="2">A_i</td><td colspan="4">B_j</td><td rowspan="2">α_i</td><td rowspan="2">λ_i</td></tr>
<tr><td>$b_1 = 50$</td><td>$b_2 = 130$</td><td>$b_3 = 80$</td><td>$b_4 = 40$</td></tr>
<tr><td>$a_1 = 110$</td><td></td><td>2
110</td><td></td><td>2
0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$a_2 = 40$</td><td>1
40</td><td></td><td></td><td>1
0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$a_3 = 80$</td><td></td><td></td><td>2
80</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$a_4 = 70$</td><td></td><td>3
20</td><td>3
0</td><td>9</td><td>50</td><td>0</td></tr>
<tr><td>β_j</td><td></td><td>50</td><td>50</td><td></td></tr>
<tr><td>μ_j</td><td></td><td>4</td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

Загальна сума перевезень за початковим планом буде дорівнювати $\tilde{x} = 40 + 30 + 80 + 110 = 250$, менша на 50 од. від суми всіх запасів (потреб) $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 300$.

Подивимось, чи не можна змінити визначений план для збільшення числа $\tilde{x}$. Це можна зробити лише за рахунок тих рядків, у яких запас залишився невикористаним. Отже, позначимо ті рядки, в яких сума перевезень по рядку за початковим планом менша від відповідного запасу $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i$. Позначаємо їх двома числами, одне з яких відповідатиме значенню $a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, і позначається символом $\alpha_i^{(0)} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, а друге є нулем, і позначається символом λ_i, де i — відповідає номеру обраного рядка. У нашому прикладі таким буде лише один — 4-й рядок, отже, $\alpha_4 = a_4 - x_{42} = 70 - 20 = 50$, і оскільки нуль відповідатиме 4-му рядку, то маємо $\lambda_4 = 0$.

У загальному випадку їх буде кілька. За допомогою кожного позначеного рядка (у нашому випадку 4-го) позначаємо ті колонки, які мають у позначеному рядку незаборонені для перевезень клітини, такими двома символами (4.23): $\beta_j = \alpha_i$ та $\mu_j = i$.

У нашому випадку незаборонені для перевезень клітини містять друга і третя колонки, які слід позначаємо відповідними символами: другу колонку $\beta_2 = 50$, $\mu_2 = 4$; третю $\beta_3 = 50$, $\mu_3 = 4$. Колонки (друга і третя) використовуються для позначення ще не позначених рядків, які мають у даній позначеній колонці клітини з відмінними від 0 перевезеннями ($x_{ij} > 0$).

Позначення відповідають (4.24): $\alpha_i = \min\{\beta_j, x_{ij_0}\}$, $\lambda_i = j$.

Таким способом далі позначаємо перший рядок числами $\alpha_1 = \min\{50{,}110\} = 50$, $\lambda_1 = 2$, а третій $\alpha_3 = \min\{50{,}80\} = 50$, $\lambda_3 = 3$.

A_i	B_j				α_i	λ_i
	$b_1 = 50$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$		
$a_1 = 110$		− 2 110		+ 2 0	50	2
$a_2 = 40$	1 40		4	1 0		
$a_3 = 80$			2 80		50	3
$a_4 = 70$		+ 3 20	3 0		50	0
β_j		50	50	50		
μ_j		4	4	1		

Знову вказані рядки використовуємо для позначення за формулами (4.25) нових, ще непозначених колонок доти, доки не знайдеться колонка, сума перевезень якої менша від потреби відповідного пункту, доставки, або процес позначень не можна продовжити. Другий випадок означає, що план змінити не можна і що він оптимальний. У першому випадку продовжуємо алгоритм.

Для нашого прикладу знайдено колонку, сума перевезень якої менша від потреби відповідного пункту, – це четверта колонка, яку і позначаємо числами:

$$\beta_4 = \alpha_2 = 50, \ \mu_4 = i = 1.$$

Визначаємо послідовність клітин, значення перевезень у яких слід змінити. Ця послідовність повинна утворювати деякий ланцюг, елементи якого є в позначених рядках і колонках і за яким можна перенести лишок запасу деякого i_0-го рядка, що був позначений першим, у j_s-ту колонку, позначену останньою.

У нашому прикладі такою послідовністю є послідовність клітин A_4B_1, A_1B_2, A_1B_4, тобто $\theta = \min\{50;40\} = 40 = b_4 - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_4$.

Далі використовуємо формулу:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta, \text{Шђќ”ђ‘µ □ЦЏ•”Ќ”Ќ÷ Њ’€Ќ’€ђ”“"•‘ю‘"}; \\ x_{ij} - \theta, \text{−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−"“µ’—"}; \\ x_{ij}, \ \text{−−−−−−−−’Њ€‘Њ€‘Њс‘€’љ€’љ}. \end{cases}$$

Отже, до перевезень x_{42} і x_{14} додаємо θ = 40, а від перевезення x_{12} віднімаємо цю саму величину. Матимемо таку таблицю:

A_i	B_j				α_i	λ_i
	$b_1 = 50$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$		
$a_1 = 110$		2 70		2 40	10	2
$a_2 = 40$	1 40			1 0	40	
$a_3 = 80$			2 80		10	3
$a_4 = 70$		3 60	3 0		10	0
β_i		10	10	10		
μ_i		4	4	1		

Повторюючи процес позначень, з четвертого рядка легко побачити, що він закінчується знову на четвертій колонці, де досягнуто рівності суми перевезень колонки і потреби в четвертому пункті доставки. Отже, план допоміжної задачі оптимальний.

Зауважимо, що оптимальне значення лінійної функції $\tilde{x}$ початкової задачі на 40 од. більше від початкового; збільшення лінійної функції забезпечується ациклічністю ланцюга і більшою на 1 кількістю додатних (позначених знаком «+») клітин у ньому.

Перейдемо до нової допоміжної задачі, оптимальний план якої буде ближчим до оптимального плану заданої транспортної задачі; цільова функція допоміжної задачі $\tilde{x}$, яка визначає загальну суму перевезених вантажів, при цьому збільшується. Для нашого прикладу цілком зрозуміло, що рівності $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i$ (тобто повного перевезення вантажу) можна було б досягти, якби, наприклад, зняти з A_4B_1 або з якоїсь іншої клітини першої колонки заборону на перевезення і здійснити перевезення $x_{i1} = 10$ (i = 1, 3, 4). Оскільки згадана заборона накладена попередньою системою потенціалів $\{u_i^{(0)}, v_j^{(0)}\}$, то зняти її можна, лише замінивши попередню систему потенціалів новою, але такою, щоб зберігалася система незаборонених для перевезень клітин, знайдена на попередньому етапі.

Для наведеного прикладу множина клітин (i, j), для яких $i \in I$, $j \notin J$ така: A_1B_1, A_3B_1, A_4B_1, A_4B_1, причому $\gamma_1 = \min(5;3;4) = 3$ досягається в клітині A_3B_1.

Знайдемо нову систему потенціалів:

$$u_1^{(1)} = u_1^{(0)} + \gamma_1 = 2 + 3 = 5;$$
$$u_2^{(1)} = u_2^{(0)} = 1;$$
$$u_3^{(1)} = u_3^{(0)} + \gamma_1 = 2 + 3 = 5;$$
$$u_4^{(1)} = u_4^{(0)} + \gamma_1 = 3 + 3 = 6;$$
$$v_1^{(1)} = v_1^{(0)} = 0;$$
$$v_2^{(1)} = v_2^{(0)} - \gamma_1 = -3;$$
$$v_3^{(1)} = v_3^{(0)} - \gamma_1 = -34$$
$$v_4^{(1)} = v_4^{(0)} - \gamma_1 = -3.$$

Отже, тепер забороненими для перевезень клітинами будуть ті, де $c_{ij} - u_i^{(1)} - v_j^{(1)} > 0$, що запишемо в таблиці:

2	0	2	0
0	4	6	0
0	1	0	1
1	0	0	6

Визначаємо початковий план і розв'язуємо нову допоміжну задачу:

A_i	B_j				α_i	λ_i
	$b_1 = 50$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$		
$a_1 = 110$	−	2 110		+ 2 0	40	2
$a_2 = 40$	1 40			1 0		
$a_3 = 80$	5 10		2 70		40	3
$a_4 = 70$		+ 3 20	3 10		40	0
β_j		40	40			
μ_j		4	4			

Зробивши зсув $\beta_4 = 40$ по ланцюгу A_4B_2, A_1B_2, A_1B_4, матимемо такий план:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 60 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Цей план оптимальний, оскільки $\Delta = 0$, тобто $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Зауважимо, що даний алгоритм застосовується і для розв'язування відкритих транспортних задач без уведення фіктивних пунктів. Для цього досить задовольнити ту групу обмежень, яка повинна виконуватись у вигляді строгих рівностей, і так підібрати систему потенціалів на останньому кроці, щоб тим обмеженням, які при знайденому плані є строгими нерівностями, відповідали нульові потенціали.

4.6. Транспортна задача з додатковими умовами

На практиці в задачах, що пов'язані з перевезеннями, часто доводиться враховувати додаткові умови, що можуть бути пов'язані з неможливістю здійснення перевезень за окремими маршрутами, необхідністю перевезення неоднорідної продукції тощо. Такі умови ускладнюють математичну постановку транспортної задачі та вимагають особливих підходів її розв'язування.

Розглянемо кілька особливостей відкритих транспортних задач із додатковими умовами.

1. Додаткова умова заборони окремих перевезень від певного постачальника до певного споживача. У такому випадку в оптимальному плані відповідні клітини мають бути обов'язково вільними ($x_{ij} = 0$).

Розв'язуючи транспортну задачу з додатковими умовами на заборону поставок, необхідно у відповідних клітинах замінити початкові значення вартостей перевезень на деяке велике число (ставиться досить велике число *M*). Оскільки розглянуті методи розв'язування транспортної задачі включають до оптимального плану маршрути за критерієм мінімізації вартості, вказаний спосіб забезпечить виключення з розгляду маршрутів з надто великими вартостями перевезень одиниці продукції, що й забезпечить виконання додаткових умов.

2. Додаткова умова перевезення за окремими маршрутами строго визначеної кількості продукції, тобто виконання обов'язкових поставок. В оптимальному плані відкритої транспортної задачі з такою додатковою умовою клітини відповідних фіктивно введених постачальників чи споживачів мають бути вільними.

У розв'язуванні такого типу транспортної задачі необхідно у відповідних клітинах також збільшити початкові значення вартостей перевезень (ставиться досить велике число *M*).

3. Додаткова умова необхідності перевезення від *i*-го постачальника *j*-му споживачеві не менше як k_{ij} одиниць продукції, тобто вводиться додаткове обмеження вигляду $x_{ij} \geq k_{ij}$.

При розв'язуванні транспортної задачі з такою додатковою умовою необхідно обчислити транспортну задачу, в якій змінені початкові умови: обсяг поставки k_{ij} віднімається з обсягу вантажу *i*-го постачальника ($a_i' = a_i - k_{ij}$) і з потреби *j*-го споживача ($b_j' = b_j - k_{ij}$). Знайдений оптимальний план транспортної задачі зі зміненими умовами (використовуються значення a_i', b_j') коригується з урахуванням обмеження $x_{ij} \geq k_{ij}$.

4. Додаткова умова необхідності перевезення від *i*-го постачальника *j*-му споживачеві не більше як k_{ij} одиниць продукції, тобто вводиться додаткове обмеження вигляду $x_{ij} \leq k_{ij}$.

Під час розв'язування транспортної задачі з такою додатковою умовою необхідно в транспортній таблиці *j*-го споживача записати двічі. Один раз його потреби визначатимуться величиною k_{ij}, а другий — як різниця $b_j' = b_j - k_{ij}$. Витрати на перевезення продукції в обох стовпцях повинні бути однаковими, за винятком клітини на перетині *i*-го постачальника і *j*-го споживача з потребою b_j'. У цій клітині ставиться досить велике число *M*. У такій постановці задача розв'язується відомими методами.

5. На практиці часто потрібно визначити оптимальний план перевезень неоднорідної продукції, тобто розв'язати багатопродуктову задачу. Математична модель

$$\min F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} c_{ijk} x_{ijk},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = a_{ik}, i = \overline{1,m}; k = \overline{1,l},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk}, j = \overline{1,n}; k = \overline{1,l},$$

$$x_{ijk} \geq 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}; k = \overline{1,l},$$

де k — індекс виду продукції, що необхідно перевезти.

Розв'язуючи багатопродуктову транспортну задачу, потрібно заблокувати ті клітини, які пов'язують постачальників і споживачів по поставках різної продукції. Таке блокування проводиться на основі використання досить високих вартостей перевезень одиниці продукції (велике число M). При цьому слід зауважити, що розв'язування транспортної задачі з використанням заблокованих клітин може призвести до неможливості знайти розв'язок задачі. Тому кожного разу в такому випадку необхідно перевіряти, чи достатня кількість незаблокованих маршрутів для побудови опорного плану задачі, який повинен містити $(m+n-1)$ додатних змінних.

Приклад 4.5. Три нафтопереробні заводи A_1, A_2, A_3 із максимальною щоденною продуктивністю 30, 20, 15 тис. т бензину відповідно забезпечують чотири бензосховища B_1, B_2, B_3, B_4, потреба яких становить 10, 20, 25 і 20 тис. т. бензину відповідно. Бензин транспортується до бензосховищ через трубопроводи. Вартість перекачування 1000 т бензину від заводів до сховищ (в ум. од.) наведено в таблиці.

Завод	Вартість, ум. од., перекачування 1000 т бензину до сховищ			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	3	7
A_2	7	6	2	5
A_3	2	3	9	8

Сформулювати і розв'язати відповідну транспорту задачу з неодмінним виконанням таких умов:

1) повністю задовольнити попит бензосховища B_4;

2) недопостачання бензину до сховища B_2 штрафується на суму 5 ум. од. вартості за кожні 1000 т бензину;

3) у зв'язку з виконанням ремонтних робіт на трубопроводі постачання бензину із заводу A_1 до сховища B_1 тимчасово неможливе.

Розв'язування. Визначимо, до якого типу належить транспортна задача:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 30 + 20 + 15 = 65, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 10 + 20 + 25 + 20 = 75.$$

За умовою транспортна задача є відкритою, незбалансованою. Зведення її до закритого типу потребує введення додаткового фіктивного постачальника A_4 з продуктивністю $a_4 = 75 - 65 = 10$ (тис. т). Кількість бензину, що відправляється фіктивним заводом до бензосховищ, в оптимальному плані означатиме обсяг незадоволеного попиту в цьому пункті призначення. Тому для виконання першої додаткової вимоги задачі необхідно блокувати клітинку фіктивного постачальника A_4 і споживача B_4, записавши в ній досить високу вартість M. Тоді в оптимальному плані транспортної задачі ця клітинка обов'язково буде незаповненою.

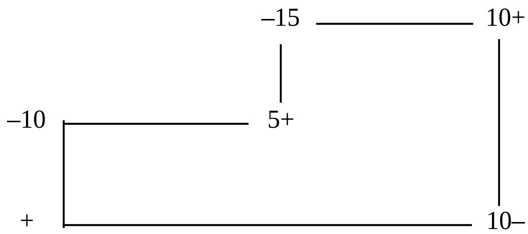
Виконання другої умови задачі забезпечується тим, що в рядку фіктивного постачальника у стовпчику B_2 вартість транспортування 1000 т бензину дорівнюватиме 5 ум. од. замість 0.

Оскільки неможливо транспортувати бензин від заводу A_1 до сховища B_1, необхідно також блокувати маршрут A_1B_1. Для цього в зазначеній клітинці замість $C_{11} = 4$ записуємо величину M.

З огляду на викладене, таблиця для першого плану транспортної задачі матиме такий вигляд (початковий опорний план побудовано методом апроксимації Фогеля):

A_i	B_j					Різниці для рядків
	b_1= 10	b_2= 20	b_3= 25	b_4= 20	u_i	
a_1= 30	M	5 15 –	3 5	7 +10	u_1= 0	2 2 2
a_2= 20	7	6	2 20	5 1	u_2= –1	3 3 3
a_3= 15	1 10 –	3 5+	9	8	u_3= –2	2 5
a_4= 10	0 M – 4 +	5 M – 7	0 M – 4	M 10	u_4= M –7	
v_j	v_1= 3	v_2= 5	v_3= 3	v_4= 7		
Різниці для стовпчиків	6	2 2 1	1 1 1	2 2 2		

Отже, перший опорний план задачі неоптимальний. Найбільше порушення умови оптимальності відповідає порожнім клітинкам A_4B_1 і A_3B_3 таблиці. Оскільки обидві вони мають однаковий коефіцієнт $C_{41} = C_{43} = 0$, то для заповнення можна вибрати будь-яку з них, наприклад, A_4B_1. Перехід до другого плану виконується за таким циклом:



При цьому заблокована клітинка A_4B_4 звільняється.

Подальше розв'язування задачі подано у вигляді таблиць.

A_i	B_j				u_i
	B_1= 10	B_2= 20	B_3= 25	B_4= 20	
A_1= 30	M	5 5	3 5 +	7 – 20	u_1= 0
A_2= 20	7	6 –	2 20	5 +	u_2= –1
A_3= 15	1 0	3 15	9	8	u_3= –2
A_4= 10	0 10	5	0		u_4= –3
v_j	v_1= 3	v_2= 5	v_3= 3	v_4= 7	

A_j	B_j				u_i
	B_1= 10	B_2= 20	B_3= 25	B_4= 20	
A_1= 30	M	5 5	3 25	7	u_1= 0
A_2= 20	7	6	2 0	5 20	u_2= –1
A_3= 15	1 0	3 15	9	8	u_3= –2
A_4= 10	0 10	5	0	M	u_4= –3
v_j	v_1= 3	v_2= 5	v_3= 3	v_4= 6	

В останній таблиці маємо оптимальний план транспортної задачі.

Отже,

A_4= 10	0 10	5	0	M	u_4= –3
v_j	v_1= 3	v_2= 5	v_3= 3	v_4= 6	

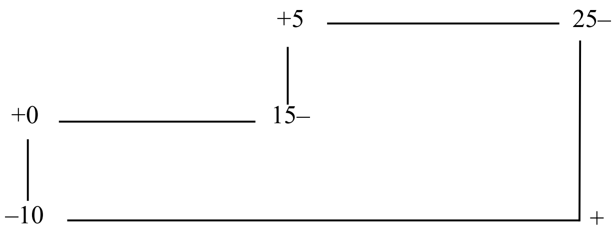
В останній таблиці маємо оптимальний план транспортної задачі.
Отже,

$$x_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z_{\min} = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 25 + 5 \cdot 20 + 3 \cdot 15 = 245 \text{ ум. од.}$$

Через незбалансованість поставленої транспортної задачі спостерігатиметься недопостачання бензину до першого бензосховища в кількості 10 000 т. Загальні витрати на транспортування в цьому разі будуть найменшими і становитимуть 245 ум. од.

Альтернативний оптимальний план дістанемо, заповнивши клітинку A_4B_3 (для неї $u_4 + v_3 = c_{43}$) згідно з таким циклом:



Відповідно можна записати:

$$x_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z_{\min} = 5 \cdot 15 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 15 = 245 \text{ ум. од.}$$

Мінімальні загальні витрати на транспортування в розмірі 245 ум. од. відповідають також ще одному оптимальному плану задачі, згідно з яким третє бензосховище отримає на 10 000 т бензину менше, ніж потребує.

Існування двох альтернативних оптимальних планів розглянутої транспортної задачі розширює можливості стосовно остаточного прийняття рішення.

4.7. Двоетапна транспортна задача

У класичній постановці транспортної задачі припускається, що вантаж перевозиться безпосередньо від постачальників до споживачів. Але на практиці досить часто стикаються з випадком, коли певна частина вантажу спочатку перевозиться до посередницьких фірм (сховищ), а потім споживачам. У такому випадку розв’язування задачі матиме два етапи: спочатку знаходять оптимальний план перевезень від постачальників до посередників, а потім — від посередників до споживачів. Така задача має назву двоетапної транспортної задачі.

Нехай у m пунктах постачання A_1, A_2, A_m є $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць продукції, яку необхідно перевезти на k посередницьких фірм $D_1, D_2, ..., D_l$, місткість яких становитиме $d_1, d_2, ..., d_l$, а потім доставити його споживачам $B_1, B_2, ..., B_n$, потреби яких становлять $b_1, b_2, ..., b_n$. Задані витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до посередницьких фірм — c_{ik}, і витрати на перевезення одиниці продукції від посередників до споживачів — c_{kj}. Потрібно визначити оптимальну схему перевезень продукції з мінімальними сумарними витратами. Якщо обсяг продукції,

за умов

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, i=\overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k, k=\overline{1,l};$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{kj} = b_j, j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} \le d_k, k=\overline{1,l};$$

$$x_{ik} \ge 0, x_{kj} \ge 0, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}; k=\overline{1,l}.$$

Зазначимо, що коли загальний обсяг вантажу $\sum_{i=1}^{m} a_i$ дорівнює місткості всіх складів і баз $\sum_{k=1}^{l} d_k$, а також сумарній потребі всіх споживачів $\sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{l} d_k = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то така двохетапна транспортна задача може бути розв’язана як дві одноетапні. В іншому разі окремі оптимальні плани двох задач не збігатимуться з оптимальним планом загальної задачі.

Метод розв’язування двоетапної транспортної задачі, розроблений Орденом—Маршем, полягає у врахуванні місткостей посередників двічі — як постачальників і як споживачів. Умови задачі подаються у вигляді таблиці, в рядках якої записані дані про постачальників, а також про посередницькі фірми, а в стовпцях — знову дані про посередників і споживачів. У клітинах, які перебувають на перетині рядків-постачальників і стовпців-споживачів, запишемо реальні витрати на перевезення одиниці продукції. В діагональних клітинах на перетині рядків і стовпців, які відповідають посередницьким фірмам, поставимо нульові величини витрат. Всі останні клітини таблиці блокуємо, тобто вартості перевезень дорівнюють деякому досить великому числу M. Під час розв’язування задачі в цих клітинах не будуть міститися обсяги перевезень продукції, що відповідає умовам двоетапної транспортної задачі.

Приклад 4.6. Виробниче об’єднання складається з трьох філіалів A_1, A_2, A_3, які виготовляють однорідну продукцію в кількості 1000, 15 000, 1200 од. на місяць відповідно. Ця продукція відправляється на два склади D_1, D_2 місткістю 2500 і 1200 од., а потім — до п’яти споживачів B_1, B_2,…, B_5, попит яких становить 900, 700, 1000, 500 і 600 од. відповідно. Вартість перевезення одиниці продукції (в ум. од.) від виробника на склад, а потім зі складів — до споживачів, наведено в таблицях.

A_i	Вартість, ум. од., перевезення1000 т бензину від виробника на склад	
	D_1	D_2
A_1	2	8
A_2	3	5
A_3	1	4

Завод	Вартість, ум. од., перекачування 1000 т бензину до сховищ				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
D_1	1	3	8	5	4
D_2	2	4	5	3	1

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції з першого філіалу до другого споживача, а також з третього філіалу — до четвертого споживача. Вартість транспортування одиниці продукції та транзитним маршрутом A_1B_2 дорівнює 3 ум. од., а за маршрутом A_3B_4 — 4 ум. од. Перевезення продукції зі складу на склад неприпустиме.

Сформулювати поставлену задачу як транспортну задачу з проміжними пунктами (двоетапну) та визначити її оптимальний план.

Розв’язування. У поставленій задачі кожний склад можна подати як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому в транспортній таблиці вони відіграють роль і постачальника продукції, і її споживача.

Перевезення продукції безпосередньо від філіалів до споживачів (крім випадків, визначених в умові задачі), а також зі складу на склад блокується за допомогою досить великої вартості *M*.

Побудовану з урахуванням цього транспортну таблицю двоетапної задачі наведено далі.

A, *D*	*D*, *B*							u_i
	d_1 = 2500	d_2 = 1200	b_1 = 900	b_2 = 700	b_3 = 1000	b_4 = 500	b_5 = 600	
a_1= 1000	*2* 1000 –	8	M	3 + 0	M	M	M	u_1= 0
a_2= 1500	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	u_2= 1
a_3= 1200	1 1200	4	M	M	M	4 1	M	u_3= –1
d_1= 2500	0 2 +	M	1 900	*3* – 700	8 900	5 1	*4*	u_4= 0
d_2= 1200	M	0 1	2	*4*	5 100	3 500	*1* 600	u_5= –3
v_j	v_1= 2	v_2= 4	v_3= 1	v_4= 3	v_5= 8	v_6= 6	v_7= 4	

Отже,

$$Z_1 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 1200 + 1 \cdot 900 + 3 \cdot 700 + 8 \cdot 900 +$$
$$+ 5 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + 1 \cdot 600 = 22900 \text{ ум. од.}$$

Зауважимо, що в клітинках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це допускає можливість неповного використання складських приміщень у зв’язку з можливим транзитним транспортуванням продукції.

Поставлена транспортна задача є збалансованою, тобто

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000 + 1500 + 1200 = 3700 \text{ од.};$$
$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 900 + 700 + 1000 + 500 + 600 = 3700 \text{ од.},$$

і тому немає потреби вводити до транспортної таблиці фіктивного постачальника чи споживача.

Перший опорний план транспортної задачі побудовано за методом мінімальної вартості.

Перший опорний план задачі неоптимальний. Перехід від нього до другого плану виконуємо, заповнюючи порожню клітинку D_1D_1 згідно з побудованим циклом.

A, *D*	*D*, *B*							u_i
	d_1 = 2500	d_2 = 1200	b_1 = 900	b_2 = 700	b_3 = 1000	b_4 = 500	b_5 = 600	
a_1= 1000	*2* 300	8	M	3 700	M	M	M	u_1= 0
a_2= 1500	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	u_2= 1
a_3= 1200	1 1200 –	4	M	M	M	4 3 +	M	u_3= –1
d_1= 2500	0 700 +	M	1 900	*3*	8 900 –	5 1	*4*	u_4= 0
d_2= 1200	M	0	2	*4*	5 100 +	3 – 500	*1* 600	u_5= –3
v_j	v_1= 2	v_2= 4	v_3= 1	v_4= 3	v_5= 8	v_6= 6	v_7= 4	

Отже, $Z_1 = 2 \cdot 300 + 3 \cdot 700 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 1200 +$
$+ 1 \cdot 900 + 8 \cdot 900 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + 1 \cdot 600 = 21500$ ум. од.

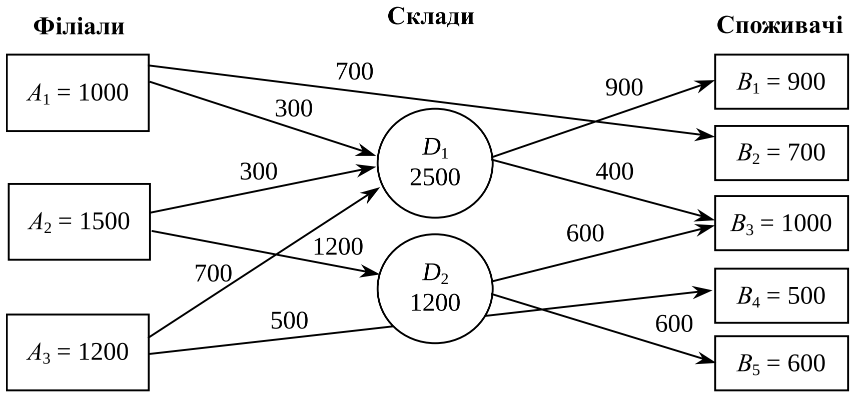
Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, матиме такий вигляд:

A, D	D, B							u_i
	$d_1 = 2500$	$d_2 = 1200$	$b_1 = 900$	$b_2 = 700$	$b_3 = 1000$	$b_4 = 500$	$b_5 = 600$	
$a_1 = 1000$	*2* 300	8	M	3 700	M	M	M	$u_1 = 0$
$a_2 = 1500$	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	$u_2 = 1$
$a_3 = 1200$	1 700	4	M	M	M	4 500	M	$u_3 = -1$
$d_1 = 2500$	0 1200	M	1 900	*3*	8 400	5	*4*	$u_4 = 0$
$d_2 = 1200$	M	0	2	*4*	5 600	3	*1* 600	$u_5 = -3$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

В останній таблиці маємо оптимальний план транспортної задачі:

$$Z_{\min} = 2 \cdot 300 + 3 \cdot 700 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 700 + 4 \cdot 500 + \\ + 1 \cdot 900 + 8 \cdot 400 + 5 \cdot 600 + 1 \cdot 600 = 20000 \text{ ум. од.}$$

Для більшої наочності оптимальний план перевезення продукції двоетапної транспортної задачі подамо у вигляді схеми.



Зі схеми бачимо, що на перший склад надходить лише 300 + 300 + 700 = 1300 од. продукції, тобто його місткість використовується не повністю (D_1D_1 = 1200 од.). Це виникає внаслідок прямих поставок продукції за маршрутом A_1B_2 у кількості 700 од. і A_3B_4 — у кількості 500 од.

Розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план, який відрізняється від першого лише в частині, що стосується перевезення продукції зі складів до третього і п’ятого споживачів.

Поряд із розглянутою у транспортних задачах із проміжними пунктами можуть зустрічатися також такі ситуації.

1. Незбалансованість транспортної задачі ($\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$). У цьому разі слід увести або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача, звівши задачу до закритого типу.

2. Місткість проміжних пунктів не відповідає загальному обсягу продукції постачальників: а) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{k} b_j$ (у цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт і кількість продукції, що перевозитиметься до нього, має означати невивезену частину продукції відповідного постачальника, або дозволити транзитні перевозки за обсягом не менш як $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{k} d_j$ (од.)); б) коли $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{k} d_j$ (у цьому разі немає потреби вводити фіктивного постачальника і заздалегідь зрозуміло, що місткість проміжних пунктів повністю не використовуватиметься).

3. Місткість проміжних пунктів не відповідає загальній потребі споживачів: а) $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{k} d_j$ (у цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт і кількість продукції, що перевозитиметься від нього до споживача B, має означати незадоволений попит відповідного споживача, або

дозволити пряме перевезення продукції від постачальників до споживачів за обсягом не менш як $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{k} d_i$ (од.)); б) $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{k} d_i$ (аналогічно п. 2б).

4.8. Транспортна задача за критерієм часу

У деяких умовах, наприклад, під час перевезення продукції, що швидко псується; матеріалів для аварійних і рятівних робіт та ін. вартість перевезень має другорядне значення, а на перше місце виходить завдання мінімізації того часу, протягом якого здійснюються всі перевезення. Так виникає транспортна задача за критерієм часу.

Нехай задано m пунктів постачання A_1, A_2, A_m з відповідними запасами $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць продукції та n споживачів $B_1, B_2, ..., B_n$, потреби яких становлять $b_1, b_2, ..., b_n$, причому $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Позначимо x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника j-му споживачеві.

Задано також затрати часу t_{ij} на здійснення перевезень від кожного постачальника A_i до кожного споживача B_j. Припускається, що вони не залежать від обсягу перевезень x_{ij}.

Необхідно знайти оптимальний план перевезень $X^* = (x_{ij})$ такий, що задовольняє умови:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \tag{4.28}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \tag{4.29}$$

крім того, час, який витрачений на всі перевезення T, був би мінімальним.

Оскільки всі перевезення закінчуються в той момент, коли закінчується найдовше перевезення, то T є максимальне з усіх можливих значень t_{ij}, що відповідають ненульовим перевезенням ($x_{ij} > 0$): $T = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij}$.

Критерій оптимальності плану — мінімальний час здійснення всіх перевезень:

$$\min T = \max_{x_{ij} > 0} t_{ij}. \tag{4.30}$$

Зауважимо, що поставлена задача не є задачею лінійного програмування, оскільки цільова функція (4.30) даної задачі не є лінійною функцією від змінних задачі x_{ij}.

Однак для розв’язування транспортної задачі за критерієм часу можна використовувати ті самі методи розв’язування, що були розглянуті для транспортної задачі лінійного програмування.

Розглянемо алгоритм розв’язування сформульованої задачі, що ґрунтується на послідовному розв’язуванні ряду допоміжних задач, розглянутих в угорському методі.

1. Пошук мінімальних елементів матриці t_{ij}. Позначимо мінімальний елемент, знайдений на першому кроці t_1. Клітини транспортної таблиці, які відповідають мінімальному елементу, тобто де $t_{ij} = t_1$, вважаються відкритими для перевезень, тоді як усі інші, де $t_{ij} > t_1$, вважаються для них забороненими.

2. Розв’язується додаткова задача з визначеною множиною заборонених для перевезень клітин Ω_1. Якщо після цього кроку задовольняються умови задачі (4.28), (4.29), тоді оптимальний план знайдено, і $T = t_1$, а якщо ні, то переходимо до третього кроку.

3. Аналогічно першому кроку знову знаходимо мінімальний елемент серед тих елементів t_{ij} матриці тривалості перевезень T, які відповідають клітинам, забороненим для перевезень. Нехай ним буде елемент величиною t_2. Тоді всі ті клітини, для яких $t_{ij} = t_2$, приєднуються до клітин, відкритих для перевезень.

4. Аналогічно другому кроку розв’язується нова допоміжна задача з новою множиною клітин, заборонених для перевезень $\Omega_2 (\Omega_1 \subset \Omega_2)$, і перевіряються умови (4.28), (4.29). Якщо вони задовольняються, то знайдений план оптимальний і $T = t_2$. Якщо ж ні, то дії, аналогічні до описаних, повторюють, поки не буде знайдено оптимальний план.

Алгоритм скінченний, оскільки за умови балансу $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ таблиця перевезень без заборонених клітин завжди може бути заповнена, а алгоритм забезпечує в разі потреби звільнення всіх клітин від заборони на перевезення.

Приклад 4.7. Нехай умови транспортної задачі задано таблицею.

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1	3	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1	3
$a_3 = 20$	3	2	8	4
$a_4 = 9$	1	4	3	2

1. Знаходимо мінімальний елемент з t_{ij}, у даному випадку це 1, позначимо його $t_1 = 1$.

2. Розв'язуємо допоміжну задачу, в якій забороненими для перевезень є всі клітини, для яких $t_{ij} > t_1$ (у таблиці іншим кольором виділені заборонені клітини).

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8			
$a_2 = 11$			1 16	
$a_3 = 20$				
$a_4 = 9$	1 –			

Задача розв'язана, проте план неоптимальний.

3. Знаходимо наступний мінімальний елемент серед клітин, що є забороненими для перевезень. Наступний мінімальний елемент дорівнює двом. Отже, $t_2 = 2$.

4. Приєднуємо до відкритих для перевезень клітин ті, для яких $t_{ij} = 2$, і знову розв'язуємо допоміжну задачу.

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8			
$a_2 = 11$	2		1 11	
$a_3 = 20$		2 12		
$a_4 = 9$	1			2 9

Знайшовши розв'язок задачі, також не отримали оптимального плану.

5. Обираємо наступний мінімальний елемент: $t_3 = 3$.

6. Розв'язуємо таку допоміжну задачу:

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3 2		5
$a_2 = 11$	2		1 11	3
$a_3 = 20$	3	2 10		
$a_4 = 9$	1		3	2 9

що також не дає оптимально розв'язку.

7. Обираємо $t_4 = 4$.

8. Розв'язуємо задачу:

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3 2	4	
$a_2 = 11$	2	5	1 11	3
$a_3 = 20$	3	2 10		4 10
$a_4 = 9$	1	4	3 5	2 4

що й дає оптимальний план задачі. Отже, *min T* = 4.

4.9. Розв'язування транспортної задачі на мережі

Серед сучасних методів оптимізації і керування виробничими процесами значна роль належить сітьовим методам. Великий клас задач математичного програмування можна подати в сітьовому завданні. Особливо це стосується транспортних задач, які мають цілком природну інтерпретацію як сітьові задачі, пов'язані з певною мережею транспортних маршрутів (доріг, залізничних, водяних шляхів, маршрутів повітряних трас, трубопроводів та ін.). У цьому параграфі буде розглянуто кілька характерних сітьових задач математичного програмування.

Назвемо *графом* будь-яку систему відрізків (прямолінійних чи криволінійних), певним способом з'єднаних між собою (рис. 4.1).

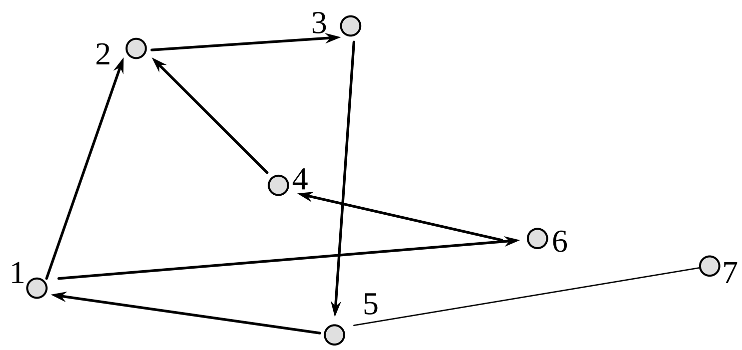


Рис. 4.1

Названі відрізки, якщо їм приписано напрям, називаються *дугами графа*; надалі позначатимемо їх $u_{ij}(i, j = \overline{1, m})$, наприклад: $u_{1,2}$ — відрізок, що з'єднує точку 1 з точкою 2 (див. рис. 4.1).

Точки, що є кінцями або початком дуг графів, в яких можуть з'єднуватись дві дуги або більше, називаються *вершинами графа*: кожна з вершин позначається певним номером (натуральним числом 1, 2, 3, 4 ...), наприклад, точки 1, 2, 3, ..., (див. рис. 4.1).

Отже, кожній дузі відповідає впорядкована пара вершин (i, j), де перший індекс i означає початок дуги (вхід), другий індекс j – кінець дуги (вихід); тим самим задано орієнтацію (напрям) дуги, що геометричне зображається стрілкою у напрямі від початку до кінця дуги.

Дуги $(i = s, j = r)$ і $(i = r, j = s)$ називаються *симетричними*, або *взаємними*, наприклад: (2, 4), (4, 2).

Ребром (або *ланкою*) *графа* називається ненапрямлений відрізок, що зображає дугу. Позначимо ребра символами $[ij] = [ji]$, тоді як для відповідних дуг ця рівність не справджується: $(ij) = (ji)$.

Мережею (або *сіттю*) називається граф, елементам якого (дугам, вершинам, деяким їх сукупностям) поставлені у відповідність деякі параметри, що визначають їх властивості.

Такими параметрами можуть бути, наприклад, пропускні здатності шляхів, величина запасів чи потреб у певних пунктах — вершинах графа й ін.

Шляхом у графі називається послідовність дуг $(u_1, u_2, ..., u_l)$, кінець кожної з яких збігається з початком наступної, крім останньої (або початок кожної з яких збігається з кінцем попередньої, крім першої), тобто $(i_0 j_0), (i_1 j_0), (i_1 j_1), ..., (i_n j_n)$.

Шлях зручно позначити послідовністю вершин, через які він проходить, тобто $(i_0, i_1, ..., i_k)$. Прикладом шляху є послідовність таких вершин (1, 2), (2, 3), (3, 5) або (1,2, 3, 5).

Контуром називається шлях, початкова вершина якого збігається з кінцевою, наприклад, (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 1) = (1, 2,3,5, 1).

Граф називається сильно зв'язаним, якщо будь-які його вершини *i* і *j* можна з'єднати шляхом, що йде з *i* у *j*.

Якщо в означеннях шляху, контуру і сильної зв'язаності графа поняття дуги замінити поняттям ребра, то дістанемо означення ланцюга, циклу і зв'язаності графа.

Легко зрозуміти, що ребра дуг, які утворюють шлях і контур, завжди утворюють, відповідно, ланцюг і цикл, проте обернене твердження не має сили. Це саме стосується і зв'язаності: зв'язаний граф не обов'язково буде міцно зв'язаним.

Ланцюг і *цикл* позначають аналогічно до шляху і контуру, проте замість круглих вживаються квадратні дужки, наприклад: ланцюг [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 6], або [1, 2, 3, 4, 6] цикл [1, 2]. [2, 3], |3, 4], [4, 6], [6, 1], або [1, 2, 3, 4, 6, 1]; відповідні послідовності дуг не є шляхами і контурами.

Деревом називається граф, який не має циклів і в якому кожна вершина зв'язана з будь-якою іншою деяким ланцюгом ребер.

4.9.1. Транспортна задача у мережевій формі. Нехай задано граф із скінченим числом вершин і ребер. Поставимо у відповідність кожній вершині деяке число α_i *(i* = 1, 2, ..., *m),* яке назвемо інтенсивністю *i*-ї вершини, а кожній дузі *(ij)* число k_{ij} — пропускну здатність *(ij)*-ї дуги, відносячи ці величини до певного відрізка часу *t*(0<t<$+\infty$). За цих умов скінчений граф перетворюється на мережу (сіть).

Позначимо x_{ij} невідому величину, що означає кількість деякої продукції, яка переноситься по *(ij)*-й дузі за деякий відрізок часу. Тоді за цей самий час для кожної *k*-ї вершини можна записати балансову рівність

$$-\sum_{i=1}^{m_k} x_{ik} + \sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} = \alpha_k, \ (k = \overline{1, m}). \tag{4.31}$$

Справді, перша сума означає сумарну кількість згаданої продукції, яка протягом означеного часу прибуває в *k*-ту вершину по m_k дугах, друга сума означає сумарну кількість цієї речовини, яка вибуває по n_k дугах з *k*-ї вершини за той самий час, так що $\alpha_k < 0$ є кількість розглядуваної продукції, яка споживається (акумулюється) в *k*-ї вершині, а $\alpha_k > 0$ є кількість цієї продукції, яка виділяється (продукується) вершиною за згаданий відрізок часу. Вершину, для якої $\alpha_i < 0$, називатимемо *стоком*, а вершину, для якої $\alpha_i > 0$ — *джерелом*. Вершини, в яких $\alpha_i = 0$, назвемо *нейтральними*.

Природно вважати змінні x_{ik} і x_{jk} невід'ємними і обмеженими зверху числами λ_{ik} і λ_{jk}, так, що

$$0 \le x_{ij} \le \lambda_{ij}. \tag{4.32}$$

Можна вважати, що величини α_i і λ_{ij} можуть змінюватися в таких межах:

$$0 \le |\alpha_i| < +\infty; 0 \le \lambda_{ij} < +\infty. \tag{4.33}$$

Рівняння (4.31) можна трактувати як рівняння безперервності потоку розглядуваної продукції по певній мережі (доріг, трубопроводів і т. п.) у деякому околі *k*-ї вершини (пункту). Прикладом може бути рівняння збереження кількості рідини, що проходить по трубопровідній мережі.

Можна поставити вимогу, щоб за заданих величин інтенсивності джерел і стоків α_i і величин пропускних здатностей дуг λ_{ij} знайдені значення невідомих x_{ij} задовольняли деякий критерій оптимальності, наприклад, надавали мінімуму лінійної функції

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{4.34}$$

Легко побачити, що сформульована сітьова транспортна задача (4.31)—(4.34) є узагальненням звичайної транспортної задачі (4.1)—(4.4) на випадок наявності проміжних пунктів перевезень та обмежених пропускних здатностей шляхів сполучення.

4.9.2. Метод потенціалів на мережі. Розглянемо без доведення розв'язування транспортної задачі на сітці методом потенціалів. Зобразимо задачу у вигляді сітки (рис. 4.2), де на кожній дузі підкресленою цифрою позначено вартість перевезення. Для спрощення вважатимемо цю вартість однаковою в обох напрямках ребра, а пропускні здатності ребер — необмеженими зверху. Зауважимо, що $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 0$.

Пункти відправлення і запаси на них позначимо відповідними цифрами (що дорівнюють запасам) зі знаком «+», а пункти доставки — цифрами, що дорівнюють потребам, зі знаком «–» (стоять у дужках). У кружечках позначені відповідні вартості перевезень одиниці продукції. На першому етапі складаємо початковий план перевезень: напрям вантажопотоків показуємо стрілками, а кількість вантажів — цифрою над/під відповідною стрілкою.

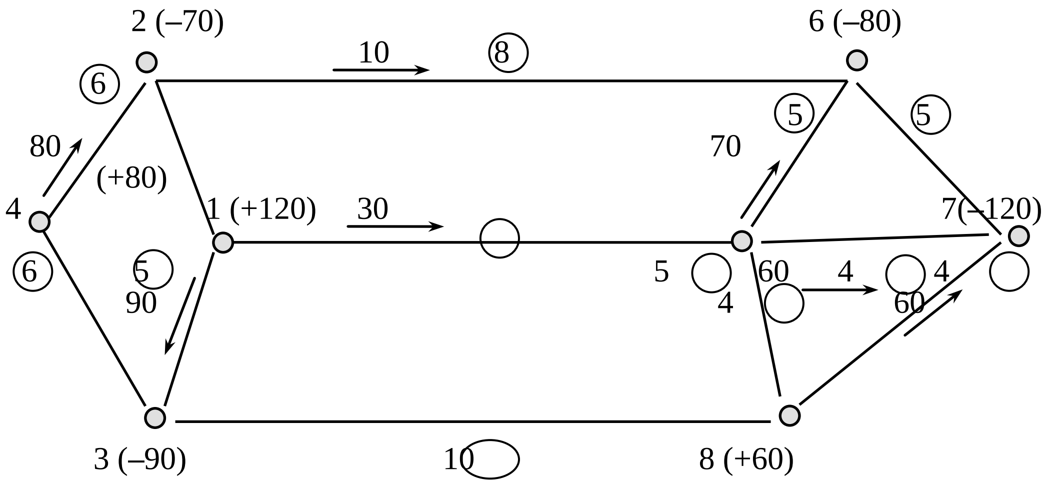


Рис. 4.2

Як видно з рис.4.2, початковий план утворюють змінні

$$x_{13} = 90, x_{15} = 30, x_{42} = 80, x_{26} = 10, x_{56} = 30,$$
$$x_{87} = 60, x_{57} = 60, x_{12} = x_{34} = x_{38} = x_{76} = x_{58} = 0.$$

Якщо сіть містить m вершин, то система (4.31) складається з m рівнянь, а її ранг має дорівнювати $m-1$. Для нашого прикладу план містить рівно $m-1=8-1=7$ відмінних від 0 базисних змінних, отже, він невироджений.

Скористаємося без доведення теоремою із [28]. Для того щоб деяка частина графа відповідала базисним змінним задачі (4.31)—(4.33), необхідно і достатньо, щоб вона була деревом.

У нашому прикладі початковий план не утворює контурів, тобто відповідає множині базисних змінних, отже,є опорним планом задачі.

На другому етапі для кожної вершини визначаємо потенціал. Перший потенціал вибираємо довільно, найчастіше з певних міркувань зручності у дальших обчисленнях; прив'язуємо його до довільної вершини, наприклад, до першої. Потенціали інших вершин визначаємо, виходячи з першого потенціалу, а саме: потенціали вершин, з'єднаних дугами з першою, прирівнюємо різниці першого потенціалу і вартості перевезення від першої вершини до заданої, якщо вантаж іде в цьому напрямі, і, відповідно, сумі потенціалу першої вершини і вартості перевезення з сусідньої вершини в першу, якщо саме в цьому напрямі перевозиться вантаж. Таким чином, потенціали всіх вершин розглядуваної мережі визначаються такими цифрами:

$$u_1^{(0)} = 10,\ u_5^{(0)} = 3,$$
$$u_2^{(0)} = 6,\ u_6^{(0)} = -2,$$
$$u_3^{(0)} = 5,\ u_7^{(0)} = -1,$$
$$u_4^{(0)} = 12,\ u_8^{(0)} = 3.$$

Третій етап полягає у перевірці плану на оптимальність, причому використовується звичайна ознака оптимальності плану транспортної задачі, яка формулюється в термінах і позначеннях транспортної задачі на сітці. Для ребер мережі, вільних від перевезень, тобто для $x_{ij} = 0$, невід'ємна різниця потенціалів вершин, які їх обмежують (стоять на їх кінцях), повинна бути меншою від відповідної вартості перевезення або дорівнювати їй. Складаємо відповідні співвідношення

$$u_4^{(0)} - u_3^{(0)} = 12 - 5 = 7 > 6,$$
$$u_1^{(0)} - u_2^{(0)} = 10 - 6 = 4 < 5,$$
$$u_3^{(0)} - u_8^{(0)} = 5 - 3 = 2 < 10,$$
$$u_5^{(0)} - u_8^{(0)} = 3 - 3 = 0 < 4,$$
$$u_7^{(0)} - u_6^{(0)} = -1 - (-2) = 1 < 3.$$

Для базисних ребер відповідні різниці точно дорівнюють вартостям перевезень, що є однією з умов оптимальності плану транспортної задачі. Отже, умова оптимальності порушена лише один раз на ребрі (4; 3). Якщо таких порушень більше ніж одне, то вибираємо ребро з найбільшим порушенням.

Утворимо цикл з базисних ребер і небазисного ребра (4; 3), що проходить через вершини (4, 3, 1, 5, 6, 2, 4). Напрям обходу збігається з напрямом потоку, який планується ввести по ланці (4; 3) від вершини 4 до вершини 3, оскільки маємо нерівність $u_4^{(0)} > u_3^{(0)}$. Отже, обходимо цикл проти руху стрілки годинника.

Обмеження (4.31) не будуть порушені, якщо ми, вибравши в цьому циклі найменший зустрічний потік у ланці (2; 6), віднімемо його величину від зустрічних потоків у ланках циклу і додаватимемо до потоків, що мають напрям обходу. Тоді ланка (2; 6) стає вільною від потоку, а ланка (4; 3) – базисною (рис. 4.3).

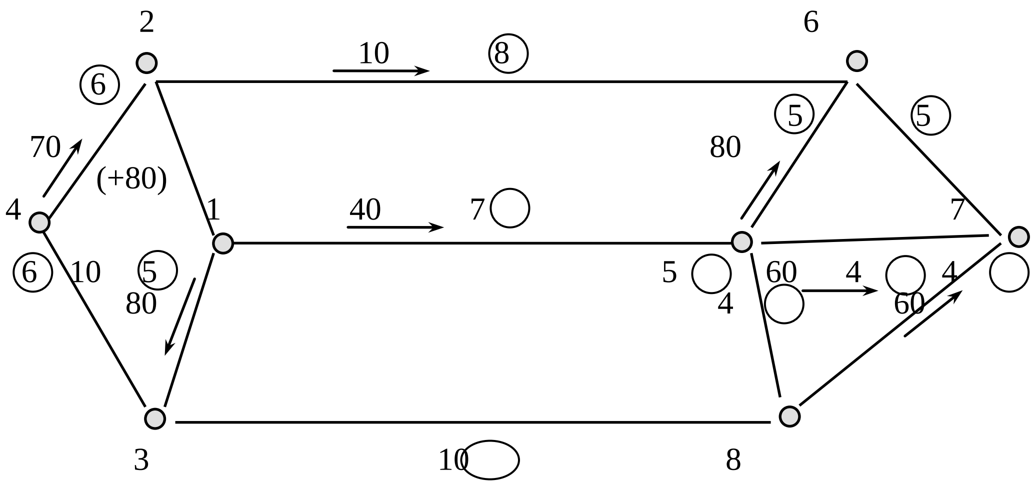


Рис. 4.3

Перевіримо план на оптимальність. Для цього визначимо нову систему потенціалів, виправивши попередню:

$$u_1^{(1)} = u_1^{(0)} = 10,\ u_5^{(1)} = u_5^{(0)} = 3,$$
$$u_2^{(1)} = 11 - 6 = 5,\ u_6^{(1)} = u_6^{(0)} = -2,$$
$$u_3^{(1)} = 10 - 5 = 5 = u_3^{(0)},\ u_7^{(1)} = u_1^{(0)} = -1,$$
$$u_4^{(1)} = 5 + 6 = 11,\ u_8^{(1)} = u_8^{(0)} = 3.$$

Перевірку слід зробити лише для тих вільних ребер, для яких хоча б в одній з вершин змінилося значення потенціалу, а саме — для (1, 2), (2, 6):

$$u_1^{(1)} - u_2^{(1)} = 10 - 5 = 5 = 5,$$
$$u_2^{(1)} - u_6^{(1)} = 5 - (-2) = 7 < 8.$$

Отже, всі умови оптимальності задовольняються та оптимальний план знайдено:

$$x_{12}^* = x_{26}^* = x_{38}^* = x_{67}^* = x_{58}^* = 0,\ x_{13}^* = 80, x_{43}^* = 10,$$
$$x_{42}^* = 70, x_{15}^* = 40, x_{56}^* = 80, x_{57}^* = 60, x_{87}^* = 60.$$

Зауважимо, що під час розв'язування наведеної сітьової задачі методом потенціалів можуть траплятися випадки виродження. Ознакою виродження є план, що складається з двох або більше окремих дерев базисних ребер, не поєднаних між собою. Для усунення цього треба ввести в базис вільну ланку, яка поєднувала б указані дерева базисних ланок між собою.

Таким чином, методом потенціалів розв'язано сітьову транспортну задачу з проміжними пунктами і заборонами на перевезення між деякими пунктами, тобто відсутністю в мережі відповідних ребер (шляхів); проте ми вважали, що пропускні здатності ребер необмежені зверху.

Отже, зазначений алгоритм придатний лише в тому випадку, коли знайдені за оптимальним планом перевезення не перевищують реальних пропускних здатностей реальних ланок транспортної мережі, які завжди обмежені зверху.

У літературі [28, 9] можна знайти детальніший опис розв'язування сітьової транспортної задачі.

4.10. Приклади економічних задач, що зводяться до транспортних моделей

Транспортна задача часто використовується для розв'язування економічних задач, які за умовою не мають нічого спільного з транспортуваннями вантажів і величини c_{ij} можуть залежно від конкретної задачі означати відстань, час, продуктивність тощо. Наведемо економічну постановку найбільш типових задач, що зводяться до транспортної моделі.

Оптимальний розподіл обладнання. Домовимося для спрощення, що розглядається модель закритої транспортної задачі (будь-яка відкрита задача зводиться до закритої перетвореннями, розглянутими в п. 4.5).

Обладнання m різних видів необхідно розподілити між n робочими ділянками. Продуктивність однієї одиниці обладнання i-го виду на j-й робочій ділянці дорівнює p_{ij}, $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$. Відомі потреби кожної j-ї ділянки в обладнанні, що становлять b_j $(j=\overline{1,n})$, а також запаси обладнання кожного i-го виду — a_i $(i=\overline{1,m})$. Необхідно знайти оптимальний розподіл обладнання по робочих ділянках, при якому сумарна продуктивність виробництва буде максимальною.

Дана задача зводиться до транспортної за умови, що продуктивність лінійно залежить від кількості використаного обладнання. Постачальниками в задачі є види обладнання, а споживачами — робочі ділянки. Запаси постачальників — кількість обладнання кожного виду, потреби споживачів — вимоги на наявність обладнання для кожної робочої ділянки.

Нехай x_{ij} — кількість одиниць обладнання i-го виду, що буде виділено на j-ту робочу ділянку $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$. Сумарна продуктивність виробництва буде $F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}p_{ij}$. Оскільки запаси кожного типу обладнання обмежені, маємо $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i$, $(i=\overline{1,m})$. З іншого боку, потреби кожної ділянки в обладнані є також фіксованими, тому $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j$, $(j=\overline{1,n})$. Таким чином, доходимо до математичної моделі транспортної задачі:

$$max\, F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}p_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,(i=\overline{1,m}),\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,(j=\overline{1,n}),\\ x_{ij}\geq 0,(i=\overline{1,m}),(j=\overline{1,n}).\end{cases}$$

У даній задачі необхідно максимізувати значення цільової функції F. Для переходу до стандартної транспортної моделі слід замінити функцію F на протилежну функцію $F'=-F$, яку треба мінімізувати:

$$\min F'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-p_{ij}x_{ij}).$$

Під час розв'язування транспортної задачі використовуються взяті з протилежним знаком значення продуктивності p_{ij}, після чого розв'язок знаходимо одним із відомих методів.

Приклад 4.7. Розглянемо приклад економічної постановки задачі про оптимальний розподіл обладнання.

Машинно-тракторний парк, який обслуговує кілька фермерських господарств, налічує 23 трактори, у тому числі

Бєларусь МТЗ-80 — 8 од.;

ЮМЗ-6АЛК — 10 од.;

MEZZO 6100 — 5 од.

Одночасно надійшли замовлення з трьох фермерських господарств із такими потребами: 10, 5 і 5 од. техніки. Залежно від виконуваних робіт і технологічних особливостей ґрунтів господарств продуктивність виконання робіт указаними видами техніки у кожному з господарств є різною і подається у такій таблиці:

Види техніки	Продуктивність техніки по господарствах, еталонних 10 м² на добу		
	I господарство	II господарство	III господарство
Бєларусь МТЗ-80	50	63	59
ЮМЗ-6АЛК	49	56	50
MEZZO 6100	61	58	62

Визначити оптимальний розподіл техніки по господарствах.

Для розв'язування задачі скористались методом потенціалів. Задача належить до відкритого типу: кількість наявної техніки 23 од., а потреби — 20 од., тому необхідно ввести фіктивного споживача (четверте господарство) з потребою 3 од. техніки.

Усі значення продуктивності техніки з наведеної таблиці використовуємо у розв'язуванні задачі з протилежним знаком.

Застосовуючи метод потенціалів, матимемо оптимальний план розподілу техніки, що наведено у таблиці.

Види техніки	Продуктивність техніки по господарствах, еталонних 10 м² на добу			
	I господарство (10 од.)	II господарство (5 од.)	III господарство (5 од.)	(3 од.)
Бєларусь МТЗ-80 (8 од.)	–50	–63 **3**	–59 **5**	0
ЮМЗ-6АЛК (10 од.)	–49 **5**	–56 **2**	–50	0 **3**
MEZZO 6100 (5 од.)	–61 **5**	–58	–62	0

За оптимальним планом кожне господарство одержує потрібну кількість одиниць техніки, однак, оскільки це задача відкритого типу, тоді значення $x_{34}^* = 3$, яке відповідає фіктивно введеному споживачеві, означає, що трактори виду ЮМЗ-6АЛК будуть розподілені не повністю. З 10 од. такої техніки розподілено 7.

Сумарне значення продуктивності — 1146 еталонних 10 м^2 на добу.

Задача про призначення. Потрібно виконати *n* видів робіт, на які претендують *n* кандидатів. Витрати *i*-го кандидата на виконання *j*-ї роботи дорівнюють $c_{ij}\,(i, j = \overline{1,n})$. Кожен кандидат може бути призначений лише на одну роботу і кожна робота має виконуватися лише одним кандидатом. Потрібно знайти оптимальне призначення кандидатів на виконання робіт, за якого сумарні витрати на їх виконання будуть мінімальними.

Нехай x_{ij} — дорівнює одиниці, якщо *i*-й кандидат виконує *j*-ту роботу, та дорівнює 0 в іншому випадку. Тоді умови, що кожен кандидат виконує лише одну роботу, запишемо у вигляді $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, $(j = \overline{1,n})$. Умова виконання кожної роботи лише одним кандидатом матиме вигляд $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$,

$(i=\overline{1,n})$. Цільова функція — мінімальна кількість сумарних витрат: $F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}c_{ij}$. Таким чином, маємо таку математичну модель транспортної задачі:

$$min\, F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}c_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,(i=\overline{1,n}),\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1,(j=\overline{1,n}),\end{cases}$$

$$x_{ij}\in\{0;1\},(i=\overline{1,n}),(j=\overline{1,n}).$$

Найзручнішим методом розв'язування задачі про призначення є угорський.

Приклад 4.8. Розглянемо приклад економічної постановки задачі про призначення.

Науково-дослідний інститут здобув гранти на виконання чотирьох дослідних проектів. Кінцеві результати першого проекту є початковими даними для другого проекту, кінцеві результати другого проекту — початковими для третього і кінцевий результат третього проекту — початковими значеннями для четвертого проекту. Виконавцями проектів є чотири відділи інституту. Кожен відділ оцінив час, який потрібно на виконання науково-дослідних робіт. Матриця затрат часу матиме вигляд

$$T=\begin{pmatrix}3&7&5&8\\2&4&4&5\\4&7&2&8\\9&7&3&8\end{pmatrix}.$$

В *i*-му рядку *j*-го стовпця матриці *T* проставлено час, потрібний на виконання *i*-м відділом *j*-го проекту. Затрати часу наведено в тижнях. Необхідно обрати відділи, які будуть працювати над проектами так, щоб сумарний час використаний для виконання всі проектів був мінімальним.

Для розв'язування задачі вводимо змінні $x_{ij}=1$, якщо *i*-й відділ призначено на виконання *j*-го проекту, і $x_{ij}=0$ в іншому випадку.

Розв'язуючи задачу угорським методом, матимемо два альтернативні оптимальні плани:

$$X1^{*}=(x_{11}=1,x_{22}=1,x_{33}=1,x_{44}=1),$$

тобто перший відділ призначено на виконання першого проекту ($x_{11}=1$);

другий відділ — на виконання другого проекту ($x_{22}=1$);

третій відділ — на виконання третього проекту ($x_{33}=1$);

четвертий відділ — на виконання четвертого проекту ($x_{44}=1$).

Причому загальний час на виконання чотирьох проектів дорівнює $F=3+4+2+8=17$.

Пропонуємо розглянути альтернативний план:

перший відділ призначено на виконання першого проекту ($x_{11}=1$);

другий відділ — на виконання четвертого проекту ($x_{24}=1$);

третій відділ — на виконання третього проекту ($x_{33}=1$);

четвертий відділ — на виконання другого проекту ($x_{42}=1$).

Причому загальний час на виконання чотирьох проектів дорівнює $F=3+5+2+7=17$.

Стислі висновки

Транспортна задача належить до розподільчих задач лінійного програмування, тому модель транспортної задачі можна використати для розв'язування задач, які не мають нічого спільного з транспортуванням вантажів, наприклад, задачі розподілення робіт між робітниками, розміщення сільськогосподарських культур за ділянками землі різної якості, оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей тощо.

Практичне застосування економіко-математичної моделі транспортної задачі наштовхується на відповідні труднощі. Насамперед, як правило, треба перевозити неоднорідні продукти. Тоді транспортна задача ускладнюється. Економіко-математичну модель для багатопродуктової транспортної задачі запишемо так:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}c_{ijk}x_{ijk}\to\min$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ijk}=a_{ik}$$
$$(i=\overline{1,m};\ k=\overline{1,r})$$
$$\sum_{i=1}^{m}x_{ijk}=b_{jk}$$
$$(j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,r})$$
$$x_{ijk}\geq 0,$$

де k — вид продукції, яку треба перевезти.

Часто господарські зв'язки між постачальниками і споживачами вимагають відповідних обмежень

$$\overline{d_{ij}}\leq x_{ij}\leq d_{ij}$$
$$(i\in M_1;\quad j\in M_2),$$

де M_1, M_2 — відповідні множини індексів i, j, за якими вводяться обмеження на обсяги перевезень i-ї продукції до j-го споживача. Обмеженнями $x_{ij}\geq\overline{d_{ij}}$ гарантується, що відповідний j-й споживач одержить i-ї продукції не менше від заданого обсягу. Обмеженнями виду $x_{ij}\leq d_{ij}$ описують транспортні можливості.

У класичній транспортній задачі, як правило, критерієм оптимальності є мінімізація транспортних витрат, тобто розв'язується задача на мінімум. Проте на практиці ймовірні випадки, коли потрібно знайти максимум цільової функції. Наприклад, необхідно розподілити робітників (верстати) між окремими видами робіт, щоб дістати максимальну сумарну продуктивність праці. Схожа ситуація трапляється під час оптимізації розміщення сільськогосподарських культур за ділянками землі різної якості. У цьому разі критерієм оптимальності є максимізація вартості вирощеної продукції.

У класичній транспортній задачі припускається, що витрати на транспортування лінійно залежать від обсягів перевезень. Але практично ця умова порушується, тобто такі зв'язки є нелінійними, стохастичними тощо.

Особливої уваги заслуговує така транспортна задача, в якій треба мінімізувати час виконання заданих обсягів робіт, наприклад, перевезення сировини і продукції, яка швидко псується. Цей критерій часто використовується під час оптимізації військових операцій, виконання сільськогосподарських робіт (збір урожаю) та ін.

Транспортна задача значно ускладнюється у виробничо-транспортних економічних системах, які виробляють продукцію і сировину в широкому асортименті, а для перевезення їх використовуються різні види транспорту.

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Дайте економічну і математичну постановку транспортної задачі.
2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?
3. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування розв'язку транспортної задачі.
4. Які властивості опорних планів транспортної задачі.
5. Чим відрізняється відкрита транспортна задача від закритої?
6. Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту?
7. Які ви знаєте методи побудови опорного плану?
8. Побудуйте невироджений опорний план методами північно-західного кута, мінімального елементу і подвійної переваги для такої транспортної задачі:

$$a_i=50,\ 70,\ 90;\qquad b_j=70,\ 65,\ 70,\ 75.$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Порівняйте ці плани.

9. Що означає вислів «виродження опорного плану»? Як його позбутися?
10. Назвіть етапи розв’язування методом потенціалів.
11. Як обчислюють потенціали?
12. Умова оптимальності транспортної задачі.
13. Дайте економічну і математичну постановку двоетапної транспортної задачі.
14. Назвіть особливості розв’язування транспортних задач з обмеженнями виду $\overline{d_{ij}} \le x_{ij} \le d_{ij}$.

Розв’язати транспортні задачі (4.1—4.5).

Задача 4.1

a_i= (8; 10; 5);
b_j = (5; 5; 10);

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.2

a_i= (8; 7; 6);
b_j = (7; 10; 6);

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.3

a_i= (15; 10; 5; 20);
b_j = (10; 20; 15);

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 12 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.4

a_i= (10; 20; 40);
b_j = (30; 10; 60);

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.5

a_i= (30; 35; 60);
b_j = (25; 25; 40; 30);

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Основні терміни та поняття

- Багатопродуктова транспортна задача
- Виробничо-транспортна задача
- Відкрита транспортна задача
- Закрита транспортна задача
- Критерій оптимальності — мінімум часу
- Метод мінімального елемента
- Метод північно-західного кута
- Метод подвійної переваги
- Мінімізація порожнього пробігу

- Обмеження на транспортування вантажів
- Критерії оптимальності
- Постачальники
- Потенціали
- Розподільча задача
- Споживачі
- Транспортна задача лінійного програмування
- Умова існування розв’язку транспортної задачі
- Фіктивні постачальники
- Фіктивні споживачі

Розділ 5

ТИПИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:

- ✓ область застосування цілочислових і дробово-лінійних задач в економіці;
- ✓ математичні постановки оптимізаційних задач цілочислового і дробово-лінійного програмування;
- ✓ геометричну інтерпретацію розв'язків цілочислових і дробово-лінійних задач на площині;
- ✓ методи розв'язку оптимізаційних цілочислових задач і задач дробово-лінійного програмування;
- ✓ комп'ютерні технології розв'язку цілочислових оптимізаційних задач за допомогою Microsoft Excel Solver;

а також УМІТИ:

- математично формулювати економічні умови оптимізаційних задач цілочислового і дробово-лінійного програмування;
- знаходити розв'язок цілочислових задач на основі методів Гоморі та методу гілок і меж;
- зводити задачі дробово-лінійного програмування до оптимізаційних задач лінійного програмування;
- розв'язувати задачі дробово-лінійного програмування симплекс-методом;
- розв'язувати цілочислові задачі за допомогою Microsoft Excel Solver.

5.1. Область застосування цілочислових і дробово-лінійних задач в економіці

Велика частина галузей економіки випускає продукцію чи послуги, які вимірюються цілими числами, це, наприклад, приладо- і машинобудування, легка промисловість та ін. Разом з тим в інших галузях, в яких продукція за специфікою не є цілочисловою застосовуються новітні технології виробництва і пакування. У результаті продукція, що випускається, має цілочисловий вимір, а це означатиме, що загальна лінійна модель, яка застосовується для планування обсягів виробництва, повинна включати обмеження на цілочислові значення невід'ємних змінних. Наявність таких обмежень ускладнює методи розв'язку задач оптимізації на підприємствах.

Тому підручник з економіко-математичних методів і моделей містить розділ, що вивчає математичну постановку та особливості розв'язування цілочислових задач, зводячи їх до лінійних. Також у підручнику значна увага приділяється і розв'язуванню дробово-лінійних задач оптимального планування. Необхідність математичної постановки і розв'язку таких задач пов'язана, перш за все, з економічною доцільністю.

Частина економічних показників вимірюється на основі певних співвідношень, що математично формалізуються як дробові числа (продуктивність праці, фондовіддача, ефективність інвестицій). Вони можуть використовуватись у задачах оптимізації як цільова функція. У таких випадках задача оптимізації стає нелінійною і вимагає використання певних процедур для зведення дробово-лінійної задачі до лінійної.

В економічних обґрунтуваннях дуже важливо використовувати не тільки абсолютні фінансові показники (дохід, прибуток, витрати), а й відносні (загальна рентабельність, рентабельність оборотних активів, собівартість реалізованої продукції). Відносні показники завжди адекватніше характеризують фінансові результати господарської діяльності, оскільки у дробово-лінійних задачах оптимізації вони не задаються як наперед заданими, а розраховуються залежно від оптимальних обсягів виробництва.

З викладеного можна зробити висновок, що дробово-лінійні та цілочислові задачі можуть дуже широко використовуватись в економічних розрахунках, їх застосування дасть можливість отримати оптимальний план з урахуванням особливостей економічної постановки задач на практиці.

Зауважимо також, що вивчення методів математичної постановки та алгоритмізації розв’язку оптимізаційних задач здійснюється за комп’ютерної підтримки, а це означає, що майбутні фахівці з економіки можуть на практиці використовувати свої знання з оптимізації планів.

5.2. Економічна постановка і математичні моделі задач із цілочисловими змінними

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських підприємствах тощо, тобто коли така вимога випливає з особливостей технології виробництва.

Зустрічаються також класи задач, які на перший погляд не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте формулюються як задачі цілочислового програмування. Вимоги дискретності змінних у явній чи неявній формах притаманні таким практичним задачам, як складання послідовності виробничих процесів; календарне планування роботи підприємства; планування і забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розрахунок капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Задача математичного програмування, змінні якої повинні набувати цілих значень, називається *задачею цілочислового програмування*. У випадках, коли цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається *частково цілочисловою*.

До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень — 0 або 1 (бульові, або бінарні, змінні).

Умова цілочисловості є нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. У даному розділі розглянемо задачі математичного програмування, в яких крім умови цілочисловості всі обмеження та цільова функція є лінійними, що мають назву *цілочислових задач лінійного програмування.*

Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{5.2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{5.3}$$

$$x_j \text{ — цілі } \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{5.4}$$

Слід зазначити, що розглянуті в попередньому розділі класична транспортна задача та інші задачі транспортного типу (задача про призначення, найкоротший шлях і т. ін.) з цілочисловими параметрами початкових умов забезпечують цілочисловий розв’язок без використання спеціальних методів. Однак у загальному випадку вимога цілочисловості змінних значно ускладнює розв’язування задач математичного програмування.

5.3. Геометрична інтерпретація розв'язків цілочислових задач лінійного програмування на площині

Для знаходження оптимального розв'язку цілочислових задач застосовують спеціальні методи. Найпростішим методом розв'язування цілочислової задачі є знаходження її оптимального розв'язку як задачі, що має лише неперервні змінні, з подальшим округленням останніх. Такий підхід є виправданим тоді, коли змінні в оптимальному плані набувають досить великих значень порівняно до одиниці їх виміру.

Нехай, наприклад, у результаті розв'язування задачі про поєднання галузей у сільськогосподарському підприємстві одержали оптимальну кількість корів — 1235,6. Округливши це значення до 1236, не припустимося значної похибки. Проте в деяких випадках такі спрощення призводять до істотних неточностей. Наприклад, множина допустимих розв'язків деякої нецілочислової задачі лінійного програмування матиме вигляд, поданий на рис. 5.1.

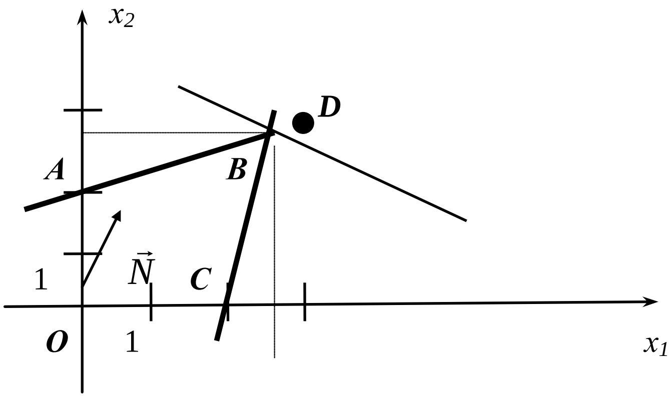


Рис. 5.1

Максимальне значення функціоналу для даної задачі знаходиться в точці *B*. Округлення дасть таке значення оптимального плану $x_1 = 3; x_2 = 3$ (точка *D* на рис. 5.1). Очевидно, що точка *D* не може бути розв'язком задачі, оскільки вона навіть не належить множині допустимих розв'язків (чотирикутник *OABC*), тобто відповідні значення змінних не задовольнятимуть систему обмежень задачі.

Зауважимо, що геометрично множина допустимих планів будь-якої лінійної цілочислової задачі являє собою систему точок з цілочисловими координатами, що розташовані в середині опуклого багатокутника допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі. Отже, для розглянутого на рис. 5.1 випадку множина допустимих планів складається з 9 точок (рис. 5.2), які утворені перетином сімейства прямих, що паралельні осям *Ox* і *Oy* і проходять через точки з цілими координатами 1, 2, ...

Для пошуку цілочислового оптимального розв'язку пряму, що відповідає цільовій функції, пересуваємо у напрямку вектора нормалі $\vec{N}$ до перетину з останнім вузлом утвореної цілочислової сітки. Цей вузол визначає точку, координати якої дають оптимальний цілочисловий розв'язок. У нашому прикладі оптимальний цілочисловий розв'язок відповідатиме точці *M* ($x_1 = 2; x_2 = 2$).

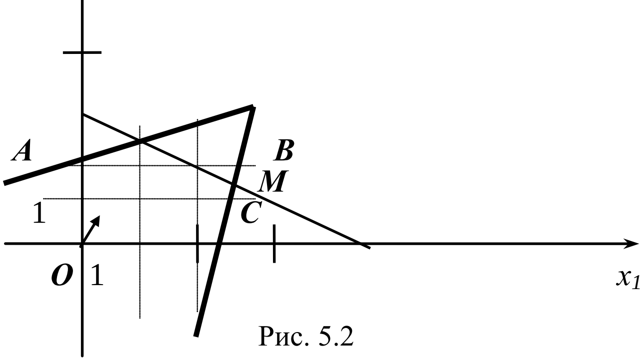


Рис. 5.2

Очевидно, особливість геометричної інтерпретації цілочислової задачі порівняно зі звичайною задачею лінійного програмування полягає лише у визначенні множини допустимих розв'язків.

Площина допустимих розв'язків загальної задачі лінійного програмування є опуклим багатогранником, вимога цілочисловості розв'язку веде до множини допустимих розв'язків, що складається з окремих точок. Тоді як для випадку двох змінних розв'язок можна відшукати графічним методом і використання цілочислової сітки дає можливість досить просто знайти оптимальний розв'язок, для загального випадку треба скористатись спеціальними методами.

5.4. Загальна характеристика методів розв'язування цілочислових задач лінійного програмування

Для пошуку оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів: відтинання; комбінаторні; наближені.

Основою методів відтинання є ідея поступового звуження площини допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими *послабленими обмеженнями*, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать методи:

а) розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідженням кожної окремої частини многокутника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також наближені методи розв'язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимального розв'язку або для розв'язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, часто в реальних задачах досить обмежитись наближеним розв'язком, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж.

До наближених методів відносяться: метод локальної оптимізації (метод вектора спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

Основними показниками для порівняння ефективності використання конкретного наближеного алгоритму на практиці є такі: абсолютна Δ_1 і відносна Δ_2 похибки отриманих наближених розв'язків.

$$\Delta_1 = F(X^*) - F(X_1),\ \Delta_2 = \frac{\left|F(X^*) - F(X_1)\right|}{\left|F(X^*)\right|},$$

де F — цільова функція (у даному випадку для визначеності припускаємо вимогу відшукання максимального її значення); X_1 — наближений розв'язок, знайдений деяким наближеним методом; X^* — оптимальний план задачі.

5.4.1. Методи відтинання. Метод Гоморі. В основу методів цілочислового програмування покладено ідею, що, ймовірно, можливо належить Данцигу.

Припустимо, що необхідно розв'язувати задачу лінійного програмування, всі або частина змінних якої мають бути цілочисловими. Можливо, якщо розв'язувати задачу, не враховуючи умову цілочисловості, випадково буде одразу отримано потрібний розв'язок. Однак така ситуація малоймовірна. У більшості випадків розв'язок не задовольнятиме умову цілочисловості. Тоді накладають додаткове обмеження, яке не виконується для отриманого плану задачі, проте задовольняє будь-який цілочисловий розв'язок. Таке додаткове обмеження називають *правильним відтинан-*

ням. Система лінійних обмежень задачі доповнюється новою умовою і далі розв’язується одержана задача лінійного програмування. Якщо її розв’язок знову не задовольняє умови цілочисловості, то будується нове лінійне обмеження, що відтинає отриманий розв’язок, не торкаючись цілочислових планів. Процес приєднання додаткових обмежень повторюють доти, доки не буде знайдено цілочисловий оптимальний план чи доведено, що його не існує.

Геометрично введення лінійних обмежень у систему задачі означає проведення гіперплощини (прямої), що відтинає від багатогранника (багатокутника) допустимих розв’язків ту частину, яка містить точки з нецілочисловими координатами, однак не торкається жодної цілочислової точки даної множини. В результаті новий багатогранник розв’язків містить всі цілі точки, які були в початковому, і розв’язок, що отримано на новому багатограннику буде цілочисловим (рис. 5.3).

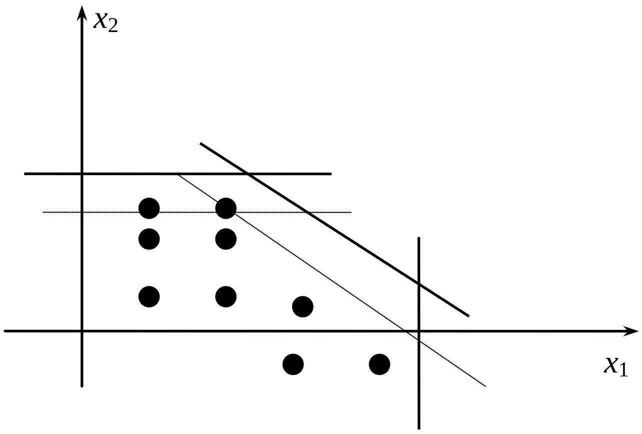


Рис. 5.3

Визначення правила для реалізації ідеї Данцига щодо формування додаткового обмеження виявилось досить складним завданням і першим, кому вдалось успішно реалізувати цю ідею, був Гоморі.

Розглянемо запропонований Гоморі алгоритм для розв’язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування, що ґрунтується на використанні симплексного методу і досить простий спосіб побудови правильного відтинання.

Нехай маємо задачу цілочислового програмування:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5.5}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{5.6}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{5.7}$$

$$x_j \text{ — цілі } \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{5.8}$$

Припустимо, що параметри $a_{ij}, b_i, c_j, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ — цілі числа.

Не враховуючи умови цілочисловості, знаходимо розв’язок задачі (5.5)—(5.7) симплексним методом. Нехай розв’язок існує і міститься в такій симплексній таблиці.

Базис	$C_б$	План	c_1	c_1	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
			x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
x_1	c_1	β_1	1	0	...	0	α_{1m+1}	...	α_{1n}
x_2	c_1	β_2	0	1	...	0	α_{2m+1}	...	α_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	c_m	β_m	0	0	...	1	α_{mm+1}	...	α_{mn}

Змінні $x_1, x_2, ..., x_m$ — базисні, а $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ — вільні. Оптимальний розв’язок задачі $X^* = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$.

Якщо $\beta_j (j=\overline{1,n})$ — цілі числа, то отриманий розв'язок є цілочисловим оптимальним розв'язком задачі (5.5)—(5.8). Інакше існує хоча б одне з чисел, наприклад, β_i — дробове, отже, треба побудувати правильне відтинання, що виключає неціле значення β_i.

Розглянемо довільний оптимальний план X^* задачі (5.5)—(5.7). Виразимо у даному плані базисну змінну x_i через вільні

$$x_i = \beta_i - \alpha_{im+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{in}x_n = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}x_j . \tag{5.9}$$

Подамо коефіцієнти при змінних даного рівняння у вигляді суми цілої та дробової частин. Введемо позначення: $[\beta]$ — ціла частина числа β, $\{\beta\}$ — дробова частина числа β[1].

$$x_i = [\beta_i] + \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}]x_j - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j \tag{5.10}$$

або

$$x_i - [\beta_i] + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}]x_j = \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j . \tag{5.11}$$

Отже, рівняння (5.11) виконується для будь-якого допустимого плану задачі (5.5)—(5.7). Тепер розглянутий план X^* є цілочисловим оптимальним планом задачі. Тоді ліва частина рівняння (5.11) складається лише з цілих чисел і є цілочисловим виразом, отже, права його частина також — ціле число і справедливою буде рівність

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j = \{\beta_i\} + N . \tag{5.12}$$

де N — деяке ціле число.

Величина N не може бути від'ємною. Якщо б $N \le -1$, то з (5.12) знаходимо нерівність

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j = \{\beta_i\} + N \le \{\beta_i\} - 1 .$$

Звідси $\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j + 1 \le \{\beta_i\}$, тобто дробова частина $\{\beta_i\}$ перевищує одиницю, що неможливо. Тому число N є невід'ємним.

Якщо в лівій частині рівняння (5.12) відняти деяке невід'ємне число приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j \ge \{\beta_i\} . \tag{5.13}$$

що виконується за припущенням для будь-якого цілочислового плану задачі (5.5)—(5.7). Нерівність (5.13) — шукане правильне відтинання.

Таким чином, для розв'язування цілочислових задач лінійного програмування (5.1)—(5.4) методом Гоморі використовується такий алгоритм.

1. Симплексним методом розв'язується задача без вимог цілочисловості змінних: (5.1)—(5.3).

---

[1] Цілою частиною числа a називається найбільше ціле число $[a]$, що не перевищує a, дробовою частиною є число $\{a\}$, яке дорівнює різниці між числом a і його цілою частиною, тобто $\{a\} = a - [a]$. Наприклад, для $a = 2\frac{1}{3}$ $[a] = 2$, $\{a\} = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}$;

для $a = -2\frac{1}{3}$ $[a] = -3$, $\{a\} = -2\frac{1}{3} - (-3) = \frac{2}{3}$

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (5.1)—(5.4).

Якщо задача (5.1)—(5.3) не має розв’язку (цільова функція необмежена або система обмежень несумісна), то задача (5.1)—(5.4) також не має розв’язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \geq \{\beta_i\}.$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елементу приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Здобуту розширену задачу розв’язують, а далі перевіряють її розв’язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв’язку або доведено, що задача не має допустимих розв’язків у множині цілих чисел.

Доведено, що за певних умов алгоритм Гоморі є скінченним. Крім того, процес розв’язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний і кількість ітерацій суттєво залежить від сформованого правильного відтинання. Наведене правило (5.13) про формування правильного відтинання не єдине. Ефективніші правильні відтинання використовують другий і третій алгоритми Гоморі [10, 12], однак наявний практичний досвід не дає змоги виділити з них найкращий.

Алгоритм Гоморі в обчислювальному аспекті є мало вивченим. Якщо в лінійному програмуванні спостерігається відносно жорстка залежність між числом обмежень задачі і кількістю ітерацій, що необхідна для її розв’язування, то для цілочислових задач такої залежності не існує. Кількість змінних також мало впливає на трудомісткість обчислень. Очевидно, процес розв’язування цілочислової задачі визначається не лише її розмірами, а й особливостями багатогранника допустимих розв’язків, що являє собою набір ізольованих точок.

Як правило, розв’язування задач цілочислового програмування потребує великого обсягу обчислень. Тому при створенні програм для ЕОМ особливу увагу слід приділяти засобам, що дозволяють зменшити помилки округлення, які можуть призвести до того, що цілочисловий план не буде оптимальним.

Розглянемо приклад розв’язування цілочислової задачі лінійного програмування методом Гоморі.

Приклад 5.1. Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн і можливість придбати устаткування двох типів *A* і *B*. Техніко-економічну інформацію про ці два види устаткування подано в таблиці.

Техніко-економічний показник	Устаткування		Ресурс
	A	*B*	
Вартість, тис. грн	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн/рік	350	150	

Розв’язування. Нехай x_1 і x_2 — кількість комплектів устаткування відповідно типу *A* і *B*.
Запишемо економіко-математичну модель

$$Z = 350x_1 + 150x_2 \to \max$$
$$25x_1 + 10x_2 \leq 100,$$
$$40x_1 + 20x_2 \leq 190,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$
x_1 і x_2 — цілі.

Розв’язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Остання симплексна таблиця набере вигляду:

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	5	10
x_2	150	2	0	1	5	4
$Z_j - c_j \geq 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі.

Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження $\sum_{j=1}^{n}\{\alpha_{ij}\}x_j \geq \{b_j\}$:

$$\{1\}x_1 + \{0\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \geq \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Оскільки $\left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$, $\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $\left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то додаткове обмеження набирає вигляду

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2},$$

отже, зведемо його до канонічної форми і введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 = \frac{1}{2}.$$

Приєднавши здобуте обмеження до останньої симплексної таблиці з умовно-оптимальним планом, дістанемо

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	–M	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	–1	1
$Z_j - c_j \geq 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв’язуючи наведену задачу, остаточно знаходимо цілочисловий оптимальний план: $X^*(x_1 = 2; x_2 = 5)$, $Z_{\max} = 1450$.

5.4.2. Комбінаторні методи. Метод гілок і меж. В основі комбінаторних методів покладено перебір можливих варіантів розв’язків поставленої задачі. Кожен з них характеризується певним порядком перебору варіантів і правилами виключення, що дозволяють у процесі розв’язування виявити наперед неоптимальні варіанти без попередньої їх перевірки. Ефективність методу залежатиме від того, наскільки скорочує необхідний перебір варіантів у результаті застосування правила виключення.

Розглянемо один із комбінаторних методів. Для розв’язування задач цілочислового програмування ефективнішим, за метод Гоморі, є метод гілок і меж. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, симплексним методом розв'язується послаблена задача (без умов цілочисловості). Далі вводиться правило перебору.

Нехай потрібно знайти $\tilde{o}_j$ — цілочислову змінну, значення якої $\tilde{o}_j = x'_j$ в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Очевидно, що в деякому околі даної точки також не існує цілочислових значень, тому відповідний проміжок з множини допустимих планів задачі можна виключити у подальшому розгляді. Таким проміжком є інтервал між найближчими до x'_j цілочисловими значеннями. Можна стверджувати, що в інтервалі $\left]\lfloor x'_j \rfloor; \lfloor x'_j \rfloor + 1\right[$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо $x'_j = 2{,}7$, тоді дістанемо інтервал $]2;3[$, де, очевидно, немає $\tilde{o}_j$, яке набуває цілого значення і оптимальний розв'язок буде знаходитися або в інтервалі $x_j \le 2$, або $x_j \ge 3$. Виключення проміжку $]2;3[$ з множини допустимих планів здійснюється за рахунок введення до системи обмежень початкової задачі додаткових нерівностей, тобто допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей вигляду:

$$x_j \le \lfloor x'_j \rfloor \text{ або } x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1.$$

Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов'язані між собою задачі. Отже, початкову задачу цілочислового програмування (5.1)—(5.4) розіб'ємо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5.14}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{5.15}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{5.16}$$

$$x_j \text{ — цілі } \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{5.17}$$

$$x_j \le \lfloor x'_j \rfloor \tag{5.18}$$

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5.19}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{5.20}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{5.21}$$

$$x_j \text{ — цілі } \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{5.22}$$

$$x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1. \tag{5.23}$$

де x'_j — дробова компонента розв'язку задачі (5.1)—(5.4).

Наведені послаблені задачі (5.14)—(5.18) і (5.19)—(5.23) розв'язуємо з відкиданням обмежень (5.17) і (5.22). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (5.1)—(5.4). В іншому разі пошук розв'язку задачі триватиме.

Для подальшого розгалуження беремо задачу з найбільшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий план — оптимальний.

Розв'язування цілочислових задач методом гілок і меж можна значно прискорити. Очевидно, що кожна наступна задача, яку отримують у процесі розв'язування, відрізнятиметься від попередньої лише одним обмеженням. Тому за послідовного розв'язування задач немає сенсу розв'язувати їх симплексним методом спочатку. Досить буде приєднати нові обмеження виду (5.18) і (5.23) до останньої симплекс-таблиці попередньої задачі та вилучити (у разі необхідності) непотрібні старі обмеження.

Геометрично введення додаткових лінійних обмежень вигляду (5.19) і (5.23) до системи обмежень початкової задачі означає проведення гіперплощин (прямих), що розтинають багатогранник (багатокутник) допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування до зустрічі з найближчою цілою точкою цього багатокутника (рис. 5.4). Припустимо A — точка максимуму, тоді за методом гілок і меж багатокутник допустимих планів $ABCOD$ ділиться на дві частини прямими $x_1 = [x_1']$ та $x_1 = [x_1'] + 1$, що виключає з розгляду точку A, координата якої x_1' є нецілим числом.

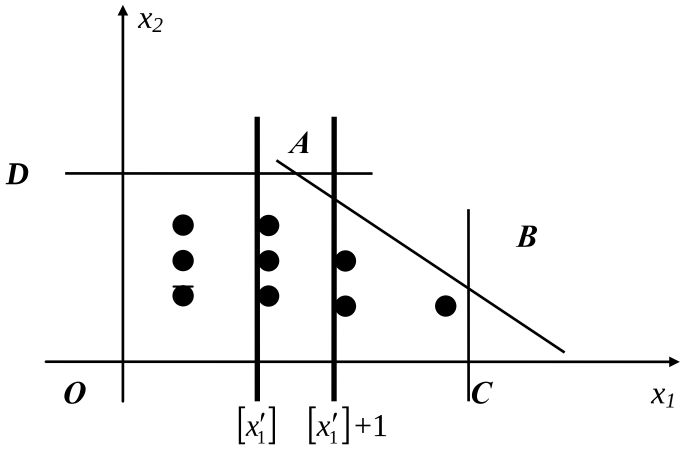


Рис. 5.4

Наведемо алгоритм методу гілок і меж.

1. Симплексним методом розв'язується задача без вимог цілочисловості змінних — (5.1)—(5.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (5.1)—(5.4).

Якщо задача (5.1)—(5.3) немає розв'язку (цільова функція необмежена або система обмежень несумісна), то задача (5.1)—(5.4) також немає розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається одна з нецілочислових змінних x_i і визначається її ціла частина $[x_i']$.

3. Записуються два обмеження, що відсікають нецілочислові розв'язки:

$$x_i \le [x_i'],$$
$$x_i \ge [x_i'] + 1.$$

4. Кожна з одержаних нерівностей приєднується до обмежень початкової задачі. У результаті отримано дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

5. У будь-якому порядку розв'язуємо обидві задачі. У випадку, коли отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї з задач, значення цільової функції цієї задачі порівнюється з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа ε, то процес розв'язування може бути закінчено. У випадку, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової порівнюється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для подальшого гілкування береться та задача, для якої здобуто краще значення цільової функції, і здійснюється перехід до кроку 2.

Приклад 5.2. Розв'яжемо методом гілок і меж задачу з прикладу 5.1.

Розв'язування. Відкинувши умову цілочисловості, дістанемо розв'язок $x_1 = 1$, $x_2 = 7\frac{1}{2}$. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задовольняти одну з нерівностей $x_2 \le \left[7\frac{1}{2}\right] = 7$ або $x_2 \ge \left[7\frac{1}{2}\right] + 1 = 8$.

Далі приєднуємо до початкової задачі кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисловості, і розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі.

Задача I	**Задача II**
$\max Z = 350x_1 + 150x_2$,	$\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$,	$25x_1 + 10x_2 \le 100$,
$40x_1 + 20x_2 \le 190$,	$40x_1 + 20x_2 \le 190$,
$x_2 \le 7$, $x_2 \ge 8$,	

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$,

x_1 і x_2 — цілі. x_1 і x_2 — цілі.

Для задачі I (з обмеженням $x_2 \le 7$) оптимальним буде розв'язок $X' = (x_1 = 1{,}2; x_2 = 7)$, $Z'_{\max} = 1470$, а для задачі II (з обмеженням $x_2 \ge 8$) — розв'язок $X'' = (x_1 = 0{,}75; x_2 = 8)$, $Z''_{\max} = 1462{,}5$.

Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, узявши для наступного розгалуження першу задачу, оптимальний план якої дає більше значення функціоналу, тобто розглядатимемо задачу I.

Далі розв'язуємо задачу I, приєднуючи до неї обмеження $x_1 \le 1$ і $x_1 \ge 2$. Матимемо такі дві задачі:

Задача **III Задача IV**

$\max Z = 350x_1 + 150x_2$, $\max Z = 350x_1 + 150x_2$,

$25x_1 + 10x_2 \le 100$, $25x_1 + 10x_2 \le 100$,

$40x_1 + 20x_2 \le 190$, $40x_1 + 20x_2 \le 190$,

$x_2 \le 7$, $x_2 \le 7$,

$x_1 \le 1$, $x_1 \ge 2$,

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$,

x_1 і x_2 — цілі. x_1 і x_2 — цілі.

Розв'язком задачі III є план $X''' = (x_1 = 1; x_2 = 7)$, $Z'''_{\max} = 1400$, а задачі IV — план $X'''' = (x_1 = 2; x_2 = 5)$, $Z''''_{\max} = 1450$. Обидва розв'язки є цілочисловими, проте краще значення цільової функції забезпечує розв'язок задачі IV. Звідки й знаходимо оптимальний план початкової цілочислової задачі $X^* = (x_1 = 2; x_2 = 5)$, $Z_{\max} = 1450$, що збігається з розв'язком, здобутим за методом Гоморі.

Схема процесу розв'язування задачі прикладу 5.2 (рис. 5.5) наочно пояснює назву методу гілок і меж. Початкова задача розділяється (гілкується) на простіші і, якщо серед них не існує задачі з цілочисловим оптимальним розв'язком, процес гілкування продовжується. Таким чином, усі розглянуті дії можна представити у вигляді дерева.

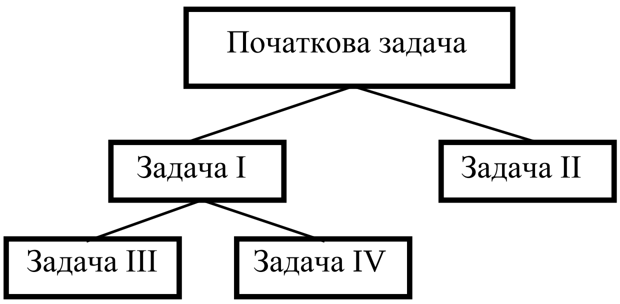


Рис. 5.5

Кожна вершина дерева відповідає оптимальному плану деякої задачі. Після одержання нецілочислового розв'язку послабленої початкової задачі перетворюємо її на дві інші з додатковими умовами. З них кращим виявився розв'язок задачі I, однак, оскільки він нецілочисловий, продовжуємо процес гілкування.

Задача I введенням додаткових обмежень перетворюється на задачу III і задачу IV. Оптимальні плани обох задач цілочислові, але план задачі IV дає більше значення функціонала, тому оптимальним планом початкової задачі є розв'язок задачі IV.

Відмітимо без наведення алгоритмів і прикладів один цікавий метод, який можна віднести до типу комбінаторних (детальні викладки в літературі [1]) — метод послідовного аналізу варіантів. Загальна схема методу розроблена радянським ученим В. С. Михалевичем, який працював у київському Інституті кібернетики.

Ідея методу полягає в послідовному повторенні таких процедур:

1) розбиття множини варіантів розв'язків задачі на кілька підмножин, кожна з яких має специфічні властивості;

2) використання зазначених вище властивостей для пошуку логічних розбіжностей в опису окремих підмножин;

3) виключення із подальшого розгляду тих підмножин варіантів розв'язків, в описах яких є логічні розбіжності.

Отже, методика послідовного аналізу варіантів базується на відсіві безперспективних варіантів ще до їх побудови. Оскільки при відсіві безперспективних початкових частин варіантів відходить і вся множина їх продовжень, то досягається значна економія часу на обчислювальні процедури. Відсів безперспективних елементів відбувається як за обмеженнями, так і за цільовою функцією.

Основа методу послідовного аналізу варіантів — визначення правила, за яким буде здійснюватись відсів безперспективних значень змінних, у результаті чого постійно звужується множина значень, для якої відшукують оптимум.

Зрозуміло, що для кожного типу задач цілочислового програмування будуються специфічні правила для відсіву варіантів.

Розроблений метод послідовного аналізу варіантів успішно використовувався для розв'язування різноманітних задач оптимального планування і проектування, таких як задачі розрахунку транспортних мереж, розміщення на мережі типу дерева, проектування розподільних електричних мереж, вибору оптимальних параметрів магістральних газопроводів тощо.

5.4.3. Наближені методи. Метод вектора спаду. Розробка і дослідження наближених алгоритмів є досить перспективним напрямом цілочислової оптимізації. Наближені методи викликають більший інтерес з практичної точки зору, оскільки, як зазначалось вище, використання точних методів вимагає невиправдано значних затрат часу, тоді як пошук наближеного розв'язку дає можливість суттєво скоротити процес знаходження оптимального плану задачі.

Особливо вдалою в літературі, присвяченій проблемам наближених методів, є ідея формування наближених алгоритмів розв'язування цілочислових задач.

Так, обирається початковий допустимий план задачі. З таким можливим варіантом розв'язку пов'язується певна (не дуже широка) множина варіантів, які складають окіл початкового варіанта. Перебираючи елементи околу, відбувається перехід до кращого плану чи фіксується локальна оптимальність даного варіанта.

У першому випадку процес локального покращання плану продовжується, у другому — здійснюється випадковий вибір наступного плану, який беруть за початок пошук нового локально оптимального плану. Таким чином, схожі методи мають вказувати спосіб визначення околу та механізм випадкового пошуку. Крім того, необхідно також ввести правило, за допомогою якого визначається момент закінчення процесу пошуку наближеного розв'язку.

Розглянемо без детальних доведень один із наближених методів, що має назву *метод вектора спаду*[1], розроблений І. В. Сергієнко всередині 1960-х років. У загальному випадку метод дає змогу знаходити локальний мінімум цільової функції, проте якщо вона має відповідні властивості опуклості, метод веде до визначення глобального мінімуму.

Припустимо, що розглядається задача цілочислового програмування вигляду

$$\min F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{5.24}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{5.25}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{5.26}$$

$$x_j \text{ — цілі } \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{5.27}$$

Перш ніж наводити алгоритм методу введемо деякі необхідні поняття.

Нехай M — деякий дискретний точковий простір; $\Omega \subset M$ — множина допустимих планів деякої цілочислової задачі (5.24)—(5.27). Введемо метрику в простір M, тобто функцію, що визначає відстань між довільними точками цього простору X і Y. Позначимо її $\rho(X,Y)$. Метрика $\rho(X,Y)$ має задовольняти три аксіоми:

1) аксіома тотожності: $\rho(X,Y) = 0$, за умови, що $X = Y$;

2) аксіома симетрії: $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$;

3) аксіома нерівності трикутника: $\rho(X,Y) + \rho(Y,Z) \ge \rho(X,Z)$.

---

[1]Повністю ознайомитись з обґрунтуванням методу вектора спаду можна у роботах [1, 2].

З аналітичної геометрії відомо, що відстань між точками (функцію $\rho(X,Y)$) можна визначити по-різному. Зокрема, у прямокутній Декартовій системі координат це може бути довжина вектора $\overline{XY}$, тобто $\rho(X,Y) = \left|\overline{XY}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, де x_i, y_i — координати точок *X* і *Y* у просторі *M*.

Нехай X' — деякий допустимий план задачі дискретного програмування. Якщо взяти деяке число $r > 0$, то множина всіх точок $Y \in M_r$, для яких виконується $\rho(X',Y) < r$, називається відкритим околом із центром у точці X' і радіусом *r*, а множина всіх точок $Y \in M_r$, для яких виконується $\rho(X',Y) \le r$, називається закритим околом.

Визначимо деякий окіл M_{r_1} точки X' з радіусом r_1, такий, щоб, крім плану X', він містив би й інші плани задачі, для чого r_1 повинно бути не меншим від деякої величини *R*.

Далі розглядатимемо лише вказані околи планів задачі. Визначимо функцію $\Delta(X,Y)$ у такий спосіб: $\Delta(X,Y) = F(Y) - F(X)$.

Назвемо вектором спаду $\vec{V}$ функції $F(X)$ у деякому околі M_R довільної точки X' (що є одним із допустимих розв'язків задачі цілочислового програмування $X' \in \Omega$) вектор, компонентами якого є величини $\Delta_i = \Delta(X', X_i)$, де $X_i (i = \overline{1, I})$ — плани задачі, що належать околу M_R.

Очевидно, що при невід'ємності всіх компонент вектора спаду ($\Delta_i \ge 0$) в околі точки X' матимемо для будь-якого значення $X_i \in M_R$:

$$\Delta_i = \Delta(X', X_i) = F(X_i) - F(X') \ge 0.$$

Остання нерівність означає, що точка X' є точкою локального мінімуму функції $F(X)$ відносно виділеного околу M_R, тобто $F(X') = \min_{X_i \in M_R \cap \Omega} F(X_i)$.

Якщо ж деякі компоненти вектора спаду будуть від'ємними, то це означає, що X' не є точкою мінімуму в названому околі, оскільки в деяких точках цього околу функція $F(X)$ набуває менших значень. Причому і точка $\tilde{X}$ виділеного околу, для якої різниця $\Delta_i = \Delta(X', \tilde{X}) = F(\tilde{X}) - F(X') < 0$ буде найменшою, визначає напрям найшвидшого спаду (зменшення) цільової функції $F(X)$, оскільки $F(\tilde{X}) - F(X') < 0 \Rightarrow F(\tilde{X}) < F(X')$. Цей очевидний факт і лежить в основі обчислювальної схеми використання методу вектора спаду.

Ідея методу полягає у визначенні компонент вектора спаду для деякої початкової точки, якщо вони всі невід'ємні, то точку локального мінімуму знайдено. Інакше знаходимо центр нового околу і перевіряємо його компоненти процес пошуку розв'язку є послідовним перебором точок, що зменшують значення цільової функції.

Як правило, на кожному кроці алгоритму (тобто для кожного нового околу) не потрібно обчислювати всі компоненти вектора спаду, а лише частину з них, що дає вагомий виграш в обсязі та часі обчислень.

Наведемо один із можливих алгоритмів реалізації методу вектора спаду.

1. Обрати початкову точку X_0 і радіус околу *R* так, щоб точка X_0 була допустимим планом відповідної задачі цілочислового програмування ($X_0 \in \Omega$), а окіл був таким, що містить також інші допустимі плани задачі. Цей вибір може проводитись випадково з подальшою перевіркою зазначених умов.

2. Визначаються компоненти вектора спаду в обраному околі. Якщо всі компоненти вектора спаду невід'ємні, то точку локального мінімуму знайдено (тобто задача розв'язана та оптимальний цілочисловий план $X^* = X_0$).

3. Якщо не всі компоненти вектора спаду невід'ємні, обираємо компоненту Δ_i, яка має найменше значення і вказує на точку $\tilde{X}$, що зменшує значення цільової функції і є центром нового околу.

4. Повертаємось до п. 2. Процес продовжуємо доти, доки для деякого $\tilde{X}_k$ всі компоненти відповідного вектора спаду не будуть невід'ємними.

Приклад 5.3. Розв'яжемо цілочислову задачу, використовуючи умови прикладу 5.1.

Розв'язування. Нехай X_0 $(x_1 = 0; x_2 = 0)$, $R = 1$. Вибрана точка є допустимим планом задачі, оскільки задовольняє всі обмеження та умову цілочисловості, а окіл вибраного радіуса містить інші плани задачі, наприклад, точку $(x_1 = 0; x_2 = 1)$.

Визначаємо точки, які потрапляють в означений окіл (рис 5.6). Це такі три точки: $X1_0$ $(x_1 = 0; x_2 = 1)$; $X2_0$ $(x_1 = 1; x_2 = 0)$; $X3_0$ $(x_1 = 1; x_2 = 1)$.

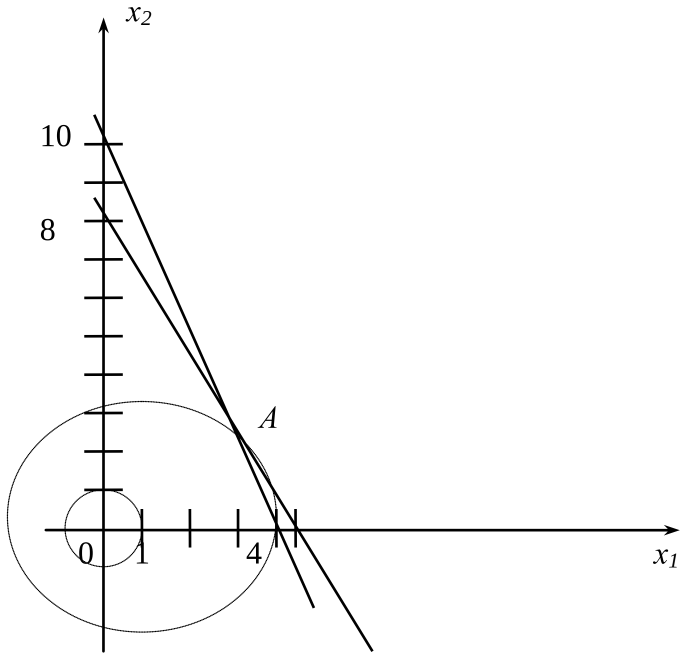


Рис. 5.6

Визначимо компоненти вектора спаду, позначивши

$$F = -Z = -350x_1 - 150x_2,$$
$$\Delta_1 = \Delta(X_0, X1_0) = F\left(X1_0\right) - F(X_0) =$$
$$= \left(-350\cdot 0 - 150\cdot 1\right) - \left(-350\cdot 0 - 150\cdot 0\right) = -150,$$
$$\Delta_2 = \Delta(X_0, X2_0) = F\left(X2_0\right) - F(X_0) =$$
$$= \left(-350\cdot 1 - 150\cdot 0\right) - \left(-350\cdot 0 - 150\cdot 0\right) = -350,$$
$$\Delta_3 = \Delta(X_0, X3_0) = F\left(X3_0\right) - F(X_0) =$$
$$= \left(-350\cdot 1 - 150\cdot 1\right) - \left(-350\cdot 0 - 150\cdot 0\right) = -500.$$

Найменшою є третя компонента вектора спаду, отже, відповідна їй точка стає центром наступного околу $\widetilde{X}_1(x_1 = 1, x_2 = 1)$. Радіус обираємо рівний $R = 3$.

До нового околу входить 21 точка з такими координатами:

$(x_1 = 0, x_2 = 1)$, $(x_1 = 0, x_2 = 2)$, $(x_1 = 0, x_2 = 3)$, $(x_1 = 0, x_2 = 4)$;
$(x_1 = 1, x_2 = 0)$, $(x_1 = 2, x_2 = 0)$, $(x_1 = 3, x_2 = 0)$, $(x_1 = 4, x_2 = 0)$;
$(x_1 = 1, x_2 = 1)$, $(x_1 = 1, x_2 = 2)$, $(x_1 = 1, x_2 = 3)$, $(x_1 = 1, x_2 = 4)$;
$(x_1 = 2, x_2 = 1)$, $(x_1 = 3, x_2 = 1)$;
$(x_1 = 2, x_2 = 2)$, $(x_1 = 2, x_2 = 3)$, $(x_1 = 2, x_2 = 4)$;
$(x_1 = 3, x_2 = 2)$, $(x_1 = 3, x_2 = 3)$.

Необхідно розрахувати значення компонент вектора спаду для вказаних точок. Однак для трьох точок потрібні величини були розраховані на попередньому кроці і залишається обчислити компоненти вектора для нових точок.

Після проведення розрахунків маємо, що найменше значення набуває компонента вектора, що відповідає точці $(x_1 = 2, x_2 = 4)$, тому наступний цент околу переміщається в нову точку $\widetilde{X}_2(x_1 = 2, x_2 = 4)$. Радіус обираємо рівний $R = 1$.

Обчислюємо компоненти вектора спаду в чотирьох точках околу:

$(x_1 = 2, x_2 = 4)$, $(x_1 = 2, x_2 = 5)$, $(x_1 = 2, x_2 = 3)$, $(x_1 = 1, x_2 = 4)$.
Δ_1 $(x_1 = 2, x_2 = 4) = -800$;
Δ_2 $(x_1 = 2, x_2 = 5) = -950$;

$\Delta_3\ (x_1 = 2, x_2 = 3) = -650;$

$\Delta_4\ (x_1 = 1, x_2 = 4) = -450.$

Наступна точка — центр околу $\widetilde{X}_3(x_1 = 2, x_2 = 5)$ з радіусом $R = 1$ Перевірка компонент вектора спаду дає всі додатні значення, отже, процедуру наближення завершено і дана точка є оптимальним планом цілочислової задачі $X^*(x_1 = 2, x_2 = 5), F_{\max} = 1450$.

Зауважимо, як видно з опису реалізації алгоритму, метод вектора спаду придатний для знаходження цілочислового розв'язку і також для нелінійних задач.

5.4.4. Приклади застосування цілочислових задач лінійного програмування у плануванні та управлінні виробництвом

Задача про рюкзак. Найпростішою задачею цілочислового програмування, а саме — задачу лише з одним обмеженням, задача про рюкзак (або ранець). Така задача має численні приклади практичного застосування. Назва «задача про рюкзак» пов'язана з інтерпретацією задачі вибору найкращого складу предметів, що задовольняють певні умови як гіпотетичної проблеми туриста обрати для походу оптимальну кількість речей.

Турист може обирати потрібні речі зі списку в *n*-кількість предметів. Відома для кожного *j*-го предмета його маса $m_j (j = \overline{1,n})$. Для кожного з предметів визначено його цінність w_j. Максимальна вага всього вантажу в рюкзаку не може перевищувати вказаної норми *M*.

Необхідно визначити, скільки предметів кожного виду турист має покласти в рюкзак, щоб сумарна цінність спорядження була максимальна за умови виконання обмеження на масу рюкзака.

Позначимо через x_j — кількість предметів *j*-го виду в рюкзаку. Тоді математична модель задачі матиме вигляд

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \le M ,$$

$$x_j \ge 0 ,\ x_j \text{ — цілі, } (j = \overline{1,n}) .$$

Приклад 5.4. Фермеру для обробки земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. чи по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупка не менше ніж 107 кг добрив, витрачаючи на це найменшу суму коштів. Причому потрібно або купувати цілу упаковку, або не купувати її зовсім, частину упаковки придбати неможливо.

Розв'язування. Позначимо кількість упаковок вагою 35 і 24 кг відповідно змінними x_1 і x_2. Маємо модель:

$$\min F = 14x_1 + 12x_2 ,$$

$$35x_1 + 24x_2 \ge 107 ,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 ,\ x_1, x_2 \text{ — цілі.}$$

У результаті розв'язування задачі одним із наведених методів матимемо оптимальний план $X^*(x_1 = 1, x_2 = 3)$, $F_{\min} = 50$. Отже, за оптимальним планом найменшу вартість 50 ум. од. дістанемо у разі закупівлі 1 упаковки вагою 35 кг і 3 — вагою 24 кг.

Задача оптимального розкрою матеріалів. На підприємстві проводиться розкрій *m* різних партій матеріалів у кількості $b_i (i = \overline{1,m})$ одиниць однакового розміру в кожній партії. З матеріалів усіх партій потрібно виготовити максимальну кількість комплектів *Z*, у кожен з яких входить *p* різних видів окремих частин у кількості $k_r (r = \overline{1,p})$ одиниць, якщо відомо, що кожну одиницю матеріалу можна розкроїти на окремі частини *n* різними способами, причому після розкрою одиниці *i*-ї партії *j*-м способом матимемо a_{ijr} деталей *r*-го виду.

Математична модель задачі. Позначимо x_{ij} — кількість одиниць матеріалу *i*-ї партії, що будуть розкроєні *j*-м способом. Тоді з *i*-ї партії при *j*-му способі розкрою маємо $a_{ijr}\ x_{ij}$ деталей *r*-го виду. З усієї ж *i*-ї партії у разі застосування до неї всіх *n* способів розкрою одержимо деталей *r*-го виду $\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$, а з усіх *m* партій їх буде — $Z_r = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$. До кожного комплекту має входити $k_r (r = \overline{1,p})$

деталей, тому $Z_r/k_r (r=\overline{1,p})$ визначає кількість комплектів, які можна скласти з деталей r-го виду. Кількість повних комплектів по всіх видах деталей визначається найменшим з цих відношень.

До повного комплекту має виконуватися рівність відношень:

$$Z_1/k_1 = Z_2/k_2 = \ldots = Z_r/k_r = \ldots = Z_p/k_p,$$

звідки $p-1$ відношень можливо виразити через будь-яке з них, наприклад, через перше:

$$Z_r/k_r = Z_1/k_1 \ (r=\overline{2,p}) \text{ або } Z_r = k_r Z_1/k_1 \ (r=\overline{2,p}).$$

Замінимо Z_r і Z_1 їх значеннями і матимемо $p-1$ обмежень щодо комплектів:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij} = \frac{k_r}{k_1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij1}x_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr} - \frac{k_r}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij} = 0 (r=\overline{2,p}).$$

Ураховуючи наявну кількість одиниць матеріалу в партіях, запишемо m обмежень по ресурсах

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \, (i=\overline{1,m}).$$

(Обмеження на використання ресурсів може бути рівнянням чи нерівністю залежно від того, чи повністю, чи не повністю вимагається використати наявний обсяг ресурсів.)

Усі x_{ij} повинні задовольняти умову невід'ємності: $x_{ij} \ge 0 (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$ та цілочисловості.

Таким чином, необхідно знайти найбільше значення функції

$$\max Z = \min_{1\le r\le p} \frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij}$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr} - \frac{k_r}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij} = 0 (r=\overline{2,p}) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ (i=\overline{1,m}) \end{cases},$$

$$x_{ij} \ge 0 (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}),$$

$$x_{ij} - \text{цілі } (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}).$$

Розглянемо приклад задачі оптимального розкрою матеріалів.

Приклад 5.5. У цеху розрізують прути завдовжки 6 м на заготовки 1,4; 2 і 2,5 м. Цех обслуговує двох замовників, для кожного з яких окремо треба знайти:

1) яким чином розрізати 200 прутів, щоб мати не менше як 40, 60 і 50 заготівок завдовжки 1,4; 2 і 2,5 м відповідно. Критерій оптимізації — мінімум відходів;

2) яким чином розрізати 200 прутів для формування з отриманих заготовок комплектів, що складаються з двох прутів довжиною 1,4 м, і по одному двох інших типів. Критерій оптимізації — максимальна кількість комплектів.

Розв'язування.

1. Розв'яжемо задачу за умовами першого замовника. Маємо партію матеріалів у кількості $b = 200$ шт. Відома нижня межа кількості заготовок кожного виду. Введемо такі позначення:

$r (r=1,2,3)$ — вид заготовки;

$j (j=\overline{1,n})$ — спосіб розрізання прута;

a_{jr} — вихід у разі розрізування прута j-м способом заготовок r-го виду;

c_j — відходи у разі розрізування прута j-м способом;

b — кількість наявних прутів;
D_r — верхня межа потреби в r-ій заготівці;
x_j — кількість прутів, які розрізані за j-м варіантом.

Запишемо математичну модель для розв'язування першого пункту задачі оптимального розкрою.

Критерієм оптимальності — мінімальна кількість відходів $\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Кількість отриманих заготовок кожного виду повинна бути не меншою від указаних потреб $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq D_r \, (r = \overline{1, p})$.

Сумарна довжина заготовок не може перевищувати довжини початкового матеріалу $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq b$.

Змінні задачі x_j — невід'ємні і цілі числа. Отже, маємо математичну модель:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ ,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq D_r \, (r = \overline{1, p}) \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \leq b \end{cases} ,$$

$$x_j \geq 0 (\, j = \overline{1, n}) \ ,$$

$$x_j \text{ — цілі } (\, j = \overline{1, n}) \ .$$

Побудуємо числову економіко-математичну модель розрізування прутів, розглянувши можливі варіанти такого розрізування.

Таблиця 5.1

Довжина заготівки, м	Варіанти розрізування прутів						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1,4	4	—	—	1	1	2	2
2	—	3	—	1	2	1	—
2,5	—	—	2	1	—	—	1
Довжина відходів, м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7

Бажано, щоб до множини ввійшли всі можливі варіанти, навіть такі, які на перший погляд здаються неефективними, наприклад, X_6.

Запишемо числову економіко-математичну модель розрізування прутів:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}6x_5 + 1{,}2x_6 + 0{,}7x_7$$

за умов:

а) кількість заготовок завдовжки 1,4 м:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40 \, ;$$

б) кількість заготовок завдовжки 2 м:

$$3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60 \, ;$$

в) кількість заготовок завдовжки 2,5 м:

$$2x_2 + x_4 + x_7 \geq 50 \, ;$$

г) кількість наявних прутів:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 200;$$

д) невід'ємність змінних:

$$x_j \ge 0 (j = 1,2,3,4,5,6,7);$$

є) цілочисловість змінних:

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7).$$

Отже, матимемо математичну модель вигляду:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}6x_5 + 1{,}2x_6 + 0{,}7x_7,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \ge 40, \\ 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 60, \\ 2x_3 + x_4 + x_7 \ge 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 40, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 (j = 1,2,3,4,5,6,7),$$

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7).$$

Розв'язуючи задачу одним із методів цілочислового програмування, дістанемо набір альтернативних оптимальних планів (загальною кількістю 146). Наприклад, наступний план забезпечує виготовлення всіх видів заготовок у мінімально можливій кількості за найменшої сумарної величини відходів, причому наявний матеріал використовується лише у кількості 54 прутів: $X_1^* = (x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 50, x_5 = x_6 = x_7 = 0)$, $Z_{\min} = 5$. Тобто 4 прути треба розрізати 2-м способом способом (по три заготовки довжиною 2 м) і 50 прутів 4-м способом (по одній заготовці кожного виду). Сумарна довжин залишків дорівнює 5 м.

Аналогічне значення цільової функції ($Z_{\min} = 5$) дає оптимальний план, за яким виготовляється більша кількість кінцевої продукції та витрачається увесь наявний матеріал:

$$X_2^* = (x_1 = 0, x_2 = 150, x_3 = 0, x_4 = 50, x_5 = x_6 = x_7 = 0).$$

Одержані оптимальні плани дають набір альтернативних варіантів для прийняття управлінських рішень у конкретних виробничих умовах.

Розглянемо приклад задачі оптимального розкрою матеріалів, що передбачає один тип матеріалу і відсутність формування комплектів кінцевої продукції.

2. Розв'яжемо задачу за умовами другого замовника. Оскільки в п. 2 задачі відсутні обмеження до кількості одержаних заготовок, проте вимагається формування комплектів, потрібно дещо змінити позначення:

$r (r = 1,2,3)$ — вид заготовки;

$j (j = \overline{1, n})$ — спосіб розрізання прута;

a_{jr} — вихід у разі розрізування прута *j*-м способом заготовок *r*-го виду;

b — кількість наявних прутів;

x_j — кількість прутів, які розрізані за *j*-им варіантом;

k_r — кількість *r*-го виду заготовок у комплекті;

Z_r — кількість усіх заготовок *r*-го виду.

Математична модель у даному випадку суттєво відрізняється від моделі з попереднього пункту.

З усього матеріалу може бути одержано $Z_r = \sum_{j=1}^{n} a_{jr} x_j$ заготовок *r*-го виду. До кожного комплекту має входити $k_1 = 2$ дві заготовки першого типу, тому Z_1/k_1 визначає кількість комплектів, які можна скласти із заготовок першого виду.

Аналогічно можна визначити кількість комплектів за іншими видами заготовок Z_2/k_2 і Z_3/k_3. Кількість можливих повних комплектів визначається найменшим із цих відношень — $\min(Z_1/k_1; Z_2/k_2; Z_3/k_3)$.

До того ж до повного комплекту повинна виконуватися рівність відношень $Z_1/k_1 = Z_2/k_2 = .Z_3/k_3$, звідки два з відношень можна виразити, наприклад, через перше:

$Z_2/k_2 = Z_1/k_1$; $Z_3/k_3 = Z_1/k_1$ звідки $Z_2 = k_2 Z_1/k_1$, $Z_3 = k_3 Z_1/k_1$.

Замінимо Z_2, Z_3 і Z_1 їх значеннями:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_j = \frac{k_2}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j \text{ або } \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j2} - \frac{k_2}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j3} x_j = \frac{k_3}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j \text{ або } \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j3} - \frac{k_3}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0.$$

Ураховуючи наявну кількість одиниць матеріалу, запишемо обмеження на використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b.$$

Усі x_{ij} повинні задовольняти умову невід'ємності $x_j \ge 0 (j = \overline{1,n})$ і цілочисловості.

Таким чином, необхідно знайти найбільше значення функції

$$\max Z = \left(\min \left[\frac{1}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j ; \frac{1}{k_2} \sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_j ; \frac{1}{k_3} \sum_{j=1}^{n} a_{j3} x_j \right] \right)$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j2} - \frac{k_2}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j3} - \frac{k_3}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le b, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 (j = \overline{1,n}),$$

$$x_j \text{ — цілі } (j = \overline{1,n}).$$

Запишемо числову математичну модель, скориставшись попередніми даними розрахунків можливих варіантів розрізування прутів (див. табл. 5.1).

З умов формування комплектів маємо $\frac{Z_1}{2} = \frac{Z_2}{1} = \frac{Z_3}{1} \Rightarrow Z_1 = 2Z_2 = 2Z_3$, тобто заготовок першого виду має бути вдвічі більше ніж заготовок другого і третього видів, тоді за мінімальну кількість комплектів може бути взяте одне з двох відношень $\frac{Z_2}{1}$ чи $\frac{Z_3}{1}$. Оберемо, наприклад, $\min\limits_{1 \le r \le 3} (Z_r / k_r) = Z_2$. Використовуючи дані табл. 5.1, матимемо вираз для цільової функції:

$$Z = Z_2 = 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6.$$

Обмеження на формування комплектів матимуть вигляд $Z_1 = 2Z_2$:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 2(3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6),$$

або $4x_1 - 6x_2 - x_4 - 3x_5 + 2x_7 = 0$,

аналогічно $Z_1 = 2Z_3$:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 2(2x_3 + x_4 + x_7),$$

$$4x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 0.$$

Обмеження на використання матеріалів

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 200 .$$

Обмеження на невід'ємність і цілочисловість змінних:

$$x_j \ge 0 (j = 1,2,3,4,5,6,7) ;$$
$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7) .$$

Таким чином, дістанемо таку математичну модель:

$$\max Z = Z_2 = 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 ,$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 - x_4 - 3x_5 + 2x_7 = 0, \\ 4x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0. \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 (j = 1,2,3,4,5,6,7)$$
$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7) .$$

Розв'язуючи задачу одним із відомих методів, матимемо оптимальний план $X^* = (x_1 = 40; x_2 = x_3 = 0; x_4 = 160; x_5 = x_6 = x_7 = 0)$, $Z_{\max} = 160$ комплектів.

Задача комівояжера. Розглядається n міст A_1, A_2,..., A_n, що пов'язані між собою транспортною мережею. Відома матиця відстаней від кожного з міст до всіх інших:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \dots & c_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots & \dots.. \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

причому в загальному випадку не завжди $c_{ij} = c_{ji}$.

Комівояжер повинен побувати у кожному місті тільки один раз і повернутися в місто, з якого почав рухатись. Необхідно відшукати такий замкнений маршрут, що проходить через кожне місто лише один раз і сумарна довжина шляху мінімальна.

Позначимо

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} може набувати лише два значення, а саме — 1 або 0. Такі змінні мають назву бульові змінні, очевидно, що вони є цілочисловими. Цільовою функцією цієї задачі є мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

де c_{ij} — відстань між містами i і j.

Обмеження на одноразовий в'їзд до кожного міста:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \left(j = \overline{1,n};\ i \ne j \right).$$

Обмеження на одноразовий виїзд до кожного міста:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \left(i = \overline{1,n}; i \ne j \right).$$

Вказані обмеження не повністю описують допустимі маршрути і не виключають можливості розриву маршруту. Щоб усунути цей недолік, введемо невід'ємні цілочислові змінні $u_i(u_j)$

$\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n};\ \ i\neq j\right)$, які в результаті розв'язування задачі набуватимуть значення порядкових номерів міст за оптимальним маршрутом прямування комівояжера. Запишемо обмеження, які виключають можливість існування підмаршрутів:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1 \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n};\ \ i\neq j\right).$$

Покажемо, що для довільного маршруту, що починається у пункті A_1, можна знайти $u_i(u_j)$, що задовольняють наведену нерівність. Нехай комівояжер переїжджає з міста A_i до міста A_j на p-му кроці і при цьому покладемо $u_i = p$, тоді з міста A_j комівояжер вирушить на наступному (p+1)-му кроці і $u_j = p+1$.

Звідси випливає, що $u_i - u_j + nx_{ij} = p-(p+1)+nx_{ij} = -1+nx_{ij} \le n-1$ така нерівність виконується для будь-яких значень i і j у випадку, коли $x_{ij}=0$, при $x_{ij}=1$ нерівність виконується як строге рівняння.

Отже, якщо обрано маршрут пересування з i-го міста до j-го, тоді згадана нерівність фіксує два підряд порядкових номери цих міст.

Таким чином, маємо математичну модель:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, (j=\overline{1,n}; i\neq j), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, (i=\overline{1,n}; i\neq j), \\ u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1, (i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n}; i\neq j). \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}, (i=\overline{1,n}), (j=\overline{1,n}).$$

Приклад 5.6. В економічному регіоні розміщено 6 пунктів (міст). Комівояжер, який виїжджає з міста 1, має побувати в кожному місті один раз і повернутися до вихідного пункту. Знайти найкоротший маршрут, якщо відстані між містами відомі (наведені в км на рис. 5.7).

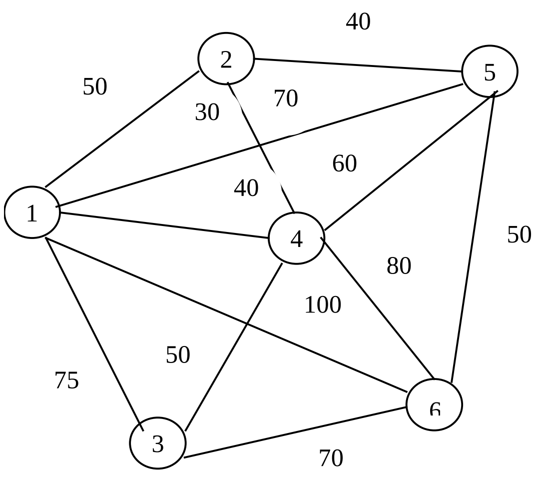


Рис. 5.7

Розв'язування. Нехай маємо n пунктів, де має побувати комівояжер.

Позначимо

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} — бульові (цілочислові) змінні. Запишемо числову економіко-математичну модель задачі комівояжера за розглядуваних умов.

З даних рис. 5.5 маємо, що всіх можливих маршрутів є 12. З першого міста можна потрапити до кожного з інших п'яти, відповідні маршрути позначимо змінними x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}. Друге місто пов'язане лише з трьома іншими, а саме — з першим, четвертим і п'ятим, отже, матимемо три такі змінні: x_{21}, x_{24}, x_{25}. Аналогічно позначаємо змінні, що відповідають можливим маршрутам пересувань з третього, четвертого, п'ятого і шостого міст:

з третього — x_{31}, x_{34}, x_{36};
з четвертого — x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{45}, x_{46};
з п'ятого — x_{51}, x_{52}, x_{54}, x_{56};
з шостого — x_{61}, x_{63}, x_{64}, x_{65}.

Загалом матимемо 24 змінні. Однак деякі змінні, наприклад, x_{12} і x_{21}, x_{13} і x_{31}, описують один маршрут, довжина якого, за умовою задачі, не змінюється залежно від напрямку пересування (при переїзді з першого міста до другого чи з другого до першого треба подолати 50 км), отже, коефіцієнт в цільовій функції за таких змінних буде однаковим.

Критерій оптимальності — мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$\min Z = 50x_{12} + 75x_{13} + 40x_{14} + 70x_{15} + 100x_{16} + 30x_{24} + 40x_{25} + 50x_{34} + \\ + 70x_{36} + 60x_{45} + 80x_{46} + 50x_{56};$$

а) обмеження на одноразовий в'їзд до кожного міста:

$$\begin{aligned} &x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1, \\ &x_{12} + x_{42} + x_{52} = 1, \\ &x_{13} + x_{43} + x_{63} = 1, \\ &x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} + x_{64} = 1, \\ &x_{15} + x_{25} + x_{45} + x_{65} = 1, \\ &x_{16} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1; \end{aligned}$$

б) обмеження на одноразовий виїзд до кожного міста:

$$\begin{aligned} &x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1, \\ &x_{21} + x_{24} + x_{25} = 1, \\ &x_{31} + x_{34} + x_{36} = 1, \\ &x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} = 1, \\ &x_{51} + x_{52} + x_{54} + x_{56} = 1, \\ &x_{61} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 1; \end{aligned}$$

в) обмеження на виключення підмаршрутів:

$$\begin{aligned} &u_2 - u_4 + 6x_{24} \le 5, \\ &u_2 - u_5 + 6x_{25} \le 5, \\ &u_3 - u_4 + 6x_{34} \le 5, \\ &u_3 - u_6 + 6x_{36} \le 5, \\ &u_4 - u_2 + 6x_{42} \le 5, \\ &u_4 - u_3 + 6x_{43} \le 5, \\ &u_4 - u_5 + 6x_{45} \le 5, \\ &u_4 - u_6 + 6x_{46} \le 5, \\ &u_5 - u_2 + 6x_{52} \le 5, \\ &u_5 - u_4 + 6x_{54} \le 5, \\ &u_5 - u_6 + 6x_{56} \le 5, \\ &u_6 - u_3 + 6x_{63} \le 5, \\ &u_6 - u_4 + 6x_{64} \le 5, \\ &u_6 - u_5 + 6x_{65} \le 5; \end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \{0;1\} (i = \overline{1,6}; j = \overline{1,6})$$

$u_i(u_j)$ — цілі числа $\left(i = \overline{2,6};\ j = \overline{2,6};\ i \ne j\right)$.

Такі задачі розв'язуються спеціальними методами [1; 10].

У результаті здобудемо оптимальний варіант пересування за такою схемою:

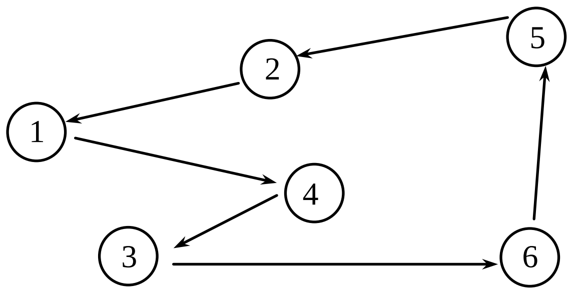


Рис. 5.8

Іншими словами, з першого міста за оптимальним планом треба переїжджати до 4, з 4 до 3, з 3 до 6, з 6 до 5, з 5 до 2, з 2 до 1. Мінімальна сумарна довжина всього маршруту дорівнює 300 км.

Зауважимо, що аналогічні задачі часто постають на практиці, наприклад, у малому бізнесі.

Фірма у місті має 25 кіосків, які торгують безалкогольними напоями. Щоденно з бази автомобілем розвозять до них товар. Як оптимально організувати розвезення відповідної кількості товару?

Задача з постійними елементами витрат. Відомо, що в процесі виробництва продукції витрати на її виготовлення складаються з двох частин: постійні та змінні. Аналогічно в ситуаціях, що описують функціонування деякої системи, наявні також витрати двох видів: постійні, які пов’язані з обслуговуванням системи, і початкові одноразові, наприклад, закупка устаткування, початкові інвестиції та ін.

Нехай розглядається процес виробництва продукції за умов використання *m* видів ресурсів. Дано обсяги кожного з видів ресурсів $b_1, b_2, ..., b_m$. Відомі також норми використання кожного з *i* $(i = \overline{1, m})$ видів ресурсів на одиницю виготовлення кожного *j*-го $(j = \overline{1, n})$ виду продукції a_{ij}.

Умови використання ресурсів на виготовлення продукції матимуть вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \; (i = \overline{1, m}).$$

Витрати на виготовлення продукції складаються з двох частин: постійні k_j, які не залежать від обсягу виробництва, і поточні c_j, що розраховуються на одиницю виготовленої продукції, де *j* — номер продукції. Необхідно визначити оптимальні обсяги виробництва продукції $x_j (j = \overline{1, n})$, за яких сумарні витрати будуть мінімальними.

Зауважимо, що випадок виготовлення деякої додатної кількості продукції $x_j > 0$ вимагає вкладення фіксованих витрат k_j і поточних $c_j x_j$, тобто загальна сума витрат на виготовлення продукції в кількості x_j визначається виразом $D_j = k_j + c_j x_j$. Однак у випадку $x_j = 0$ (продукція не випускається) розрахунок витрат за формулою $D_j = k_j + c_j x_j = k_j + c_j \cdot 0 = k_j$ дає додатне значення, що неможливо.

Для правильного відображення функціональної залежності загальних витрат від кількості виробленої продукції *j*-го виду необхідно скористатися нелінійною функцією $z_j = k_j y_j + c_j x_j$, де y_j — бульові змінні вигляду $y_j = \begin{cases} 0, x_j = 0, \\ 1, x_j > 0. \end{cases}$

Таку умову можна записати у вигляді лінійної нерівності. Припустимо, що існує таке досить велике число *M*, для якої умова $x_j \leq M$ виконуватиметься для всіх допустимих значень x_j, тоді обмеження вигляду

$$x_j \leq M y_j$$

завжди виконується при $y_j = 1$, і, крім того, якщо y_j — ціле число, то мінімізація цільової функції забезпечує найменше значення $y_j = 1$. Якщо $y_j = 0$, то нерівність $x_j \leq M y_j = 0$ забезпечить $x_j = 0$.

Отже, матимемо таку математичну модель. Цільова функція, що описує мінімальні сумарні витрати на виробництво всіх видів продукції набуває вигляду:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n}(k_j y_j + c_j x_j),$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \, (i = \overline{1,m}) \\ x_j \le M y_j \; (j = \overline{1,n}) \end{cases},$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,n}),$$

$$y_j \ge 0, (j = \overline{1,n}),$$

$$y_j \text{ — цілі } (j = \overline{1,n}).$$

Приклад 5.7. Фермер планує виробляти три види продукції — озиму пшеницю, цукрові буряки і молоко. Сумарні витрати складаються з двох частин: постійні та поточні. Відповідні дані наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Показник	Вид продукції		
	Озима пшениця, т	Цукровий буряк, т	Молоко, т
Постійні витрати, тис. грн	40	70	20
Поточні витрати на одиницю продукції, грн	400	150	500
Норма витрат ріллі, га	0,2	0,02	0,25
Ціна одиниці продукції, грн	800	300	1000

Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду, якщо з цією метою використовується 100 га ріллі.

*Розв'язування***.** Нехай x_j — обсяг виробництва j-го виду продукції, $j = \overline{1,3}$.

Функція сумарних витрат на виробництво j-го виду продукції $Z_j = k_j y_j + c_j x_j$.

Як цільову функцію в даному прикладі беремо максимізацію валового прибутку

$$\max F = \sum_{j=1}^{3}(p_j x_j - Z_j) = \sum_{j=1}^{3}\left((p_j - c_j)x_j - k_j y_j\right),$$

де p_j — ціна одиниці j-ї продукції.

Обмеження на використання ріллі $\sum_{j=1}^{3} a_j x_j \le A$,

де a_j — норма витрат ріллі на одиницю j-ї продукції; A — ресурс ріллі.

У цілому маємо математичну модель

$$\max F = \sum_{j=1}^{3}\left((p_j - c_j)x_j - k_j y_j\right),$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} a_j x_j \le A \\ x_j \le M y_j, (j = \overline{1,3}) \end{cases},$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3}),$$

$$y_j \ge 0, (j = \overline{1,3}),$$

$$y_j \text{ — цілі } (j = \overline{1,3}).$$

Запишемо числову економіко-математичну модель. Очевидно, що максимальна кількість виробництва пшениці становить $\frac{100}{0,2}$ =500 т, цукрових буряків — $\frac{100}{0,2}$ =5000 т, молока — $\frac{100}{0,25}$ =400 т. Отже, M може дорівнювати 5000. Звідси маємо

$$\max F = 400x_1 + 150x_2 + 500x_3 - 40000y_1 - 70000y_2 - 20000y_3$$

за умов

$$\begin{aligned}
&0{,}2x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}25x_3 \le 100, \\
&0 \le x_1 \le 5000y_1, \\
&0 \le x_2 \le 5000y_2, \\
&0 \le x_3 \le 5000y_3, \\
&y_j \ge 0, (j = \overline{1,3}), \\
&y_j \text{ — цілі } (j = \overline{1,3}).
\end{aligned}$$

Розв'язуючи задачу, отримуємо оптимальний план:

$$X^* = (x_1 = x_3 = 0, x_2 = 5000). \; F_{\max} = 680000.$$

Звичайно, у реальній ситуації існує більший набір можливих видів продукції, а також багато обмежень щодо ресурсів.

Задача планування виробничої лінії. Розглядається процес функціонування виробничої лінії. Відома схема, яка описує послідовність робіт для виготовлення k видів продукції $(k = \overline{1,K})$. Відомо a_j — час виконання j-ї операції $\left(j = \overline{1,n}\right)$; $d_j^{(k)}$ — момент часу (термін) для k-го виробу, до якого необхідно завершити операцію j; x_j — час (термін) початку j-ї операції; t — сумарний час виконання всіх операцій як проміжок часу від деякого початкового моменту. Припускається, що в кожен момент часу на верстаті виконується одна операція.

Визначити оптимальні терміни початку кожної операції.

Економіко-математична модель міститиме такі групи обмежень.

1. Послідовність виконання j-ї операції записується для всіх пар операцій $x_j + a_j \le x_i \left(i, j = \overline{1,n}\right)$, якщо j-та операція передує в часі i-й операції.

2. Обмеження нерозгалуженості виробничого процесу для операцій i та j, які не виконуються одночасно ($i \ne j$), має вигляд:

або $x_i - x_j = a_j$, якщо операція j передує в часі операції i; або $x_j - x_i = a_i$, якщо операція i передує в часі операції j.

Зауважимо, що логічні обмеження на зразок «або-або» не можуть входити до економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування, оскільки породжують неопуклу множину допустимих розв'язків. Тому необхідно ввести допоміжні змінні, які дозволяють записати наведені щойно логічні умови у вигляді лінійних обмежень. Це такі бульові змінні:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо операція } j \text{ передує } i; \\ 1, & \text{якщо операція } i \text{ передує } j. \end{cases}$$

Скориставшись прийомом з прикладу 5.6 (введення досить великого числа M), запишемо шукані обмеження:

$$\begin{aligned}
&My_{ij} + \left(x_i - x_j\right) \ge a_j \; \left(i, j = \overline{1,n}\right), \\
&M\left(1 - y_{ij}\right) + \left(x_j - x_i\right) \ge a_i \; \left(i, j = \overline{1,n}\right),
\end{aligned}$$

де M — досить велике число.

3. Обмеження щодо термінів виготовлення кожного виробу:

$$x_j + a_j \le d_j^{(k)} \; (k = \overline{1,K}),$$

де j — остання операція для k-го виробу.

4. Усі операції повинні бути виконанні до моменту часу t:

$$x_j + a_j \le t \; \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Критерій оптимальності:

$$\min Z = t,$$

тобто ставиться задача, щоб всі види виробів були виготовлені за мінімальний час.

Таким чином, доходимо на такої математичної моделі:

$\min Z = t$

$$\begin{cases} x_j + a_j \le x_i, \quad (i, j = \overline{1,n}; i \ne j), \\ My_{ij} + (x_i - x_j) \ge a_j, \ (i, j = \overline{1,n}; i \ne j), \\ M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \ge a_i, (i, j = \overline{1,n}; i \ne j), \\ x_j + a_j \le d_j^{(k)}, \quad (i = \overline{1,n}; k = \overline{1,K}), \\ x_j + a_j \le t, \quad (j = \overline{1,n}). \end{cases}$$

$x_i(x_j) \ge 0, t \ge 0$,

$y_{ij} \ge 0$, y_{ij} – цілі $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$.

Приклад 5.8. Оптимізувати режим функціонування виробничої лінії, яка охоплює 11 операцій з виготовлення двох виробів. Лінію обладнано одним багатоопераційним верстатом. Послідовність і тривалість (у хвилинах) виконання операцій відображено на рис. 5.9.

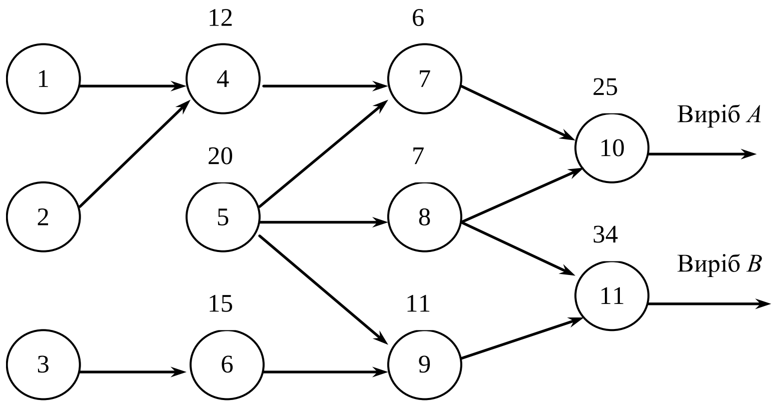


Рис. 5.9

Установлено термін виготовлення виробів A і B 120 і 150 хв відповідно. Передбачається, що в кожний момент часу на верстаті може виконуватися одна операція. Визначити оптимальний термін початку кожної операції.

Розв'язування. Запишемо числову економіко-математичну модель

$$\min Z = t$$

за наведених далі умов.

1. Послідовність виконання операцій:

$x_1 + 14 \le x_4$,
$x_2 + 8 \le x_4$,
$x_3 + 16 \le x_6$,
$x_4 + 12 \le x_7$,
$x_5 + 20 \le x_7$,
$x_5 + 20 \le x_8$,
$x_5 + 20 \le x_9$,
$x_6 + 15 \le x_9$,
$x_7 + 6 \le x_{10}$,
$x_8 + 7 \le x_{10}$,
$x_8 + 7 \le x_{11}$,
$x_9 + 11 \le x_{11}$.

2. Обмеження щодо нерозгалуженості виробничого процесу:

$My_{12} + (x_1 - x_2) \geq 8$,
$M(1 - y_{12}) + (x_2 - x_1) \geq 14$,
$My_{13} + (x_1 - x_3) \geq 16$,
$M(1 - y_{13}) + (x_3 - x_1) \geq 14$,
....
$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq a_j$
$M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq a_i$
....
$My_{10,11} + (x_{10} - x_{11}) \geq 34$,
$M(1 - y_{10,11}) + (x_{11} - x_{10}) \geq 25$.

3. Обмеження щодо термінів виготовлення виробів:

$x_{10} + 25 \leq 120$,
$x_{11} + 34 \leq 150$.

4. Усі операції мають бути виконані до моменту часу *t*:

$x_1 + 14 \leq t$,
$x_2 + 8 \leq t$,
$x_3 + 16 \leq t$,
....
$x_j + a_j \leq t$,
....
$x_{11} + 34 \leq t$.

5. Обмеження на змінні:

$x_i(x_j) \geq 0, t \geq 0$,
$y_{ij} \geq 0$, y_{ij} — цілі $\left(i, j = \overline{1,11}\right)$.
Отже, маємо частково цілочислову задачу з бульовими змінними.

Задача про призначення. Дана задача була розглянута в розділі 5 як задача, що зводиться до транспортної і може бути розв'язана одним з відомих методів пошуку оптимального плану транспортної задачі. Проте такий вид задач належить до задач цілочислового програмування, оскільки змінні задачі є бульовими і оптимальний план може бути знайденим також методами цілочислового програмування. Не повертаючись до загальної постановки задачі та побудови її математичної моделі (див. 5.10), наведемо ще один приклад задачі про призначення.

Приклад 5.9. Необхідно розподілити чотирьох робітників за чотирма видами устаткування так, щоб їх загальна продуктивність праці була максимальною. Дані стосовно продуктивності праці кожного робітника на устаткуванні кожному виду наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Робітник	Продуктивність праці, грн/год, на устаткуванні			
	1	2	3	4
1	12	9	8	7
2	10	7	6	5
3	9	6	4	4
4	8	5	3	2

Розв'язування. Відмітимо, що дану задачу можна розглядати як транспортну, в якій робітники ототожнюються з постачальниками вантажів, а види устаткування — зі споживачами цих вантажів. Обсяги пропозиції та попиту в кожному випадку дорівнюють 1. Отже, змінні будуть бульовими:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-й робітник виконує роботу на } j\text{-му устаткуванні;} \\ 0, & \text{у противному разі.} \end{cases}$$

Якщо відома продуктивність праці i-го робітника на j-му устаткуванні, то числова модель про призначення набирає вигляду

$$\max Z = 12x_{11} + 9x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 10x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} +$$
$$+ 9x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} + 8x_{41} + 5x_{42} + 3x_{43} + 2x_{44}$$

за умов

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1, \\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1, \\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1, \\
&x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1, \\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1, \\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1, \\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1, \\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1, \\
&x_{ij} \geq 0 \ \left(i, j = \overline{1, n}\right), \\
&x_{ij} \text{ — цілі числа } \left(i, j = \overline{1, n}\right).
\end{aligned}$$

З огляду на особливу структуру цієї задачі, зокрема її транспортний характер та рівність правих частин обмежень, для розв’язування можна застосувати ефективніший алгоритм, ніж для звичайної задачі цілочислового програмування з бульовими змінними. Пропонуємо ознайомитися з такими алгоритмами самостійно [12].

5.5. Економічна постановка та формалізація задач з дробово-лінійною цільовою функцією

Під час розв’язування економічних задач часто як критерій оптимальності використовують показники рентабельності, продуктивності праці тощо, які математично виражаються дробово-лінійними функціями. Отже, загальну економіко-математичну модель у цьому випадку записують таким чином (розглянемо задачу визначення оптимальних обсягів виробництва продукції): позначимо c_j — прибуток від реалізації одиниці j-го виду продукції, тоді загальний прибуток становитиме $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$; d_j — витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції; $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ — загальні витрати на виробництво. У випадку максимізації рентабельності виробництва цільова функція матиме вигляд

$$\max Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \tag{5.28}$$

за умов виконання обмежень по ресурсах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = \overline{1, m}), \tag{5.29}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{5.30}$$

Передбачається, що знаменник цільової функції в площині допустимих розв’язків системи обмежень не дорівнює нулю.

Очевидно, що задача (5.28)—(5.30) відрізняється від звичайної задачі лінійного програмування лише цільовою функцією, що дозволяє застосовувати у певній модифікації відомі методи розв’язування задач лінійного програмування.

5.6. Геометрична інтерпретація задач дробово-лінійного програмування

Для випадку, коли задача дробово-лінійного програмування містить лише дві змінні для її розв’язування, зручно скористатись графічним методом.

Нехай маємо таку задачу:

$$\max Z = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} \tag{5.31}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{5.32}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{5.33}$$

Спочатку, як і для звичайної задачі лінійного програмування, будуємо геометричне місце точок системи (5.32), що визначає деякий багатокутник допустимих розв’язків.

Припустимо, що $\left(d_1x_1 + d_2x_2\right) > 0$, і цільова функція набуває деякого значення

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = Z\,.$$

Після елементарних перетворень дістанемо

$$(c_1 - Zd_1)x_1 + (c_2 - Zd_2)x_2 = 0\,,$$

або

$$x_2 = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}x_1\,. \tag{5.34}$$

Останнє рівняння описує пряму, що обертається навколо початку системи координат залежно від зміни значень x_1, x_2.

Розглянемо кутовий коефіцієнт нахилу прямої (5.34), що описує цільову функцію

$$k(Z) = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}\,. \tag{5.35}$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт являє собою функцію від *Z*. Для визначення умов зростання (спадання) функції (5.35) розглянемо зміну знаку її похідної:

$$\begin{gathered} k'(Z) = -\frac{\left(c_1 - Zd_1\right)'\left(c_2 - Zd_2\right) - \left(c_2 - Zd_2\right)'\left(c_1 - Zd_1\right)}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} \\ -\frac{-d_1\left(c_2 - Zd_2\right) + d_2\left(c_1 - Zd_1\right)}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} = -\frac{-d_1c_2 + Zd_1d_2 + d_2c_1 - Zd_1d_2}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} \Rightarrow . \\ \Rightarrow k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} \end{gathered} \tag{5.36}$$

Використовуючи (5.36), можна встановити правила пошуку максимального (мінімального) значень цільової функції:

1) якщо $k'(Z) = \dfrac{d_1c_2 - d_2c_1}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} > 0 \Rightarrow \left(d_1c_2 - d_2c_1\right) > 0$, то функція (5.35) є зростаючою і у разі збільшення значення *Z* (значення цільової функції) кутовий коефіцієнт нахилу прямої (5.34) також збільшується. Отже, у випадку, коли $\left(d_1c_2 - d_2c_1\right) > 0$ для відшукання точки максимуму необхідно по-

вертати пряму, що описує цільову функцію навколо початку системи координат в напрямку проти часової стрілки;

2) якщо $k'(Z)=\dfrac{d_1c_2-d_2c_1}{(c_2-Zd_2)^2}<0 \Rightarrow (d_1c_2-d_2c_1)<0$, то функція (5.35) є спадною і у разі збільшення значення Z (значення цільової функції) кутовий коефіцієнт нахилу прямої (5.34) буде зменшуватись. Тому у випадку, коли $(d_1c_2-d_2c_1)<0$ для відшукання точки максимуму необхідно повертати пряму, що описує цільову функцію навколо початку системи координат у напрямку за годинниковою стрілкою.

При розв'язуванні графічно задачі дробово-лінійного програмування можливі такі випадки:

– багатокутник розв'язків задачі обмежений і максимальне та мінімальне значення досягається в його кутових точках;

– багатокутник розв'язків задачі необмежений, однак існують кутові точки, в яких досягається максимальне і мінімальне значення цільової функції;

– багатокутник розв'язків задачі необмежений і досягається лише один з екстремумів;

– багатокутник розв'язків задачі необмежений, точки екстремумів визначити неможливо.

Приклад 5.10. Розв'язати графічно задачу дробово-лінійного програмування:

$$\max(\min)Z=\frac{5x_1-2x_2}{2x_1+x_2}$$

за умов

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\geq 12,\\ -x_1+2x_2\leq 6,\\ 2x_1-2x_2\leq 8,\end{cases}$$
$$x_1\geq 0, x_2\geq 0.$$

Розв'язування. Побудуємо на площині область допустимих розв'язків задачі. Маємо трикутник *ABC*.

Цільова функція задачі являє собою пряму, що обертається навколо початку системи координат (на рисунку позначаємо пунктиром).

Отже, залежно від напрямку обертання, точками максимуму та мінімуму будуть *A* і *C*.

Скористаємося правилами визначення максимального (мінімального) значень цільової функції. Перевіримо умову $(d_1c_2-d_2c_1)=(2\cdot(-2)-1\cdot 5)=-9<0$, тобто для будь-якого значення Z функція $k'(Z)$ є спадною. Отже, зі зростанням Z кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що описує цільову функцію, зменшуватиметься, а тому відповідну пряму потрібно обертати навколо початку координат за годинниковою стрілкою.

Виконуючи вказаний порядок дій, маємо *C* — точка максимуму, а точка *A* — точка мінімуму досліджуваної задачі.

5.7. Розв'язування дробово-лінійної оптимізаційної задачі зведенням до задачі лінійного програмування

Нехай потрібно розв'язати задачу (5.28) — (5.30).

Позначимо

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}d_jx_j}=y_0$$

і введемо заміну змінних $y_j=y_0x_j\ (j=\overline{1,n})$. Тоді цільова функція (5.28) матиме вигляд

$$Z=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j}{\sum_{j=1}^{n}d_jx_j}=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\cdot\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}d_jx_j}=\sum_{j=1}^{n}c_jx_jy_0=\sum_{j=1}^{n}c_jy_j\quad .$$

Одержали цільову функцію, що описується лінійною залежністю.

Оскільки $y_j = y_0 x_j \,(j=\overline{1,n})$, то звідси маємо $x_j = \frac{y_j}{y_0}$. Підставимо виражені через нові змінні значення x_j в систему обмежені (5.29):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 (i=\overline{1,m}),$$

крім того, з початкової умови

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = y_0 \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}{1} = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_0 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1.$$

Умова (5.30) стосовно невід'ємності змінних набуває вигляду

$$y_j \geq 0 (j=\overline{1,n}), y_0 \geq 0.$$

Виконані перетворення приводять до наступної задачі:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \;;$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 (i=\overline{1,m}), \\ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1 \end{cases}$$
$$y_j \geq 0 (j=\overline{1,n}), y_0 \geq 0.$$

Отже, маємо задачу лінійного програмування, яку можна розв'язувати симплексним методом.
Припустимо, що оптимальний розв'язок останньої задачі існує і позначається

$$Y^* = (y_0^*, y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*).$$

Оптимальні значення початкової задачі (5.28) — (5.30) знаходимо за умови, що $x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}$ $(j=\overline{1,n})$.

Приклад 5.11. Сільськогосподарське акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю, яке розміщене у Лісостепу України, бажає оптимізувати структуру виробництва. Критерієм оптимальності вибрали максимізацію рентабельності як відношення прибутку до собівартості. У таблиці маємо дані про діяльності, якими керівництво товариства передбачає займатися.

Акціонерне товариство має 2500 га ріллі. Для виготовлення кормів передбачається використовувати продукцію з 20 % площі, що відведено під вирощування озимої пшениці, і з 30 % площі, що відведено для виробництва цукрових буряків.

Знайти оптимальну структуру виробництва.

*Розв'язування***.** Введемо позначення:

x_1 — площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — площа посіву цукрового буряку, га;

x_3 — площа посіву кормових культур, га;

x_4 — кількість корів продуктивність 5000 кг;

x_5 — кількість корів продуктивність 4500 кг;
x_6 — кількість корів продуктивність 4000 кг;
x_7 — кількість корів продуктивність 3500 кг.

Показники	Діяльності							
	Озима пшениця	Цукрові буряки	Корови продуктивністю, кг				Кормові культури	Ресурс
			5000	4500	4000	3500		
Урожайність т/га	4	35	—	—	—	—	6	—
Собівартість грн/т	600	250	600	700	800	900	200	—
Ціна грн/т	800	300	1000	1000	1000	1000	—	—
Вихід кормів кор. од/га	0,8	2,0	—	—	—	—	6	—
Витрати живої праці людино-днів/га	4	25	6	6	6	6	3	26 000
Витрати механізованої праці людино-днів/га	2	8	3	3	3	3	2	11 000
Доля корів			0,1	0,2	0,3	0,4		
Потреби у кормах, т кор.од/гол	—	—	5	4,7	4,4	4,1		

Запишемо критерій оптимальності

$$\max Z = \frac{0{,}8 \cdot 800 x_1 + 0{,}7 \cdot 1750 x_2 + 2000 x_4 + 1350 x_5 + 800 x_6 + 350 x_7}{2400 x_1 + 8750 x_2 + 1200 x_3 + 3000 x_4 + 3150 x_5 + 3200 x_6 + 3150 x_7}$$

за таких умов.

1. Обмеження за ресурсами:

а) використання ріллі $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2500$;

б) використання живої праці $4x_1 + 25x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 6x_7 \leq 26000$;

в) використання механізованої праці

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 \leq 11000.$$

2. Обмеження по сівозмінах:

а) посівна площа кормових культур має бути більша або дорівнювати площі під озимою пшеницею $x_3 \geq x_1$;

б) посівна площа озимої пшениці має бути більша або дорівнювати площі під цукровими буряками $x_1 \geq x_2$.

3. Структура корів за продуктивністю:

а) балансове рівняння щодо кількості корів: $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = x_8$,

де x_8 — загальна кількість корів;

б) частка корів продуктивністю 5000 кг: $x_4 \leq 0{,}1x_8$;

в) частка корів продуктивністю 4500 кг: $x_5 \leq 0{,}2x_8$;

г) частка корів продуктивністю 4000 кг: $x_6 \leq 0{,}3x_8$;

д) частка корів продуктивністю 3500 кг: $x_5 \leq 0{,}4x_8$.

4. Забезпеченість корів кормами:

$0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot x_1 + 2 \cdot 0{,}3 \cdot x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 4{,}7x_5 - 4{,}4x_6 - 4{,}1x_7 \geq 0$.

Невід'ємність змінних $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1{,}8}$).

Щоб знайти розв'язок за цією моделлю, необхідно зробити відповідну заміну, отже

$$\frac{1}{2400 x_1 + 8750 x_2 + 1200 x_3 + 3000 x_4 + 3150 x_5 + 3200 x_6 + 3150 x_7} = y_0$$

і $y_j = y_0 \cdot x_j$

Отже, маємо лінійну економіко-математичну модель:

$$\max f = 800y_1 + 1750y_2 + 2000y_4 + 1350y_5 + 800y_6 + 350y_7$$

за умов

1. $y_1 + y_2 + y_3 - 2500y_0 \le 0$,
$4y_1 + 25y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 6y_5 + 6y_6 + 6y_7 - 26000y_0 \le 0$,
$2y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 3y_7 - 11000y_0 \le 0$,
2. $y_3 - y_1 \ge 0,$
$y_1 - y_2 \ge 0,$
3. $y_4 + y_5 + y_6 + y_7 - y_8 = 0$,
$y_4 - 0{,}1y_8 \le 0,$
$y_5 - 0{,}2y_8 \le 0,$
$y_6 - 0{,}3y_8 \le 0$,
$y_7 - 0{,}4y_8 \le 0$;
4. $0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot y_1 + 2 \cdot 0{,}3 \cdot y_2 + 6y_3 - 5y_4 - 4{,}7y_5 - 4{,}4y_6 - 4{,}1y_7 \ge 0$;
5. $2400y_1 + 8750y_2 + 1200y_3 + 3000y_4 + 3150y_5 + 3200y_6 + 3150y_7 = 1$;
6. $y_j \ge 0 \left(j = \overline{0,8}\right)$.

Розв'язуючи задачу симплексним методом, одержимо такий оптимальний план:

$$Y^* = (y_1 = 152{,}59; y_2 = 100{,}624; y_3 = 152{,}59; y_4 = 22{,}42; y_5 = 44{,}84; y_6 = 67{,}45; y_7 = 89{,}87)$$

Ураховуючи, що $x_j^* = \dfrac{y_j^*}{y_0^*}$ $(j = \overline{1,n})$, маємо оптимальний план початкової задачі:

$X^* = (x_1 = 803{,}12; x_2 = 529{,}6; x_3 = 803{,}12; x_4 = 118; x_5 = 236; x_6 = 355; x_7 = 473)$, причому значення цільової функції (рентабельність виробництва) становить $Z = 0{,}19$, тобто 19 %.

5.8. Комп'ютерні технології розв'язку цілочислових оптимізаційних задач за допомогою *Microsoft Excel* Solver

Симплексний метод розв'язку лінійних оптимізаційних задач є ітеративним методом. Це означає, що використання його для розв'язку економічних оптимізаційних задач може бути ефективним лише за умови застосування комп'ютерних технологій.

Розглянемо методи розв'язку економічних задач оптимізації за допомогою пакета «Поиск решения» комп'ютерної системи Excel.

Задача. Фірма випускає чотири типи світильників, для чого закуповує металеві прутки, довжиною 6 і 8 м відповідно, які необхідно розкроїти на деталі чотирьох типорозмірів — 1,5; 1,2; 0,9 і 0,7 м, котрі будуть використані фірмою «Success» для випуску світильників.

Метою розв'язку даної задачі є знаходження оптимального плану розкрою, тобто потрібно з розроблених варіантів розкрою відшукати таку їх множину, щоб потреба в деталях усіх типорозмірів була задоволена повністю і загальні відходи ресурсів були б найменшими.

Наведемо загальну модель задачі:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_{jr} x_{jr} \text{ (min)};$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{jr} \ge b_i;\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ r = \overline{1,R};$$

$x_{jr} \ge 0$, цілі числа.

У моделі використані такі індекси і позначення:

i — номер типорозміру деталей, $i = \overline{1,m}$;

m — кількість типорозмірів деталей;

j — номер варіанта, $j = \overline{1,n}$;

n — кількість варіантів розкрою;

r — номер виду ресурсу, $r = \overline{1, R}$;

R — кількість видів ресурсів;

a_{ijr} — вихід деталей i-го типорозміру за j-м варіантом розкрою з одиниці ресурсу r-го виду;

c_{jr} — відходи по j-ому варіанту з одиниці ресурсу r-ого виду;

x_{jr} — невідомі змінні, котрі визначають інтенсивність j-го варіанта розкрою, або кількість ресурсів r-го виду, що розкраюється за j-м варіантом розкрою.

Таким чином, загальна модель задачі складається з трьох частин (1)—(3).

Економічний зміст математичної моделі:

цільова функція (1) вимагає, щоб загальні відходи матеріалів у процесі розкрою були мінімальними;

обмеження (2) відповідають кожному типорозміру деталей і показують, що вихід деталей i-го типорозміру з усіх варіантів розкрійного плану має бути не меншим від їх потреби;

обмеження (3) виражають умову того, що змінні, котрі в сукупності після розв'язку задачі складатимуть оптимальний план розкрою, мають бути невід'ємними і цілочисельними.

Формування варіантів розкрою матеріалів. ***Отже, перш за все для розв'язку задачі потрібно розробити варіанти розкрою. У таблиці наведено 20 варіантів, з них — 10 варіантів для першого виду ресурсу (6 м) і 10 для другого виду ресурсу (8 м).***

Варіанти розкрою

Таблиця 1

Типорозмір деталей	Перший вид ресурсу (r_1 = 6 м)										Другий вид ресурсу (r_2 = 8 м)									
	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{41}	p_{51}	p_{61}	p_{71}	p_{81}	p_{91}	$p_{10,1}$	p_{12}	p_{22}	p_{32}	p_{42}	p_{52}	p_{62}	p_{72}	p_{82}	p_{92}	$p_{10,2}$
r_1=1,5	4	3	2	0	1	0	1	1	1	0	4	3	0	0	1	0	1	0	0	0
r_2=1,2	0	1	2	5	3	3	1	1	0	0	1	2	3	0	2	1	1	0	0	0
r_3=0,9	0	0	0	0	0	2	3	2	5	1	0	1	1	8	3	5	1	7	6	0
r_4=0,7	0	0	0	0	1	0	0	2	0	7	1	0	5	1	0	2	5	2	3	11
Відходи	0	0,3	0,6	0	0,2	0,6	0,6	0,1	0	0,2	0,1	0,1	0	0,1	0,2	0,1	0,1	0,3	0,5	0,3

Кожен варіант позначений p_{jr} і їм відповідають змінні — x_{jr}, їх інтенсивності. Варіанти розкрою будуються шляхом послідовного перебору всіх можливих сполук типорозмірів деталей на одиниці ресурсу відповідного типу.

Перший варіант розкрою. Наприклад, побудуємо перший варіант розкрою p_{11} на довжині матеріалу довжиною 6 м. За цим варіантом деталь типорозміру 1,5 м може укластись на довжині прутка чотири рази і відхід буде рівним 0.

Дійсно: $4 \cdot 1{,}5$ м + 0 = 6 м.

Другий варіант розкрою. За другим варіантом p_{21} передбачається вихід три типорозміри деталей 1,5 м і одна деталь типорозміру 1,2 м з відходом рівним 0,3 м:

$$1{,}5 \text{ м} \cdot 3 + 1{,}2 \text{ м} \cdot 1 + 0{,}3 = 4{,}5 \text{ м} + 1{,}2 \text{ м} + 0{,}3 \text{ м} = 6 \text{ м}.$$

Отже, загальний вихід деталей за цим варіантом становить

$$4{,}5 + 1{,}2 = 5{,}7 \text{ м},$$

тоді відхід дорівнює $6 - 5{,}7 = 0{,}3$ м.

Варіанти розкрою, котрі побудовані на другому виді матеріалу довжиною 8 м, мають позначення p_{j2} і розраховуються таким же чином.

Наприклад, за першим варіантом розкрою p_{12} на одиниці матеріалу довжиною 8 м укладається чотири деталі типорозміру 1,5 м, одна деталь довжиною 1,2 м і одна деталь — 0,7 м. Тоді загальний вихід всіх типорозмірів деталей становитиме

$$1{,}5 \text{ м} \cdot 4 + 1{,}2 \text{ м} \cdot 1 + 0{,}7 \text{ м} \cdot 1 = 6 \text{ м} + 1{,}2 \text{ м} + 0{,}7 \text{ м} = 7{,}9 \text{ м}.$$

Отже, відхід дорівнює $8 - 7{,}0 = 0{,}1$ м.

Перебираючи довільно різні сполучення типорозмірів деталей на одиниці ресурсу відповідної довжини, будуються й інші варіанти розкрою.

Таким чином, маючи побудовані варіанти розкрою і потребу у деталях різних типорозмірів, побудуємо числову модель задачі оптимального розкрою ресурсів.

Постановка задачі раціонального розкрою фірми. ***Цільова функція***

$$Z = 0 \cdot x_{11} + 0{,}3 \cdot x_{21} + 0{,}6 \cdot x_{31} + 0 \cdot x_{41} + 0{,}2 \cdot x_{51} + 0{,}6 \cdot x_{61} + 0{,}6 \cdot x_{71} + 0{,}1 \cdot x_{81} + \\ + 0 \cdot x_{91} + 0{,}2 \cdot x_{10,1} + 0{,}1 \cdot x_{12} + 0{,}1 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{32} + 0{,}1 \cdot x_{42} + 0{,}2 \cdot x_{52} + 0{,}1 \cdot x_{62} + \\ + 0{,}1 \cdot x_{72} + 0{,}3 \cdot x_{82} + 0{,}5 \cdot x_{92} + 0{,}3 \cdot x_{10,2} \text{ (min)}.$$

Обмеження за потребою у деталях відповідних типорозмірів:
для деталей довжиною 1,5 м:

$$4 \cdot X_{11} + 3 \cdot X_{21} + 2 \cdot X_{31} + 0 \cdot X_{41} + 1 \cdot X_{51} + 0 \cdot X_{61} + 1 \cdot X_{71} + 1 \cdot X_{81} + 1 \cdot X_{91} + \\ + 0 \cdot X_{10,1} + 4 \cdot X_{12} + 3 \cdot X_{22} + 0 \cdot X_{32} + 0 \cdot X_{42} + 0 \cdot X_{42} + 1 \cdot X_{52} + 0 \cdot X_{62} + 1 \cdot X_{72} + 0 \cdot X_{82} + 0 \cdot X_{92} + 0 \cdot X_{10,2} \geq 400;$$

для деталей довжиною 1,2 м:

$$0 \cdot X_{11} + 1 \cdot X_{21} + 2 \cdot X_{31} + 5 \cdot X_{41} + 3 \cdot X_{51} + 3 \cdot X_{61} + 1 \cdot X_{71} + 1 \cdot X_{81} + 0 \cdot X_{91} + 0 \cdot X_{10,1} + 1 \cdot X_{12} + 2 \cdot X_{22} + 3 \cdot X_{32} + \\ + 0 \cdot X_{42} + 2 \cdot X_{52} + 1 \cdot X_{62} + 1 \cdot X_{72} + 0 \cdot X_{82} + 0 \cdot X_{92} + 0 \cdot X_{10,2} \geq 600;$$

для деталей довжиною 0,9 м:

$$0 \cdot X_{11} + 0 \cdot X_{21} + 0 \cdot X_{31} + 0 \cdot X_{41} + 0 \cdot X_{51} + 2 \cdot X_{61} + 3 \cdot X_{71} + 2 \cdot X_{82} + 5 \cdot X_{91} + 1 \cdot X_{10,1} + 0 \cdot X_{12} + \\ + 1 \cdot X_{22} + 1 \cdot X_{32} + 8 \cdot X_{42} + 3 \cdot X_{52} + 5 \cdot X_{62} + 1 \cdot X_{72} + 7 \cdot X_{82} + 6 \cdot X_{92} + 0 \cdot X_{10,2} \geq 500;$$

для деталей довжиною 0,7 м:

$$0 \cdot X_{11} + 0 \cdot X_{21} + 0 \cdot X_{31} + 0 \cdot X_{41} + 1 \cdot X_{51} + 0 \cdot X_{61} + 0 \cdot X_{71} + 2 \cdot X_{81} + 0 \cdot X_{91} + 7 \cdot X_{10,1} + 1 \cdot X_{12} + \\ + 0 \cdot X_{22} + 5 \cdot X_{32} + 1 \cdot X_{42} + 0 \cdot X_{52} + 2 \cdot X_{62} + 5 \cdot X_{72} + 2 \cdot X_{82} + 3 \cdot X_{92} + 11 \cdot X_{10,2} \geq 300;$$

умови невід'ємності змінних $X_{jr} \geq 0$, цілі числа; $j = \overline{1,n}$, $r = \overline{1,R}$.

Підготовка інформації для розв'язку задач на ПК. ***Розв'язок моделі початкової задачі здійснюється в Excel («Сервис», «Поиск решения»).***

Вихідна інформація: планова потреба в деталях певних типорозмірів і множина варіантів розкрою з визначенням виходу тих чи тих типорозмірів деталей і величини відходів з кожного варіанта одиничної інтенсивності.

Сукупність побудованих варіантів надається в таблиці (табл. 5) і заноситься в поле Excel.

Пошук розв'язку відбувається у такій послідовності.

1. Виділяємо діапазон комірок для шуканих змінних моделі. Цей діапазон має складатись з 20-ти комірок, кожна з яких відповідає інтенсивності того чи того варіанта розкрою (краще всього цей діапазон розмістити в табл. 1 над варіантами розкрою. Ці комірки до розв'язку задачі можна заповнити довільними числами, тобто всі змінні x_{jr} (початковий план) є довільними.

2. В окремій комірці знаходимо значення цільової функції з використанням вбудованої математичної функції СУММПРОИЗВ (перший масив — рядок табл. 1, котрий відповідає відходам; другий масив — діапазон комірок відповідний шуканим змінним, котрі в період підготовки моделі до розв'язку є довільними). Після реалізації цієї функції у виділеній комірці з'явиться результат початкової цільової функції задачі. Послідовно в окремих комірках за допомогою вбудованої математичної функції МУМНОЖ аналогічно знаходимо значення лівих частин обмежень за потребою у деталях 4-х типорозмірів.

3. В окремі комірки заносимо числа, які відповідають плановій потребі в деталях відповідних типорозмірів (це значення вільних членів обмежень моделі початкової задачі: 400, 600, 500 і 300);

1) вибираємо команду «Сервіс → Поиск решения» і вводимо інформацію у вікно «Поиск» (рис. 1); далі активізуємо клавішу«Выполнить» і, якщо з'явиться інформація «Решение найдено» (рис. 2), перейти до аналізу оптимального плану;

2) у вікні «Результаты» пакета програм «Поиск решений» активізуємо команди «Результати» і «Устойчивость».

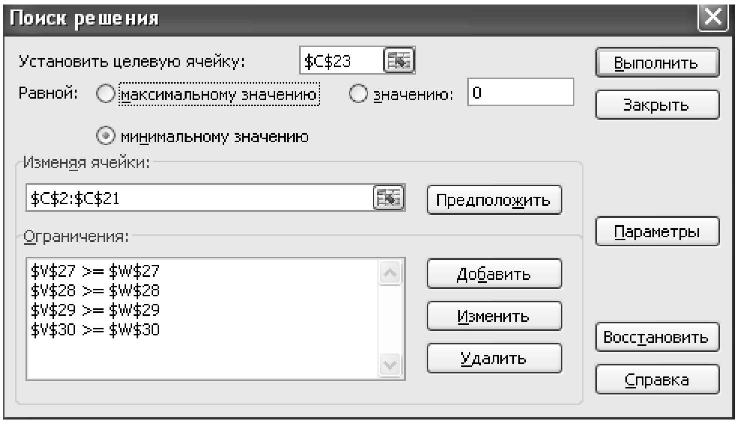
Інформація для розв'язку задачі записується так:

Інтенсивність способів крою	Початковий довільний план	Відходи при розкрою
x_{11}	2,0	0
x_{21}	2,0	0,3
x_{31}	2,0	0,6
x_{41}	2,0	0
x_{51}	2,0	0,2
x_{61}	2,0	0,6
x_{71}	2,0	0,6
x_{81}	2,0	0,1
x_{91}	2,0	0
$x_{10,1}$	2,0	0,2
x_{12}	2,0	0,1
x_{22}	2,0	0,1
x_{32}	2,0	0
x_{42}	2,0	0,1
x_{52}	2,0	0,2
x_{62}	2,0	0,1
x_{72}	2,0	0,1
x_{82}	2,0	0,3
x_{92}	2,0	0,5
$x_{10,2}$	2,0	0,3
Z_0=		8,8

x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}	x_{61}	x_{71}	x_{81}	x_{91}	$x_{10,1}$	x_{12}	x_{22}
4	3	2	0	1	0	1	1	1	0	4	3
0	1	2	5	3	3	1	1	0	0	1	2
0	0	0	0	0	2	3	2	5	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0	2	0	7	1	0

x_{32}	x_{42}	x_{52}	x_{62}	x_{72}	x_{82}	x_{92}	$x_{10,2}$	Ліва частина обмеження	Права частина обмеження
0	0	1	0	1	0	0	0	44	400
3	0	2	1	1	0	0	0	52	600
1	8	3	5	1	7	6	0	90	500
5	1	0	2	5	2	3	11	80	300

Наведена інформація заноситься до вікна пакета програми «Поиск решения».



Зауважимо, що розв'язок даної задачі є цілочисловим, тому її потрібно розв'язати в «Поиск решений», задавши додаткову умову для шуканих змінних — «Целые значения», або розв'язати як задачу лінійного програмування, округлюючи дробові значення x_{jr} до цілих чисел. У цьому випадку в «Отчете по устойчивости» програми «Поиск решений» буде розрахований оптимальний план двоїстої задачі (див. «Теневые цены»).

Аналіз оптимального плану розкрою. Аналіз проводиться у такій послідовності:

1) визначаємо, яка кількість ресурсів кожного виду має бути розкроєна по тому чи тому варіанту; знаходимо загальну кількість кожного виду ресурсів для виготовлення планової потреби в деталях відповідних типорозмірів;

2) розраховуємо значення цільової функції $Z_{\min}$, тобто визначаємо мінімальні загальні відходи ресурсів за всіма варіантами розкрою, що увійшли до оптимального плану;

3) визначаємо вихід деталей кожного типорозміру з усіх варіантів розкрою оптимального плану і порівнюємо його з плановою потребою;

4) знаходимо оптимальний план моделі двоїстої задачі («Поиск решения» — «Отчет по устойчивости»; «Теневые цены»);

5) перевіряємо рівність цільових функцій за першою теоремою двоїстості:

$$Z_{\min} = F_{\max};$$

6) перевіряємо, як виконуються обмеження двоїстої задачі, котрі відповідають змінним $X_{jr} > 0$ і $X_{jr} = 0$ (застосування другої теореми двоїстості).

Задача оптимального використання обладнання фірми «Success»

1. Загальна математична модель задачі:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_{ij}$$

за умов

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \le A_j \\ &\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = B_i \end{aligned}$$

Подамо економічний зміст застосованих символів у задачі:

t_{ij} — затрати часу на обробку одиниці деталі *i*-го виду на *j*-й групі обладнання ($i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}$);

A_j — режимний фонд часу роботи *j*-ї групи обладнання;

B_i — необхідна кількість деталей *i*-го виду, які необхідно обробити;

x_{ij} — невідомі величини, що характеризують кількість деталей *i*-го виду, які необхідно обробити на *j*-й групі обладнання.

Отже, у цільовій функції задачі мінімізуються сумарні затрати часу на обробку всіх деталей на всіх групах обладнання.

Перша система обмежень вимагає, щоб затрати часу на обробку всіх деталей на одному типі обладнання не перевищували режимного фонду часу його роботи.

Друга система обмежень вимагає, щоб кількість деталей кожного виду, яка обробляється на різних типах обладнання, відповідала потребі цих деталей для формування попиту світильників.

Виконаємо математичну постановку задачі фірми "Success", яка випускає чотири види світильників, що обробляються на чотирьох типах взаємозамінюваного обладнання. Для цього запишемо всю необхідну інформацію спочатку у табл. 5.6.

Таблиця 5.6

Типи обладнання	Норми затрат часу на обробку одиниці продукції, маш.-год								Режимний фонд часу роботи обладнання, маш.-год
	1		2		3		4		
I	10,5	x_{11}	11,1	x_{12}	0	x_{13}	9	x_{14}	3500
II	0	x_{21}	5,7	x_{22}	4,8	x_{23}	6,0	x_{24}	3800
III	3,8	x_{31}	3,2	x_{32}	3,0	x_{33}	0	x_{34}	3020
Попит на світильники, шт.	400		600		500		300		

2. Математична модель задачі оптимального використання обладнання:

$$Z(\min) = 10{,}5x_{11} + 11{,}1x_{12} + 9x_{14} + 5{,}7x_{22} + 4{,}8x_{23} + 6x_{24} + 3{,}8x_{31} + 3{,}2x_{32} + 3x_{32}$$

за умов

$$\begin{array}{l} 10{,}5x_{11} + 11{,}1x_{12} + 9x_{14} \le 3500 \\ 5{,}7x_{22} + 4{,}8x_{23} + 6x_{24} \le 3800 \\ 3{,}8x_{31} + 3{,}2x_{32} + 3x_{33} \le 3020 \\ x_{11} + x_{31} \ge 400 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 600 \\ x_{23} + x_{33} \ge 500 \\ x_{14} + x_{24} \ge 300 \\ x_{ij} \ge 0; \left(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}\right) \end{array}.$$

Двоїста задача. Щоб правильно побудувати двоїсту задачу до записаної вище необхідно спочатку привести знак нерівності обмежень у відповідність до екстремуму цільової функції задачі. Цільова функція на мінімум вимагає тип нерівності «$\ge$». Запишемо систему обмежень:

$$\begin{array}{l|l} -10{,}5x_{11} - 11{,}1x_{12} - 9x_{14} \ge -3500 & y_1 \\ -5{,}7x_{22} - 4{,}8x_{23} - 6x_{24} \ge -3800 & y_2 \\ -3{,}8x_{31} - 3{,}2x_{32} - 3x_{33} \ge -3020 & y_3 \\ x_{11} + x_{31} \ge 400 & y_4 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 600 & y_5 \\ x_{23} + x_{33} \ge 500 & y_6 \\ x_{14} + x_{24} \ge 300 & y_7 \\ x_{ij} \ge 0; \left(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}\right) & \end{array}.$$

$$F(\max) = -3500y_1 - 3800y_2 - 3020y_3 + 400y_4 + 600y_5 + 500y_6 + 300y_7;$$

$$
\begin{array}{l|l}
-10{,}5y_1 + y_4 \le 2{,}5 & x_{11} \\
-11{,}1y_1 + y_5 \le 2 & x_{12} \\
-9y_1 + y_7 \le 1{,}5 & x_{14} \\
-5{,}7y_2 + y_5 \le 1{,}7 & x_{22} \\
-4{,}8y_2 + y_6 \le 2{,}8 & x_{23} \\
-6y_2 + y_7 \le 3 & x_{24} \\
-3{,}8y_3 + y_4 \le 2{,}4 & x_{31} \\
-3{,}2y_3 + y_5 \le 2{,}2 & x_{32} \\
-3{,}0y_3 + y_6 \le 1{,}3 & x_{33}
\end{array}
$$
$$y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;\ y_4 \ge 0;\ y_5 \ge 0;\ y_6 \ge 0;\ y_7 \ge 0.$$

Щоб економічно тлумачити двоїсту задачу, необхідно дати економічний зміст її змінних, які називаються двоїстими оцінками або тіньовими цінами:

y_1 — двоїста оцінка одиниці часу роботи обладнання першого типу;
y_2 — двоїста оцінка одиниці часу роботи обладнання другого типу;
y_3 — двоїста оцінка одиниці часу роботи обладнання третього типу;
y_4 — двоїста оцінка одного світильника першого вигляду;
y_5 — двоїста оцінка одного світильника другого вигляду;
y_6 — двоїста оцінка одного світильника третього вигляду;
y_7 — двоїста оцінка одного світильника четвертого вигляду.

У цільовій функції двоїстої задачі максимізується різниця між оцінкою світильників усіх видів та оцінкою режимного фонду часу роботи всіх типів обладнання.

Кожне обмеження двоїстої задачі належить до певної змінної вихідної задачі. Навпроти кожного із них записана відповідна змінна. Відсутні лише ті змінні, які за умовою задачі дорівнюють 0. У кожному обмеженні двоїстої задачі порівнюється різниця між оцінкою одного світильника, деталі якого оброблюються на даній групі обладнання, і оцінкою робочого часу обладнання, що витрачається на обробку одного світильника, з часом обробки деталей даного світильника. Якщо ця різниця дорівнює часу обробки (виконується рівняння), то деталі даного світильника доцільно обробляти на даній групі обладнання, у протилежному випадку така обробка неефективна (виконується нерівність)

3. Підготовка інформації для розв'язку задач на ПК. Обидві задачі (вихідна та двоїста) оптимального використання взаємозамінюваних типів обладнання розв'язуються одночасно. Для використання пакета «Поиск решения» умови задачі мають бути записані так:

а) формування довільного початкового плану задачі:

Змінні моделі	Кількісне значення змінних початкового плану	Коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі
x_{11}	10	10,5
x_{12}	10	11,1
x_{13}	10	0
x_{14}	10	9
x_{21}	10	0
x_{22}	10	5,7
x_{23}	10	4,8
x_{24}	10	6,0
x_{31}	10	3,8
x_{32}	10	3,2
x_{33}	10	3,0
x_{34}	10	0
$Z_0 =$		572

б) визначення обмежень задачі:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	Ліва частина обмеження	Права частина обмеження
10,5	11,1	0	9,0	0	0	0	0	0	0	0	0	306	3800
0	0	0	0	0	5,7	4,8	6	0	0	0	0	165	3500
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,8	3,2	3,0	100	3020
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	20	400
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	30	600
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	20	500
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	20	300

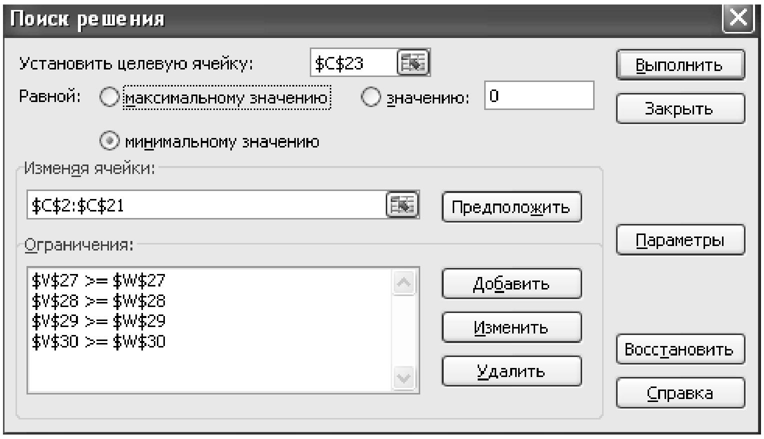
Програма «Поиск решения» розташована у зовнішній пам'яті ПК. Для роботи в оперативній пам'яті необхідно скористатись такими кроками:

Меню «Сервис» → «Надстройки» → «Поиск решения» → Enter.

Щоб відкрити програму для роботи в оперативній пам'яті необхідно зробити такі кроки:

Меню «Сервис» → «Поиск решения» → Enter.

З'являється вікно програми «Поиск решения», куди заноситься інформація, що наведена вище:



Задача оптимізації виробничої програми фірми «Success»

1. Загальна математична модель задачі:

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

за умов

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le A_j \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \ge B_i \end{array}\right\};$$

$$i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Подамо економічний зміст символів, що використані у записаній моделі задачі:

a_{ij} — норми витрат *j*-го ресурсу на випуск одиниці продукції *i*-го виду;

A_j — обсяг *j*-го ресурсу на підприємстві;

B_i — попит на продукцію *i*-го виду;

p_i — середня ринкова ціна одиниці *i*-го виду продукції;

x_i — кількість продукції *i*-го виду, невідомі величини.

Звідси можна дати економічне тлумачення записаної вище задачі.

У цільовій функції максимізується загальний дохід підприємства. Перша система обмежень вимагає, щоб витрати кожного з виробничих ресурсів на випуск усіх видів світильників не перевищували наявність ресурсів на підприємстві.

Друга система обмежень вимагає, щоб випуск світильників кожного виду відповідав їх попиту (у крайньому разі був не нижчий, якщо збільшений попит не затримує термін їх реалізації).

2. Математична модель задачі оптимального випуску продукції фірми «Success»:

$Z(\max) = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 100x_4$

за умов

$$
\begin{aligned}
&1{,}5x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}9x_3 + 0{,}7x_4 \le 2000\\
&22x_1 + 28x_2 + 34x_3 + 18x_4 \le 49000\\
&38x_1 + 44x_2 + 61x_3 + 24x_4 \le 80000\\
&4{,}8x_1 + 6{,}7x_2 + 3{,}6x_3 + 5{,}3x_4 \le 10320\\
&x_1 \ge 400\\
&x_2 \ge 600\\
&x_3 \ge 500\\
&x_4 \ge 300
\end{aligned}
$$

Обмеження по ресурсах включають:

- обмеження матеріальних ресурсів;
- обмеження робочої сили;
- обмеження інвестицій;
- обмеження режимному фонду часу роботи обладнання.

Зауважимо, що обсяг матеріальних ресурсів у даній задачі розраховано на основі оптимального плану задачі раціонального розкрою матеріалів. Оптимальний розв'язок цієї задачі включає 228 прутків довжиною 6 м і 87 прутків довжиною 8 м. Це означає, що для виробничої програми світильників необхідно мати матеріалу $228 \cdot 6 + 87 \cdot 8 = 1964 \approx 2000\text{м}$.

Оскільки деталі світильників обробляються на трьох взаємозамінюваних групах обладнання, то для задачі оптимізації виробничої програми використано загальний фонд часу роботи всіх трьох груп разом:

$$3500 + 3800 + 3020 = 10320 \text{ (маш.-год).}$$

Нормативи затрат часу на обробку кожної деталі всереднені на основі даних задачі оптимального використання обладнання.

Двоїста задача. Для побудови двоїстої задачі необхідно узгодити знак нерівності обмежень з екстремумом цільової функції задачі, записаної вище. Оскільки цільова функція задачі на максимум, то система обмежень повинна мати знак нерівності «$\le$».

Запишемо систему обмежень:

$$
\begin{array}{l|l}
1{,}5x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}9x_3 + 0{,}7x_4 \le 2000 & y_1\\
22x_1 + 28x_2 + 34x_3 + 18x_4 \le 49000 & y_2\\
38x_1 + 44x_2 + 61x_3 + 24x_4 \le 80000 & y_3\\
4{,}8x_1 + 6{,}7x_2 + 3{,}6x_3 + 5{,}3x_4 \le 10320 & y_4\\
-x_1 \le -400 & y_5\\
-x_2 \le -600 & y_6\\
-x_3 \le -500 & y_7\\
-x_4 \le -300 & y_8
\end{array}
$$

$$F(\min) = 2000y_1 + 49000y_2 + 80000y_3 + 10320y_4 - 400y_5 - 600y_6 - 500y_7 - 300y_8$$

за умов

$$
\begin{array}{l|l}
1{,}5y_1 + 22y_2 + 38y_3 + 4{,}8y_4 - y_5 \ge 200 & x_1\\
1{,}2y_1 + 28y_2 + 44y_3 + 4{,}7y_4 - y_6 \ge 250 & x_2\\
0{,}9y_1 + 34y_2 + 61y_3 + 3{,}6y_4 - y_7 \ge 300 & x_3\\
0{,}7y_1 + 18y_2 + 24y_3 + 5{,}3y_4 - y_8 \ge 100 & x_4\\
y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n} &
\end{array}
$$

Економічний зміст змінних двоїстої задачі:
y_1 — двоїста оцінка 1 м матеріалів;
y_2 — двоїста оцінка 1 люд.-год робочого часу;
y_3 — двоїста оцінка 1 грн інвестицій;
y_4 — двоїста оцінка 1 маш.-год роботи обладнання;
y_5 — двоїста оцінка одного світильника першого виду;
y_6 — двоїста оцінка одного світильника другого виду;
y_7 — двоїста оцінка одного світильника третього виду;
y_8 — двоїста оцінка одного світильника четвертого виду.

Економічний зміст двоїстої задачі. У цільовій функції мінімізується різниця між оцінкою використовуваних виробничих ресурсів та оцінкою продукції, що випускається.

Кожне обмеження двоїстої задачі належить до відповідної змінної початкової задачі виробничої програми. Так, у першому обмеженні двоїстої задачі порівнюється різниця між оцінкою всіх ресурсів на один світильник першого виду з ціною цього світильника. Якщо ця різниця перевищує ціну, то світильник випускати недоцільно. Інші обмеження двоїстої задачі мають те ж саме тлумачення, але воно відноситься до другого, третього та четвертого світильників.

3. Підготовка інформації для розв'язування задач на ПК. Для розв'язання задачі в Excel, пакет «Поиск решения», умови задачі повинні бути записані так:

а) формування довільного початкового плану задачі:

Змінні моделі	Кількісне значення змінних початкового плану	Коефіцієнти при змінних цільової функції задачі
x_1	20	200
x_2	20	250
x_3	20	300
x_4	20	100
Z_0=		1700

б) визначення обмежень задачі:

x_1	x_2	x_3	x_4	Ліва частина обмеження	Права частина обмеження
1,5	1,2	0,9	0,7	86	2000
22	28	34	18	2040	49 000
3,8	44	61	24	3340	80 000
4,8	6,7	3,6	5,3	408	10 320
1	0	0	0	20	400
0	1	0	0	20	600
0	0	1	0	20	500
0	0	0	1	20	300

Програма «Поиск решения» знаходиться у зовнішній пам'яті ПК. Для роботи в оперативній пам'яті необхідно скористатись такими кроками:

Меню «Сервис» → «Надстройки» → «Поиск решения» → Enter.

Щоб відкрити програму для роботи в оперативній пам'яті, необхідно зробити такі кроки:

Меню «Сервис» → «Поиск решения» → Enter.

З'являється вікно програми «Поиск решения», куди заноситься інформація, що наведена вище.

Стислі висновки

Поява вимоги цілочисловості в економічних задачах є досить очевидною і пов'язана з використанням в дослідженнях параметрів, що описуються неподільними величинами. Нелінійність, яка випливає з вимог цілочисловості змінних, є незначною. Тому цілочислове програмування часто розглядають як розділ математичної оптимізації лінійних моделей, у яких на деякі чи навіть на всі змінні накладено умову цілочисловості.

Зауважимо, що задачі цілочислового програмування є частковим випадком загальнішого класу задач — дискретної оптимізації. Вимоги дискретності змінних, якщо не в явному вигляді, то в прихованій формі, властиві багатьом практичним класам задач, що забезпечує дуже широку сферу застосування дискретного програмування у багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах. Важливі задачі проектування, планування, розміщення, класифікації та управління добре формалізуються за допомогою різних моделей дискретного програмування.

Особливої актуальності на сучасному етапі набувають проблеми вивчення ефективності методів і відповідних програмних засобів, оцінки точності розв'язків, які отримано за допомогою наближених методів, дослідження стійкості математичних моделей, побудови діалогових пакетів прикладних програм, що дозволяють проводити дослідження в інтерактивному режимі.

Як і цілочислові задачі, задачі дробово-лінійного програмування викликані також практичними потребами. Головними показниками ефективності діяльності економічних систем (фінансовими результатами) поряд з абсолютними величинами: прибуток, чистий прибуток, дохід — є і відносні — рентабельність та її модифікації (рентабельність застосованих ресурсів, виробничих фондів тощо).

Отже, якщо за цільову функцію задачі математичного програмування брати максимізацію однієї з модифікацій рентабельності, доходимо до задач дробово-лінійного програмування. Аналогічні задачі виникають і в інших випадках, коли цільову функцію подають у вигляді відносної величини, яка і в чисельнику, і в знаменнику містить змінні задачі.

Прийом розв'язування задачі дробово-лінійного програмування не є оригінальним. У більшості випадків, коли розв'язати задачу складно, її зводять до простішої, для якої відомі методи знаходження оптимального плану. Такий прийом було використано і в задачах цілочислового програмування і, як ви зможете переконатись, в інших специфічних задачах математичного програмування.

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Яка задача математичного програмування називається цілочисловою?
2. Наведіть приклади економічних задач, що відносяться до цілочислових.
3. Як геометрично можна інтерпретувати розв'язок задачі цілочислового програмування?
4. Охарактеризуйте основні групи методів розв'язування задач цілочислового програмування.
5. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
6. Що означає «правильне відтинння»?
7. Наведіть алгоритм методу гілок і меж.
8. Яка задача математичного програмування називається дробово-лінійною.
9. Як можна дослідити цільову функцію, щоб знайти графічно її екстремальні значення для дробово-лінійної задачі?
10. Як розв'язується дробово-лінійна задача коли вона має два невідомих?
11. Як розв'язується дробово-лінійна задача коли вона має три і більше невідомих?
12. Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування.

1. $Z = x_1 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$$

2. $Z = x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$$

3. $Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36; \\ x_2 \leq 13; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$$

4. $Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі.} \end{cases}$$

13. Розв'язати графічно задачі дробово-лінійного програмування:

1.
$$Z = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max(\min)$$

2.
$$Z = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \max(\min)$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + 3x_2 \ge 9; \\ x_i \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12; \\ -x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 10; \\ x_i \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Основні терміни і поняття

• Методи відтинання
• Метод Гоморі
• Правильне відтинання
• Умовно-оптимальний план
• Комбінаторні методи
• Метод гілок і меж
• Наближені методи
• Метод вектора спаду
• Дробово-лінійна цільова функція
• Заміна змінних
• Зведення до задачі лінійного програмування

Розділ 6

ТЕОРІЯ ІГОР

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:

- ✓ сутність математичної теорії ігор і класифікацію ігор;
- ✓ формалізацію матричних ігор двох осіб;
- ✓ геометричну інтерпретацію гри на площині;
- ✓ математичну постановку гри зі змішаними стратегіями;

а також УМІТИ:

- математично формулювати економічну задачу за наявності умов невизначеності як задачу теорії ігор;
- зводити матричну гру до задачі лінійного програмування;
- розв'язувати задачу матричної гри на ПК та аналізувати розв'язок, робити висновки.

6.1. Задачі теорії ігор в умовах економічної конфліктності та невизначеності інформації

Економічні рішення практично завжди приймаються в умовах невизначеності певної частини інформації та конфліктності ситуацій.

Оптимізація економічних проектів (рішень) на основі теорії ігор саме враховує такі ситуації та умови.

Розглянемо види конфліктних ситуацій, у яких повинні реалізовуватись економічні рішення.

Перший вид конфліктності — це ситуації, коли різні суб'єкти господарювання мають протилежні цілі: кожен інвестор хоче купити товар дешевше, а продати дорожче. До них належать усі комерційні проекти, які мають важливу роль при прийнятті економічних рішень і суттєво можуть вплинути на їх ефективність.

Другий вид конфліктності — це ситуація, коли суб'єкти господарювання мають однакові цілі: кожен інвестор в умовах конкуренції хоче захопити якомога більше ринку товарів і послуг, що є, як правило, обмеженими. Ширший ринок для певної фірми чи підприємства означає більші можливості для його економічного зростання.

Прийняття найкращих економічних рішень у конфліктних умовах пов'язано з невизначеністю інформації, що однозначно зумовлює мобільність результатів.

Опишемо причини виникнення невизначеності інформації, що пов'язана з особливостями прийняття економічних рішень. Можна назвати три системні причини:

1) обґрунтування можливих результатів при інвестуванні коштів у певні проекти;
2) існування запізнення (лагу) між результатами від проектів і терміном вкладання інвестицій;
3) перспективна оцінка кон'юнктури ринку товарів і послуг, у виробництво яких вкладаються кошти.

Обґрунтування результатів інвестування у виробництво певних товарів і послуг вимагає від інвестора досягти двох цілей:

1) максимізувати ефективність вкладених коштів;
2) мінімізувати ризик їх втрати.

Повне узгодження цих двох критеріїв неможливе через протилежність екстремумів цілей, але можна їх максимально наблизити, використовуючи достовірну інформацію для обґрунтування результатів і застосовуючи сучасні методи їх обробки. Безумовно, частина інформації може бути відсутня, частина — мати ймовірнісний характер, частина бути помилковою, тому розрахований очікуваний результат від інвестування може коливатись у певних межах, що зумовлює ризик втрат ефективності.

Між терміном інвестування коштів в економічні проекти і фінансовим результатом завжди існує запізнення. Чим більший термін запізнення, тим більша невизначеність супроводжує виконання економічних рішень. На даному етапі процесу прийняття рішень необхідно відслідковувати можливі зміни технології виробництва та складові комерційних проектів, щоб враховувати їх при коригуванні обґрунтованих результатів.

Очікувані результати економічних рішень значною мірою залежать від перспективної оцінки кон'юнктури ринку товарів і послуг, що інвестуються. Інвестор повинен оцінити можливий попит на ринку товарів і послуг, їх ціну та пропозицію. Безумовно, ці перспективні оцінки є ймовірнісними. Тому дуже важливо у процесі прийняття рішень застосовувати такі математичні методи та моделі, які будуть враховувати ймовірнісні оцінки економічних умов і ситуацій. Математична теорія ігор і призначена для розв'язку економічних задач оптимізації з урахуванням тих умов, що описані вище.

Теорія ігор уперше була систематично викладена Нейманом і Моргенштерном лише в 1944 р. у монографії «Теорія ігор і економічної поведінки», хоча окремі результати були опубліковані ще у 1920-х роках.

Нейман і Моргенштерн написали оригінальну книгу, яка містила головно економічні приклади, оскільки економічні задачі простіше за все описати за допомогою чисел. Під час Другої світової війни й одразу після неї теорією ігор серйозно зацікавились військові, які одразу побачили в ній математичний апарат для дослідження стратегічних рішень. Потім головна увага знову повернулась до економічних проблем. На сучасному етапі сфера застосування теорії ігор значно розширилась. Так, серед соціальних наук апарат теорії використовується в психології для аналізу торгових угод і переговорів, а також для вивчення принципів формування коаліцій та ін.

6.2. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор

Усі попередні розділи розглядали такі задачі математичного програмування, в яких прийняття рішення на основі розрахованого оптимального плану здійснює лише один економічний суб'єкт, що має чітко визначену мету. Відомо, що будь-яка економічна система не функціонує ізольовано на певних етапах своєї діяльності, вступаючи в різного роду економічні відносини з іншими суб'єктами господарювання. Отже, оптимальний план за наведеними вище математичними моделями визначався виходячи з інтересів тільки однієї зі сторін економічних відносин, не враховуючи можливі варіанти дій іншої сторони.

У даному розділі розглядаються ситуації з кількома учасниками, коли значення цільової функції для кожного учасника залежить не лише від його власної поведінки, а також і від дій інших суб'єктів.

В умовах ринкової економіки все частіше зустрічаються *конфліктні ситуації*, коли два або більше колективи (індивідууми) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної зі сторін залежить від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуацій в економіці є відносини «покупець — продавець» («монополія — монопсонія»). Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об'єднання чи коаліції.

Зазначимо, що не завжди учасники ігрової ситуації мають протилежні цілі. Наприклад, дві фірми, які надають однакові послуги, об'єднуються з метою спільного протистояння більшому супернику.

Часто однією зі сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини і погодних умов. Погодою практично людина не може керувати, але вона має можливість пристосуватися до її постійної зміни. Безліч схожих ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо.

Теорія ігор — математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників.

Завдання теорії ігор — розробка рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників.

Реальні конфліктні ситуації досить складні та обтяжені великою кількістю несуттєвих чинників, що ускладнює аналіз таких ситуацій, тому на практиці будуються спрощені моделі конфліктних ситуації, які називаються *грою*.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є наявність, по-перше, кількох учасників, яких називають *гравцями*; по-друге, опису можливих дій кожної зі сторін, що називаються *стратегіями*; по-третє, визначених результатів дій для кожного гравця, що представлені *функціями виграшу*. Завданням кожного гравця є знаходження *оптимальної стратегії*, яка у разі багатократного повторення гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш.

Існує безліч різних ігор. Найпершим прикладом яких є ігри в буквальному розумінні цього слова: спортивні, карточні, шахи тощо. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою, а також наявністю певних правил, за якими мають діяти учасники. Дослідження таких формалізованих ігор звичайно ж не може дати чітких рекомендацій для реальних умов, проте є найзручнішим об’єктом для вивчення конфліктних ситуацій та оцінки можливих рішень з різних точок зору. Розраховані на основі ігрових моделей оптимальні плани не визначають єдино правильне рішення в складних реальних умовах, проте слугують математично обґрунтованою основою для прийняття таких рішень.

Класифікація ігор проводиться за обраним критерієм. Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

Якщо в грі беруть участі два гравці, то така гра називається парною (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра множинна.

Залежно від кількості стратегій розрізняють скінченні та нескінченні ігри. Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра — скінченна, інакше — нескінченна.

Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, маємо гру з нульовою сумою. Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри — з ненульовою сумою, виникають як в умовах конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

За умов можливого поєднання інтересів гравців і домовленості між ними про вибір стратегій маємо кооперативні ігри, коли гравці не мають змоги чи не бажають координувати дії, тоді гра називається некооперативною.

6.3. Матричні ігри двох осіб

Найчастіше розглядається гра з двома гравцями, в яких виграші однієї сторони дорівнюють програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю, що в теорії ігор називають *грою двох осіб з нульовою сумою*. Ці ситуації є типовими у практичній діяльності менеджерів, маркетологів, спеціалістів рекламних служб, які щоденно приймають рішення в умовах гострої конкуренції, неповноти інформації та ін. Основною метою розв’язування задач цього класу є розробка рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій дії конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Отже, маємо два гравця A і B (гра двох осіб з нульовою сумою). Кожний гравець обирає одну з можливих стратегій: позначимо стратегії гравця A — $A_i\ \left(i=\overline{1,m}\right)$, стратегії гравця B — $B_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$.

Результати (плата) за всіма можливими варіантами гри задаються спеціальними функціями, які залежать від стратегій гравців, як правило, у вигляді платіжної матриці.

Нехай $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)\left(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n}\right)$ — виграш гравця A;

$\varphi_2\left(A_i;B_j\right)\left(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n}\right)$ — виграш гравця B.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)+\varphi_2\left(A_i;B_j\right)\equiv 0.$, тоді у разі $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)=\varphi\left(A_i;B_j\right)$, буде $\varphi_2\left(A_i;B_j\right)=-\varphi\left(A_i;B_j\right)$.

Отже, мета гравця A максимізувати $\varphi\left(A_i;B_j\right)$, а гравця B — її мінімізувати. Нехай $\varphi\left(A_i;B_j\right)=a_{ij}$, тобто маємо матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де рядки матриці A відповідають стратегіям A_i, стовпці — стратегіям B_j.

Матриця A називається *платіжною*, або *матрицею гри*. Елемент цієї матриці a_{ij} — виграш гравця A, якщо він вибрав стратегію A_i, а гравець B — стратегію B_j.

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією гри для обрання раціональних варіантів рішень, найпоширенішим (песимістичним) є критерій мінімаксу-максиміну. Суть цього критерію полягає у такому.

Нехай гравець A вибрав стратегію A_i, тоді у найгіршому випадку він матиме виграш, рівний $\min a_{ij}$, тобто навіть тоді, якщо гравець B і знав би стратегію гравця A. Передбачаючи таку можливість, гравець A повинен вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$a = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Така стратегія гравця A позначається A_{i_0} і має назву *максимінної*, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається *нижньою ціною гри*.

Гравець B, який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки, має обрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця A. Стратегія гравця B позначається B_{j_0} і називається *мінімаксною*, а величина його програшу — *верхньою ціною гри*, тобто

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні невигідно змінювати обрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь обрати іншу стратегію, яка дасть йому кращий результат, якщо

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon.$$

Тобто якщо $a = \beta = \upsilon$, то гра називається *цілком визначеною*. При цьому виграш гравця A (програш гравця B) називається *значенням гри* і дорівнює елементу матриці $a_{i_0 j_0}$. Цілком визначені ігри називається *іграми з сідловою точкою*, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця A (програшу гравця B) і є сідловою точкою. У цій ситуації оптимальним рішенням гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих стратегій, так званих *чистих стратегій* — максимінної для гравця A, та мінімаксної для гравця B. Тобто, якщо один із гравців дотримується оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Приклад 6.1. Фірма виготовляє устаткування для хімічної промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядається три конструкторські варіанти типів устаткування: *А*-1, *А*-2, *А*-3. Для спрощення припустимо, що, за технічними характеристиками, всі типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен з типів може мати три модифікації: *М*-1, *М*-2, *М*-3 від закупленої технології виробництва. Собівартість виробництва устаткування змінюється від його модифікації та набуває значень у тис. ум. од., наведених у матриці:

Модифікація / Тип устаткування	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає у зв'язку з необхідністю обрати той варіант типу устаткування і його модифікації, який буде підтверджено економічним відділом фірми. З позицій виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки дає дорожчу і конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з позицій економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, оскільки вимагає найменшого відволікання коштів.

Задача експертів запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі і не гірший варіант співвідношення вартості і зовнішнього вигляду.

Розв'язування. Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу А-1, економічний відділ наполягати на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 — також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу бажано наполягати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-2, оскільки це дає найбільше значення у разі реалізації найгірших умов — 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min\{10;6;5\} = 5,$$
$$\min_{i=2} a_{ij} = \min\{8;7;9\} = 7,$$
$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{7;5;8\} = 5,$$
$$\alpha = \max_{j} \min_{i} a_{ij} = \max\{5;7;5\} = 7 \text{ — нижня ціна гри.}$$

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії, а обере першу чи третю, то може дістати виграш лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з точки зору спеціалістів економічного відділу.

Виходячи з витрат на виробництво устаткування вибір технології, що дає модифікацію М-1 може призвести до найбільших витрат, у тому випадку, коли вдасться затвердити устаткування типу А-1, для технології виготовлення устаткування з М-2 найбільші можливі витрати — 7 тис. ум. од. для А-2, для М-3 — А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що виготовляє устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати — 7 тис. ум. од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10,$$
$$\max_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7,$$
$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9,$$
$$\beta = \min_{i} \max_{j} a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7 \text{ — верхня ціна гри.}$$

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то має шанс втратити більші кошти. Якщо буде обрано першу стратегію, то можливий програш дорівнює 10, а якщо буде обрано третю стратегію, можливий програш — 9. Наведена гра є парною грою з сідловою точкою.

Як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації, мають значну розмірність. Тому важливим моментом дослідження платіжної матриці є способи її скорочення.

Скоротити матрицю можливо, якщо вилучити стратегії, що наперед відомо є невигідними або повторюють одна одну.

Стратегії, яким відповідають однакові значення платіжної матриці (тобто матриця містить однакові рядки (стовпці)), називаються *дублюючими*. Якщо всі елементи i-го рядка (стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів j-го рядка (стовпця), то говорять, що i-та стратегія гравця A (гравця B) є *домінуючою* над j-ю.

Для спрощення розрахунків дублюючі та ті стратегії, для яких існують домінуючі, вилучають з платіжної матриці.

Приклад 6.2. Маємо гру гравців A і B, яка задана платіжною матрицею.

$$\begin{array}{cc} & \text{Гравець } B \\ \text{Гравець } A & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Необхідно визначити ціну гри та оптимальні стратегії дій гравців A і B.

Розв'язування. Оптимізацію гри почнемо з визначення домінуючих стратегій для кожної зі сторін, а також виключення із подальшого аналізу невигідних і дублюючих стратегій.

Визначимо домінуючі стратегії. Перша стратегія гравця A домінує над третьою, оскільки всі значення його виграшів за будь-яких дій противника є не гіршими, ніж при виборі третьої стратегії, тобто всі елементи першого рядка платіжної матриці не менші від відповідних елементів її третього рядка. Тому третя стратегія гірша за першу і може бути включена з платіжної матриці.

Продовжуючи аналіз можливих дій гравця *B*, що його перша стратегія домінує над четвертою, яку можна виключити як збитковішу, а тому невигідну для цього гравця. Отже, маємо таку платіжну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

При виборі гравцем першої стратегії залежно від дій гравця він може мати 6, 3, 8 або 9 од. Але у будь-якому разі його виграш буде не меншим від $\min\{6,3,8,9\} = 3,$ тобто незалежно від поведінки гравця *B*. Якщо розглянути можливі наслідки вибору гравцем *A* другої стратегії, то за аналогією його гарантований виграш становитиме $\min(6,5,7,6) = 5.$ Для третьої стратегії відповідно маємо $\min(4,4,3,8) = 3.$

Таким чином, нижня ціна гри буде дорівнювати: $a = \max\{3,5,3\} = 5,$ а гравець *A* для максимізації мінімального виграшу має обрати другу з трьох можливих стратегій дій. Ця стратегія є максимінною у цій грі.

Гравець *B*, який намагається мінімізувати свій програш, обираючи першу стратегію, може програти 6, 6 або 4 од. Але за будь-яких варіантів дій гравця *A* гравець *B* може програти не більше як $\max\{6,6,3\} = 6.$ Для другої стратегії маємо $\max\{3,5,4\} = 5,$ для третьої – $\max\{8,7,3\} = 8,$ для четвертої $\max\{9,6,8\} = 9.$ Таким чином, верхня ціна гри становитиме $\beta = \min\{6,5,8,9\} = 5.$ І гравцю *B* доцільно вибирати другу стратегію, яка є мінімаксною у грі. Оскільки $a = \beta,$ ця гра має сідлову точку, ціна гри дорівнює 5.

Оптимальною максимінною стратегією гравця *A* є друга з трьох можливих стратегій його дій. Для гравця *B* оптимальною є також друга із чотирьох можливих.

За наведеним прикладом зрозуміло, чому мінімаксна-максимінна стратегії мають назву песимістичних. Вибір оптимальної стратегії для кожного з гравців ґрунтується на припущенні, що він буде діяти в найгірших для нього умовах. Зрозуміло, що в даному випадку вибір такої стратегії може не влаштовувати учасників гри.

Нехай гравець *A* обрав другу (максимінну) стратегію і дотримується її. Припустимо, що гравцеві *B* став відомим вибір стратегії противника, тоді йому доцільно обирати третю стратегію, за якої виграш становитиме 7 од. У свою чергу гравець *A* також знає про зміну стратегії гравця *B* на третю і обирає для себе першу стратегію, що дає йому змогу мати виграш 8 од. і т. д. Можливість такого розвитку подій виникає тому, що мінімаксна-максимінна стратегії в даному випадку *нестійкі*. Тобто становище, за якого обидва гравці використовують мінімаксну-максимінну стратегії, не вигідне гравцям у тому випадку, коли один із них змінює свою оптимальну стратегію.

Однак така нестійкість властива не всім іграм з сідловою точкою. У деяких випадках сідловій точці відповідають стійкі максимінні-мінімаксні стратегії. У таких випадках відхилення від оптимальної стратегії одним із гравців викликає таку зміну виграшу, яка є невигідною для цього гравця, оскільки становище або незмінне, або погіршується.

Отже, у загальному випадку не можна стверджувати, що гра з сідловою точкою визначає стійкі оптимальні стратегії.

6.4. Гра зі змішаними стратегіями

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $a \neq \beta$ і $a \le \upsilon \le \beta,$ то максимінно-мінімаксні стратегії неоптимальні, тобто кожна зі сторін може покращити свій результат, обираючи інший підхід. Оптимальне рішення такої гри знаходять завдяки застосуванню *змішаних стратегій*, які є певними комбінаціями початкових чистих стратегій. Іншими словами, змішана стратегія передбачає використання кількох чистих стратегій з різною частотою.

Імовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами:

для гравця А – $X = (x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_m),$ де $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1;$

для гравця *B* — $Y = (y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_n),$ де $\sum\limits_{j=1}^{n} y_i = 1.$

Очевидно, що $x_i \geq 0, \left(i=\overline{1,m}\right), y_j \geq 0, \left(j=\overline{1,n}\right).$

Виявляється, що коли використовуються змішані стратегії, то для кожної скінченної гри можна знайти пару стійких оптимальних стратегій. Існування такого розв'язку визначає теорема (основна теорема теорії ігор), яку наведемо без доведення.

Теорема (основна теорема теорії ігор). Кожна скінченна гра має, по крайній мірі, один розв'язок, можливий в області змішаних стратегій.

Нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальні змішані стратегії гравців *A* і *B* за теоремою визначають такі $X^* = \left(x_1^*, \quad x_2^*, \quad \dots \quad x_m^*\right)$ і $Y^* = \left(y_1^*, \quad y_2^*, \quad \dots \quad y_n^*\right)$, що дозволяють одержати виграш:

$$a \leq \upsilon \leq \beta,$$

використання оптимальної змішаної стратегії гравцем *A* повинно забезпечувати виграш на рівні не менше від ціни гри за умов вибору *B* будь-яких стратегій. Математично ця умова записується таким чином:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \leq \upsilon \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{6.1}$$

Відповідно використання оптимальної змішаної стратегії гравцем *B* повинно забезпечувати за будь-яких стратегій гравця *A* програш, що не перевищує ціну гри υ, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \geq \upsilon \left(i=\overline{1,m}\right). \tag{6.2}$$

Надалі отримані співвідношення використовуються для знаходження розв'язку гри.

Зауважимо, що в даному випадку розраховані оптимальні стратегії завжди є стійкими, тобто якщо один із гравців дотримується власної оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри υ незалежно від того, яку з можливих змішаних стратегій обрав інший гравець.

З доведенням даного твердження можна ознайомитись у [8].

6.5. Геометрична інтерпретація гри 2×2

Найпростішим випадком скінченої гри є парна гра, коли у кожного учасника є дві стратегії.

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Розглянемо випадок, коли гра не має сідлової точки. Отже, $\alpha \neq \beta$. Необхідно знайти змішані стратегії та ціну гри. Позначимо шукані значення ймовірностей застосування чистих стратегій гравця *A* через $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, а для гравця *B* через $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, якщо гравець *A* дотримується своєї оптимальної стратегії, то виграш буде дорівнювати ціні гри. Отже, якщо гравець *A* дотримуватиметься своєї оптимальної стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, тому

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \upsilon, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \upsilon. \end{cases} \tag{6.3}$$

оскільки $x_1^* + x_2^* = 1$, то $x_2^* = 1 - x_1^*$, підставляючи у систему (6.3), матимемо

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*) = \upsilon, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}(1 - x_1^*) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*) = a_{12}x_1^* + a_{22}(1 - x_1^*) .$$

Розв'язуючи дане рівняння до невідомого x_1^*, одержимо

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{6.4}$$

тоді
$$x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{6.5}$$

Аналогічні міркування проведемо для гравця *B*, отже, маємо

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \upsilon, \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = \upsilon. \end{cases} \tag{6.6}$$

Оскільки $y_1^* + y_2^* = 1$, то $y_2^* = 1 - y_1^*$:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}(1 - y_1^*) = \upsilon, \\ a_{21}y_1^* + a_{22}(1 - y_1^*) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}y_1^* + a_{12}(1 - y_1^*) = a_{21}y_1^* + a_{22}(1 - y_1^*) .$$

Розв'язуючи дане рівняння до невідомого x_1^*, маємо

$$a_{11}y_1^* + a_{12} - a_{12}y_1^* = a_{21}y_1^* + a_{22} - a_{22}y_1^*,$$
$$a_{11}y_1^* - a_{12}y_1^* - a_{21}y_1^* + a_{22}y_1^* = a_{22} - a_{12},$$
$$y_1^*(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}) = a_{22} - a_{12},$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \tag{6.7}$$

тоді $y_2^* = 1 - y_1^* = 1 - \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$. (6.8)

Ціну гри υ знаходять, підставляючи значення x_1^*, x_2^* (або y_1^*, y_2^*) у будь-яке з рівнянь (6.3) або (6.6):

$$\upsilon = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{6.9}$$

Приклад 6.3. Знайти розв'язок гри з платіжною матрицею:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	4	3

Розв'язування. Переконаємося, що гра не має сідлової точки:
$\max\{\min(2:5):\min(4;3)\} = \max\{2;3\} = 3 = \alpha$,
$\min\{\max(2:4):\max(5;3)\} = \min\{4;5\} = 4 = \beta$.

Таким чином, гра не має сідлової точки. Скористаємося формулами (6.4), (6.5), (6.7), (6.8), (6.9), отже, одержимо

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{3-4}{2+3-5-4} = \frac{1}{4},\ x_2^* = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$
$$y_1^* = \frac{3}{4},\ y_2^* = \frac{1}{4}.$$

Причому ціна гри $\upsilon = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{3\cdot 2 - 5\cdot 4}{2+3-5-4} = 3{,}5$.

Отже, оптимальна стратегія кожного гравця полягає в тому, щоб у випадковому порядку чергувати свої чисті стратегії, гравець *A* повинен використовувати першу стратегію з імовірністю $\frac{1}{4}$, а другу — з імовірністю $\frac{3}{4}$, гравець *B* навпаки. При цьому середній виграш дорівнюватиме 3,5.

Розв'язку гри 2×2 можливо надати наочну геометричну інтерпретацію.

Розглядаємо гру з платіжною матрицею вигляду

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Відмітимо, що на осі абсцис відрізок довжиною одиниця (рис. 6.1). Лівий кінець відрізку (точка з абсцисою $x = 0$) буде відповідати стратегії A_1, а правий кінець ($x = 1$) — стратегії A_2. Всі проміжні точки відрізку відповідатимуть змішаним стратегіям гравця *A*, причому імовірність x_1 стратегії A_1 буде дорівнювати відстані від точки *P* до правого кінця відрізку, а ймовірність x_2 стратегії A_2 — відстані до лівого кінця. Проведемо через точки A_1 і A_2 два перпендикуляри до осі абсцис: ось I і ось II. На першій з них відмітимо виграш при стратегії A_1 на другій — при стратегії A_2.

Нехай противник обрав стратегію B_1, вона дає на осях I і II відповідно точки дві точки B_1, причому довжина відрізку A_1B_1 дорівнює a_{11}, а довжина відрізку A_2B_1 дорівнює a_{12}.

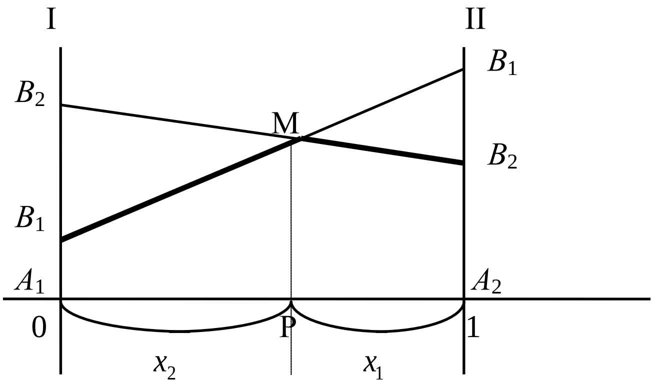


Рис. 6.1

Аналогічно будуємо пряму B_2B_2, яка відповідає стратегії B_2.

Необхідно знайти оптимальну стратегію X^* таку, за якої мінімальний виграш гравця *A* буде максимальним. Для цього виділимо жирною лінією на рисунку нижню границю виграшу при стратегіях B_1 і B_2, тобто ламану криву B_1MB_2. На цій границі знаходяться значення мінімального виграшу *A* при будь-якій його змішаній стратегії. Очевидно, що найкраще з можливих мінімальних значень у нашому прикладі перебуває у точці *M*, а в загальному випадку відповідає точці, де крива, що відмічає мінімальний виграш гравця *A*, набуває максимального значення. Ордината даної точки є ціною гри υ, абсциса x_2, а відстань до правого кінця відрізку x_1, тобто дорівнюють імовірностям стратегій A_2 і A_1.

Геометрична інтерпретація дає також можливість наочно зобразити нижню і верхню ціни гри (рис. 6.2). Для нашого прикладу нижня ціна гри — величина відрізку A_2B_2, а верхня ціна гри — A_2B_1.

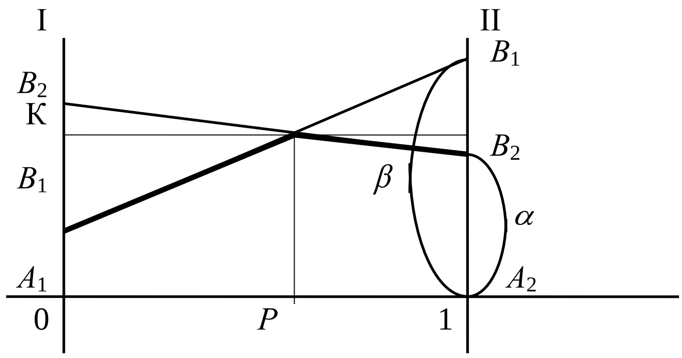


Рис. 6.2

На тому ж рис. 6.2 можна розглянути і геометричну інтерпретацію оптимальних стратегій противника B. Дійсно, частка y_1^* стратегії B_1 в оптимальній змішаній стратегії $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$ дорівнює відношенню довжини відрізку KB_2 до суми довжин відрізків KB_2 і KB_1 на осі I: $y_1^* = \dfrac{KB_2}{KB_2 + KB_1}$.

З наведених міркувань очевидно, що гра 2 × 2 може бути розв'язана елементарними прийомами. Аналогічно може бути розв'язана гра 2 × *n*, тобто коли гравець A має лише дві стратегії, а гравець B — n стратегій. У такому випадку на рисунку буде зображено перетин n прямих, що відповідатимуть n стратегіям гравця B. Мінімальні виграші гравця A представлятимуть також ламану криву, максимальне значення якої і визначатиме оптимальну стратегію для A (рис. 6.3).

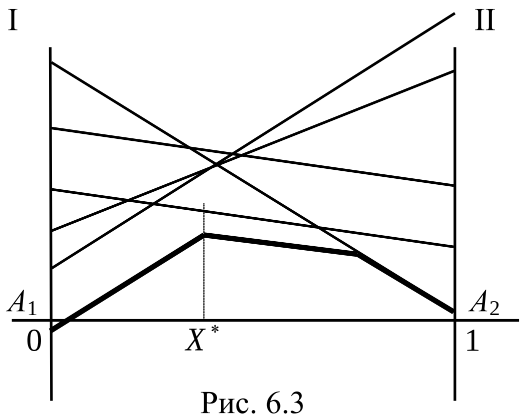


Рис. 6.3

Також можливо розв'язати і гру m×2, з тією різницею, що необхідно визначати не нижню величину виграшу, а верхню, і знаходити на ній не максимальне значення, а мінімальне.

6.6. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Якщо гра 2×n або m×2 може бути розв'язана геометрично, то у випадку гри 3×n (m×3) геометрична інтерпретація переходить у простір, що ускладнює як її побудову, так і сприйняття. У випадку ж коли $n > 3, m > 3$ геометрична інтерпретація взагалі неможлива. Для розв'язування гри $m \times n$ використовують прийом зведення її до задачі лінійного програмування.

Нехай розглядається парна гра зі стратегіями $A_1, A_2, ..., A_m$ для гравця A і $B_1, B_2, ..., B_m$ — для гравця B і платіжною матрицею (a_{ij}) $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$. Необхідно знайти оптимальні змішані стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ і $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$, $\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$.

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію гравця A. За основною теоремою теорії ігор така стратегія повинна забезпечити гравцеві виграш не менший за ціну гри (поки що невідому величину) υ за будь-якої поведінки гравця B.

Припустимо, що A застосовує свою оптимальну стратегію, а B — свою чисту j-ту стратегію B_j, тоді середній виграш A дорівнюватиме

$$a_{1j}x_1^* + a_{2j}x_2^* + \ldots + a_{mj}x_m^*, \tag{6.10}$$

при цьому виграш має бути не меншим за ціну гри. Отже, для будь-якого значення j ($j = \overline{1,n}$) величина вигляду (6.10) має перевищувати υ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + \ldots + a_{m1}x_m^* \ge \upsilon \\ a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + \ldots + a_{m2}x_m^* \ge \upsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1^* + a_{2n}x_2^* + \ldots + a_{mn}x_m^* \ge \upsilon \end{cases}.$$

Розділимо всі обмеження на υ, одержимо

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{12}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + \ldots + a_{m1}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1 \\ a_{21}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{22}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + \ldots + a_{m2}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{2n}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + \ldots + a_{mn}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1 \end{cases}.$$

Позначимо $\dfrac{x_i^*}{\upsilon} = t_i$, матимемо

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1 \end{cases}.$$

$$t_i \ge 0 \ \ (i = \overline{1,m})$$

Ураховуючи умову, що $x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^* = 1$, отримуємо $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \dfrac{1}{\upsilon}$.

Необхідно зробити виграш максимальним. Це можливо досягти, коли вираз $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \dfrac{1}{\upsilon}$ набуватиме мінімального значення. Отже, приходимо до звичайної задачі лінійного програмування.

Цільова функція

$$\max \upsilon = \min \frac{1}{\upsilon} = \min \sum_{i=1}^{m} t_i \tag{6.11}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1 \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1 \end{cases}. \tag{6.12}$$

$$t_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{6.13}$$

Розв'язуючи цю задачу симплексним методом, знаходимо значення t_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$, а також величину $\dfrac{1}{\upsilon}$ і значення $x_i^* = \upsilon t_i$, що є оптимальним розв'язком початкової задачі. Отже, визначено змішану оптимальну стратегію $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ для гравця *A*.

За аналогією можна записати задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця *B*. З цією метою позначимо

$$u_j = \frac{y_j^*}{\upsilon} \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Маємо таку лінійну модель:

$$max\, F = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \le 1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \le 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \le 1 \end{cases}$$

$$u_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця B є двоїстою до задачі гравця A, а тому оптимальний розв'язок однієї з них визначає оптимальний розв'язок спряженої.

Розглянемо приклад використання методів лінійного програмування для пошуку оптимального розв'язку гри.

Приклад 6.4. Агрофірма «Зоря» розробила 6 бізнес-планів ($A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$) для реалізації у наступному році. Залежно від зовнішніх умов (погодного стану, ринку тощо) виділено 5 ситуацій $\left(B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5\right)$. Для кожного варіанта $A_i \left(i = \overline{1,6}\right)$ бізнес-плану і зовнішньої ситуації B_J $\left(j = \overline{1,5}\right)$ обчислені прибутки, наведені у таблиці.

Варіанти бізнес-планів	*Зовнішні ситуації*				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	Прибутки тис. грн				
A_1	1,0	1,5	2,0	2,7	3,2
A_2	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1
A_3	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1
A_4	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8
A_5	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5
A_6	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0

Необхідно вибрати варіант бізнес-плану або комбінацію із розроблених планів.

Розв'язування. Маємо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи наведеної вище таблиці. Легко переконатися, що домінуючих стратегій у цій грі немає.

Далі визначаємо

$$\begin{aligned} a = \max\{&\min(1{,}0;1{,}5;2;2{,}7;3{,}2);\min(1{,}2;1{,}4;2{,}5;2{,}9;3{,}1);\min(1{,}3;1{,}6;2{,}4;2{,}8;2{,}1); \\ &\min(2{,}1;2{,}4;3;2{,}7;1{,}8);\min(2{,}4;2{,}9;3{,}4;1{,}9;1{,}5);\min(2{,}6;2{,}7;3{,}1;2{,}3;2);\} = \\ &= \max\{1{,}0;1{,}2;1{,}3;1{,}8;1{,}9;2\} = 2, \end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned} \beta = \min\{&\max(1{,}0;1{,}2;1{,}3;2{,}1;2{,}4;2{,}6);\max(1{,}5;1{,}4;1{,}6;2{,}4;2{,}9;2{,}7);\max(2;2{,}5;2{,}4;3;3{,}4;3{,}1); \\ &\max(2{,}7;2{,}9;2{,}8;2{,}7;1{,}9;2{,}3);\max(3{,}2;3{,}1;2{,}1;1{,}8;1{,}5;\ 2)\} = \min\{2{,}6;2{,}9;3{,}4;2{,}9;3{,}2\} = 2{,}6. \end{aligned}$$

Отже, $\alpha \ne \beta$, тобто немає сідлової точки, а це значить, що необхідно використати метод зведення гри до задачі лінійного програмування:

$$\min Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

за умов

$$t_1 + 1{,}2t_2 + 1{,}3t_3 + 2{,}1t_4 + 2{,}4t_5 + 2{,}6t_6 \geq 1$$
$$1{,}5t_1 + 1{,}4t_2 + 1{,}6t_3 + 2{,}4t_4 + 2{,}9t_5 + 2{,}7t_6 \geq 1$$
$$2t_1 + 2{,}5t_2 + 2{,}4t_3 + 3{,}3t_4 + 4t_5 + 3{,}1t_6 \geq 1$$
$$2{,}7t_1 + 2{,}9t_2 + 2{,}8t_3 + 2{,}7t_4 + 1{,}9t_5 + 2{,}3t_6 \geq 1$$
$$3{,}2t_1 + 3{,}1t_2 + 2{,}1t_3 + 1{,}8t_4 + 1{,}5t_5 + 2t_6 \geq 1$$
$$t_i \geq 0 \left(i = \overline{1,6}\right).$$

Розв'язуємо цю задачу симплексним методом. Оптимальний розв'язок задачі $t_2 = 0{,}11$; $t_6 = 0{,}33$. Звідси маємо оптимальний розв'язок для початкової задачі: $x_2^* = 0{,}24$; $x_6^* = 0{,}76$ ціна гри $\upsilon = 2{,}264$.

Стислі висновки

Задачі теорії ігор належать до задач прийняття рішень в умовах невизначеності і ризику.

Невизначеність результатів гри зумовлена кількома чинниками. По-перше, як правило, кількістю можливих варіантів розвитку подій дуже велика, тому передбачити результат гри неможливо. Простою ілюстрацією даного положення є гра в шахи. За рахунок безлічі можливих комбінацій знайти оптимальний розв'язок такої гри неможливо. По-друге, значний вплив на хід і результати гри дають випадкові чинники, поведінку яких передбачити неможливо (рулетка). Третім джерелом невизначеності є відсутність інформації про дії противника. Крім того, невизначеність у тій чи іншій мірі може стосуватись також і мети, що її прагне досягти суб'єкт. Не завжди таку мету можна виразити однозначно, а тим більше одним показником.

Зрозуміло, що коли початкові умови задачі містять значну кількість невизначених параметрів, то математичне дослідження не може дати чіткого обґрунтування раціонального розв'язку, однак і за відсутності повної визначеності кількісний аналіз дає наукову основу для прийняття рішень.

Т. Сааті, засновник науки дослідження операцій (інструментарієм якої є математичне програмування), писав, що «дослідження операцій — це таке мистецтво, яке дає погані відповіді на такі практичні запитання, на які інші методи дають ще гірші відповіді».

Отже, розв'язуючи задачі в умовах невизначеності, навіть якщо неможливо знайти точного оптимального розв'язку, математичні методи, у тому числі методи теорії ігор, представляють допоміжний матеріал, який дає змогу в складній ситуації оцінити кожен із можливих варіантів розвитку подій, а отже, прийняти виважене рішення.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Що називається конфліктною ситуацією?
2. Що таке гра?
3. Що таке хід гри?
4. Дайте визначення платіжної матриці.
5. Сформулюйте принцип мінімаксу.
6. Дайте визначення максимінної-мінімаксної стратегій.
7. Яка гра називається скінченною, парною?
8. Які властивості мають оптимальні стратегії гравців?
9. Сформулюйте основну теорему теорії ігор.
10. Зведення гри до задачі лінійного програмування.
11. Розвязати гру графічно:

1. $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline A & 1 & 3 & 4 & -3 & -2 \\ & 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{array}$

2. $\begin{array}{c|cc} & B & \\ \hline & 2 & 5 \\ & 7 & 1 \\ A & 3 & 7 \\ & 4 & 6 \\ & 9 & 2 \end{array}$

3. $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline A & 5 & 3 & 2 & -4 & 8 \\ & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}$

4. $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline & 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ A & 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ & 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{array}$

5. $\begin{array}{c|cc} & B & \\ \hline & 4 & 2 \\ & 5 & 1 \\ A & 3 & 5 \\ & 7 & 2 \\ & -1 & 3 \end{array}$

6. $\begin{array}{c|cc} & B & \\ \hline & 6 & 4 \\ & 5 & 3 \\ A & 3 & 6 \\ & 1 & 8 \\ & 2 & 5 \end{array}$

7. $\begin{array}{c|cc} & B & \\ \hline & 1 & 2 \\ & 5 & 6 \\ A & -7 & 9 \\ & -4 & -3 \\ & 2 & 1 \end{array}$

8. $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline A & 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ & 3 & 9 & 8 & 8 & 4 \end{array}$

Основні терміни і поняття

- Антагоністичні ігри
- Верхня ціна гри
- Виграш
- Випадковий хід
- Гра
- Гра двох осіб (парна гра)
- Гра двох осіб з нульовою сумою
- Гравці
- Двоетапна задача
- Динамічне програмування
- Змішана стратегія
- Імовірність
- Конфліктна ситуація

Розділ 7

НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:

- ✓ особливості нелінійних оптимізаційних задач і площина їх застосування в економіці;
- ✓ геометричну інтерпретацію нелінійних задач;
- ✓ розв'язок нелінійних задач методом множників Лагранжа;
- ✓ опуклі та угнуті функції;
- ✓ моделі нелінійних задач опуклого програмування;
- ✓ особливості математичної постановки задач квадратичного програмування;
- ✓ метод спряжених градієнтів розв'язку задач квадратичного програмування;

а також УМІТИ:

- математично формулювати економічні задачі як нелінійні оптимізаційні моделі квадратичного програмування;
- геометрично інтерпретувати нелінійні оптимізаційні задачі;
- розв'язувати нелінійні оптимізаційні задачі методом множників Лагранжа;
- розв'язувати нелінійні оптимізаційні задачі методом спряжених градієнтів.

7.1. Область застосування нелінійних оптимізаційних задач в економіці

У попередніх розділах було розглянуто методи розв'язування задачі лінійного програмування і деякі класи задач, що певними нескладними перетвореннями зводяться до лінійних. Ці методи найбільш розроблені, легко реалізуються на ПЕОМ, а тому набули широкого застосування в багатьох галузях науки, техніки та економіки. Проте лінійні моделі відображають лише певну і вельми обмежену сукупність властивостей навколишнього світу. Адже, скажімо, соціально-економічні процеси в більшості не є лінійними. Галузі, об'єднання та окремі підприємства народного господарства функціонують і розвиваються за умов невизначеності, а тому описуються нелінійними, стохастичними, динамічними процесами. Отже, для управління народним господарством в цілому, його галузями та окремими об'єктами господарювання потрібне застосування нелінійних економіко-математичних моделей і методів.

Зауважимо, що сучасний рівень розвитку комп'ютерної техніки і методів математичного моделювання створює передумови для використання нелінійних методів, а це може значною мірою підвищити якість розроблюваних планів, надійність та ефективність рішень, які приймаються.

Досить детально розглянута в розділах, присвячених лінійному програмуванню, задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на припущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів та обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою і попитом тощо. Якщо такі зв'язки насправді є нелінійними, адекватніші математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування.

Нехай для деякої виробничої системи треба визначити план випуску продукції, за умови найкращого способу використання ресурсів системи. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, нормативи витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціна реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різноманітними, наприклад, максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та ціни одиниці продукції.

Однак загальновідомим є той факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складне. Обсяг збуту кінцевої продукції визначається перш за все її ціною, отже, як цільову функцію доцільно розглядати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Тоді необхідно визначити також і оптимальне значення ціни одиниці продукції, за якої обсяг збуту буде максимальним, для цього її потрібно ввести до задачі як невідому величину. При цьому обмеження задачі мають враховувати зв'язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція міститиме добуток двох невідомих величин (оптимальна ціна одиниці продукції та оптимальна кількість відповідного виду продукції), отже, є нелінійною. Таким чином, маємо задачу нелінійного програмування.

Також добре відома транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість перевезення одиниці товару залежить від загальної кількості перевезеного по маршруту товару. Тобто коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, що в лінійному випадку були сталими, залежатимуть від значень невідомих (отже, самі стають невідомими), що знову веде до нелінійності у функціоналі.

І нарешті, будь-яка задача стає нелінійною, якщо в математичній моделі треба враховувати умови невизначеності та ризик. За величину ризику беруть таку величину, як дисперсія, тому врахування обмеженості ризику вимагає введення нелінійної функції в систему обмежень, а мінімізація ризику певного процесу досягається за рахунок дослідження математичної моделі з нелінійною цільовою функцією.

Загальна задача математичного програмування формулюється у такий спосіб.

Знайти такі значення змінних $x_j (j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення):

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{7.1}$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_i \ (i=\overline{1,m}); \tag{7.2}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1,n}). \tag{7.3}$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i=\overline{1,m})$ є лінійними, то доходимо задачі лінійного програмування, інакше (хоча б одна з функцій не є лінійною) маємо *задачу нелінійного програмування*.

7.2. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

Геометрично цільова функція (7.1) визначає деяку поверхню, обмеження (7.2)—(7.3) визначають допустиму підмножину *n*-вимірного евклідового простору. Знаходження оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування зводиться до відшукання точки з допустимої підмножини, в якій досягається поверхня найвищого (найнижчого) рівня.

Якщо цільова функція неперервна, а допустима множина розв'язків замкнена, не пуста та обмежена, то глобальний максимум (мінімум) задачі існує.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, що містять систему лінійних обмежень і нелінійну цільову функцію. У цьому випадку область допустимих розв'язків є опуклою, тобто замкненою, непустою та обмеженою.

Розглянемо приклад геометричного способу розв'язування задачі нелінійного програмування.

Приклад 7.1. Знайти мінімальне і максимальне значення функції

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24 \end{cases};$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

Розв'язування. Область допустимих розв'язків утворює чотирикутник *ABCD* (рис. 7.1). Геометрично цільова функція представляє коло з центром у точці $M(2; 2)$ і квадратом радіуса $R^2 = Z$, тобто значення цільової функції буде збільшуватися (зменшуватися) зі збільшенням (зменшенням) радіусу кола. Проведемо з точки *M* кола різних радіусів. Функція *Z* має два локальні максимуми: точка *B* (0; 6) і *C* (8; 0). Обчислимо значення функціоналу в цих точках:

$$Z(B) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (0-2)^2 + (6-2)^2 = 4 + 16 = 20,$$
$$Z(C) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (8-2)^2 + (0-2)^2 = 36 + 4 = 40.$$

Оскільки $Z(C) > Z(B)$, то точка *C* (8; 0) — точка глобального максимуму.

Очевидно, що найменший радіус $R = 0$, тоді $R^2 = 0 = Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 2$. Іншими словами, точка *M* є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменш можливе значення цільової функції.

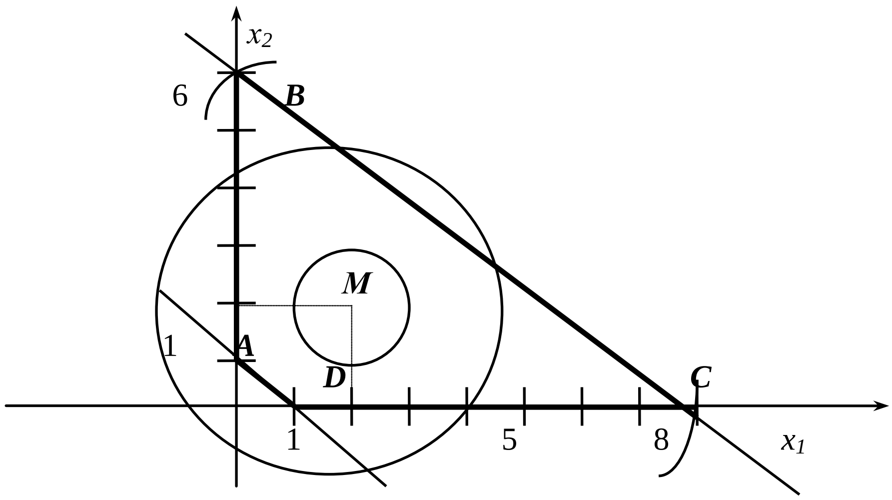


Рис. 7.1

Зазначимо, що в даному випадку точка, яка відповідає оптимальному плану задачі, розташована всередині багатокутника допустимих розв'язків, що для задач лінійного програмування неможливо.

Приклад 7.2. Знайти мінімальне значення функції

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 12 \end{cases}.$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Розв'язування. У даному прикладі множина допустимих розв'язків складається з двох окремих частин (рис. 7.2). Цільова функція аналогічно попередньому випадку представляє коло з центром у точці $M(4; 4)$. Функція *Z* має два локальні мінімуми у точці *A* ($x_1 \approx 0{,}71; x_2 \approx 11{,}29$) і в точці *B* ($x_1 \approx 11{,}29; x_2 \approx 0{,}71$).

Значення функціоналу в цих точках однакове і дорівнює $Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 64$.

Отже, маємо два альтернативні оптимальні плани.

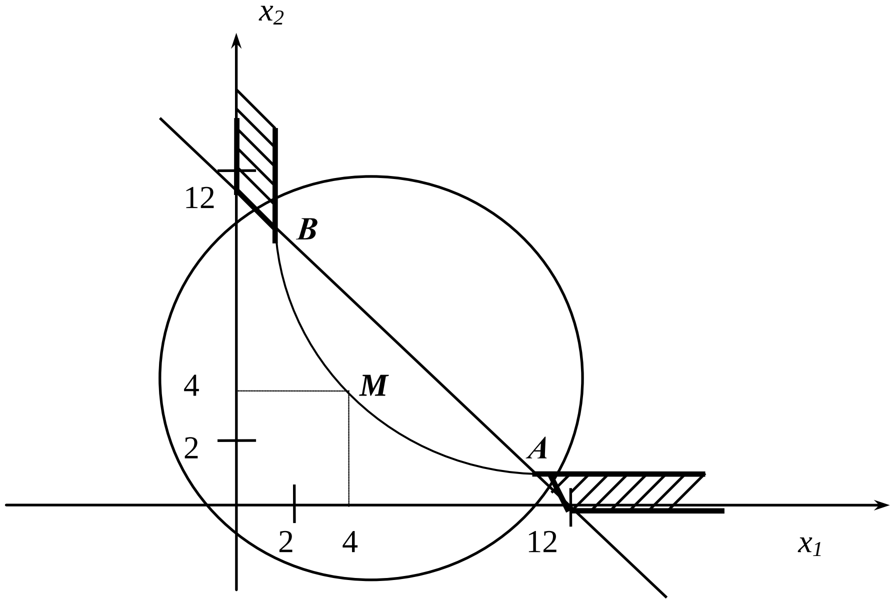


Рис. 7.2

Даний приклад ілюструє одну з особливостей задач нелінійного програмування. На відміну від задач лінійного програмування багатогранник допустимих розв'язків задачі нелінійного програмування не обов'язково буде опуклою множиною.

Наведемо основні особливості задач нелінійного програмування, що впливають на методи їх розв'язування.

7.3. Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Часто задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок. Наприклад, як правило, собівартість продукції y визначають як функцію $y = a + \frac{b}{x}$, де x — обсяги виробництва. Вівши заміну $z = \frac{1}{x}$, маємо $y = a + bz$, тобто приходимо до лінійної функції. При такій заміні похибок не допускають. Однак якщо функція собівартості буде $y = -ax^2 + bx + c$, то використання замість неї деякої лінійної функції $y = d + kx$ — не виправдане, що видно з рис. 7.3.

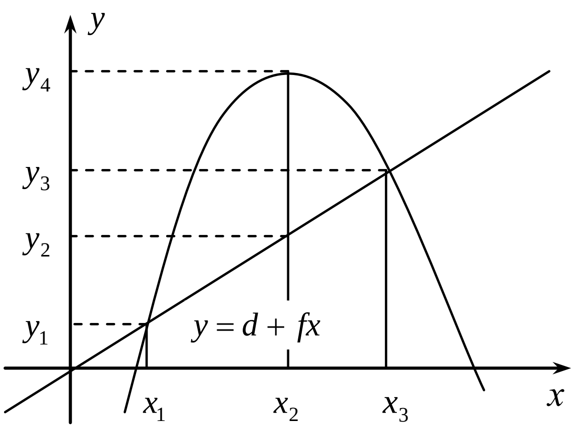


Рис. 7.3

У точках x_1 і x_3 величина собівартості для двох цих функцій однакова. Однак у всіх інших точках ці значення відрізняються, причому у точці x_2 значною мірою, тобто на величину

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - kx_2 = -ax_2^2 + (b-k)x_2 + (c-d).$$

Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею. Зведення нелінійної задачі до лінійної дає змогу отримати симплексним методом розв'язок, близький до розв'язку початкової нелінійної задачі. Однак з розглянутого прикладу бачимо, що у побудові наближених лінійних задач можна одержати надто грубий розв'язок, який непридатний для використання.

Навіть питання про існування розв'язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження.

Розглянемо основні труднощі розв'язування нелінійних задач.

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок універсальним методом — симплексним. При цьому не існує проблеми з доведенням існування такого розв'язку, тобто, в результаті розв'язування симплексним методом завжди приводить до одного з варіантів відповіді:

1) отримали оптимальний розв'язок;

2) умови задачі суперечливі, тобто розв'язку не існує;

3) цільова функція необмежена, тобто розв'язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування *не існує універсального методу розв'язування*, що зумовило розробку значної кількості методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного методу треба доводити існування розв'язку задачі, а також його єдиність, що є досить складною математичною задачею.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому існують трудності обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних ЕОМ такі алгоритми є досить трудомісткими, тому в більшості випадків для розв'язування нелінійних задач виправданим є використання наближених методів.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній із вершин (або кількох одночасно) багатогранника допустимих розв'язків задачі. Під час знаходження розв'язку задачі нелінійного характеру виникають *кілька локальних оптимумів*, що значно ускладнює пошук серед них глобального.

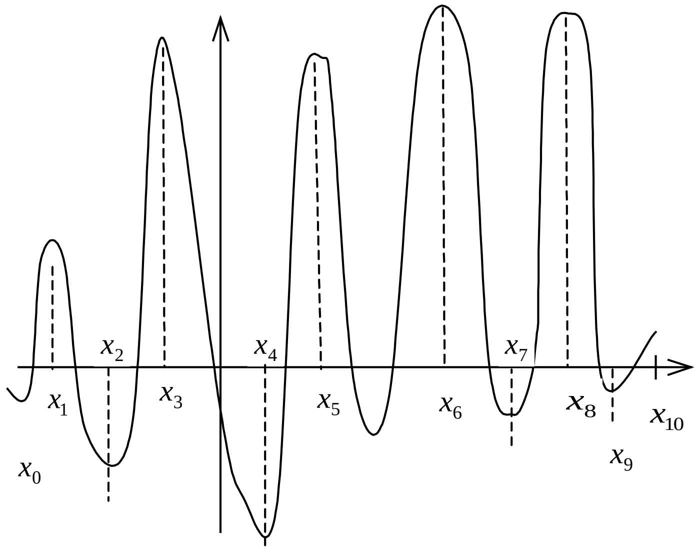


Рис. 7.4

На рис. 7.4 маємо на відрізку локальні оптимуми у точках x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, глобальний — у точках x_4 і x_6.

Більшість наближених методів дають можливість, як правило, знаходити локальний оптимум. Можна користуватись простим способом і визначити всі локальні оптимуми і методом порівняння знайти глобальний.

Однак для практичних розрахунків такий метод неефективний. Часто глобальний оптимум наближені методи не уловлюють, наприклад, у випадку, коли глобальний оптимум розташовано досить близько до локального. Якщо відрізок $[x_0, x_{10}]$ розподілити на 10 підвідрізків і глобальний оптимум попаде у відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ (див. рис. 7.4), а зліва від x_i і справа x_{i+1} крива $y = f(x)$ буде підніматись, то глобальний оптимум буде пропущеним.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає *оптимальний план*, може бути як граничною, так і розташовуватись *всередині допустимої площини розв'язків* (планів), що було наочно проілюстровано в прикладі 7.1.

4. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою множиною. У випадку, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати *множину допустимих розв'язків як неопуклу* або навіть складатись із довільних не пов'язаних між собою частин (приклад 7.2).

Одним із найпоширеніших прикладів зазначеної особливості є задачі цілочислового програмування (розглянута в розд. 5). Нагадаємо, вимога цілочисловості змінних задачі приводить до множини допустимих розв'язків утвореної окремими точками, що зумовлює розглянуті вище ускладнення пошуку розв'язків такого типу задач.

Кожна із вказаних особливостей задач вимагає застосування специфічних методів пошуку розв'язку, тому безперечно найскладнішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких поєднується кілька або всі згадані особливості.

7.4. Метод множників Лагранжа

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто необхідно використовувати широку гаму методів та обчислювальних алгоритмів. Вони в основному базуються на застосуванні диференційного числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування бувають прямі і непрямі. За допомогою прямих методів пошуку оптимальних рішень здійснюють у напрямі найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є градієнтні. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами. Серед непрямих найрозробленіші методи розв'язування задач квадратичного та сепарабельного програмування.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, де система обмежень складається лише з рівнянь. розв'язування яких задачу знаходження

7.4.1. Умовний і безумовний екстремуми функції. У теорії дослідження функції задача на відшукання екстремальних значень не містить жодних додаткових умов щодо змінних і такі задачі належать до задач відшукання *безумовного екстремуму функції*. Локальний і глобальний екстремуми тоді визначаються з необхідних і достатніх умов існування екстремуму функції.

Нагадаємо, що необхідна умова існування локального екстремуму неперервної та диференційованої функцій двох змінних формулюється таким чином.

Нехай функція $f(x_1, x_2)$ у точці (x_1^0, x_2^0) має локальний екстремум, тоді для неї виконується $\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = 0$.

Достатня умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється у такий спосіб. Нехай функція $f(x_1, x_2)$ має критичну точку (x_1^0, x_2^0), тобто для неї виконується $\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = 0$. Припустимо, що існують і неперервні всі другі частинні похідні функції $f(x_1, x_2)$,

тоді:

1) якщо $\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} > 0$ або $\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2} > 0$,

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right]^2 > 0.$$

тоді (x_1^0, x_2^0) – точка локального мінімуму функції $f(x_1, x_2)$;

2) якщо $\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} < 0$ або $\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2} < 0$,

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right]^2>0,$$

тоді (x_1^0,x_2^0) – точка локального максимуму функції $f(x_1,x_2)$;

3) якщо $\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right]^2<0,$

тоді в точці (x_1^0,x_2^0) у функції $f(x_1,x_2)$ не існує екстремуму.

Якщо задача полягає у пошуку локального чи глобального екстремумів деякої функції за умови, що на змінні такої функції накладаються додаткові обмеження, доходимо до задачі пошуку *умовного екстремуму функції*. Термін «умовний» означає, що змінні задачі мають задовольняти деякі умови.

Розглянемо таку задачу для випадку двох змінних:

знайти $\max(\min) f(x_1,x_2)$ (7.4)

за умови $q(x_1,x_2)=b$. (7.5)

Найпростіший спосіб розв'язування задачі такого типу задач полягає в тому, що спочатку з обмеження (7.5) знаходять вираження однієї змінної через іншу, наприклад, визначають x_2 через x_1. Знайдений вираз вигляду $x_2=g(x_1)$ підставляють у функцію (7.4), що після цього стає функцією однієї змінної $f(x_1,g(x_1))$ і далі знаходять її безумовний екстремум.

Якщо деяка точка x_1^* є точкою екстремуму функції $f(x_1,g(x_1))$, то точка $X^*(x_1^*,x_2^*=g(x_1^*))$ є точкою умовного екстремуму функції (7.4) за умови (7.5).

Однак не завжди вдається здійснити аналітичне вираження однієї змінної через іншу в умові (7.5), часто це досить важко або неможливо. Також складно узагальнити даний спосіб для загального випадку функції n змінних, на які накладено m обмежень. Тому описана досить проста ідея зведення задачі пошуку умовного екстремуму функції кількох змінних до задачі на безумовний екстремум функції однієї змінної не може бути використаний як основа універсального методу розв'язування задач на умовний екстремум. Цікавий метод розв'язування задач типу (7.4)—(7.5) запропонував Лагранж.

7.4.2. Метод множників Лагранжа. Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою, для чого цільову функцію замінюють на іншу, з більшою кількістю змінних, яка включає умови, що подані обмеженнями. Після такого перетворення подальше розв'язування задачі полягає в пошуку екстремуму нової функції, на змінні якої не накладається жодних обмежень. Іншими словами, від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі пошуку безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, можливе застосування методів класичного аналізу пошуку екстремуму функції кількох змінних.

У попередньому параграфі наведена необхідна умова існування локального екстремуму неперервної та диференційованої функції двох змінних.

Узагальнення необхідної умови існування локального екстремуму функції для n змінних має аналогічний вигляд. Таким чином, для розв'язування задачі необхідно обчислити частинні похідні нової цільової функції по кожній змінній і прирівняти їх до нуля, у результаті чого матимемо систему рівнянь. Розв'язок такої системи визначає так звані *стаціонарні точки*, серед яких є шукані екстремальні значення функції.

Розглянемо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд

$$\max(\min)Z=f(x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n) \tag{7.6}$$

за умов

$$q_i(x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n)=b_i \tag{7.7}$$

$(i=\overline{1,m})$,

де функції $f(x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n)$ і $q_i(x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n)$ повинні бути диференційованими.

Задача (7.6), (7.7) полягає в пошуку умовного екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень $q_i\,(i=\overline{1,m})$.

Переходимо до задачі пошуку безумовного екстремуму. У літературі [2, 3] теоретично доведено, що постановки і розв'язки таких задач еквівалентні.

Замінюємо цільову функцію (7.6) на складнішу. Ця функція називається *функцією Лагранжа* і має такий вигляд:

$$L(x_1,\quad x_2,\quad \dots,\quad x_n;\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \dots,\quad \lambda_m)=$$
$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)) \qquad (7.8)$$
,

де λ_i — деякі невдомі величини, що називаються *множниками Лагранжа*.

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_j}=0 & (j=\overline{1,n})\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}=0 & (i=\overline{1,m})\end{cases},$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_j}=0 \; (j=\overline{1,n}),\\ b_i-q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \qquad (i=\overline{1,m}).\end{cases} \qquad (7.9)$$

Друга група рівнянь системи (7.9) забезпечує виконання умов (7.7) початкової задачі нелінійного програмування. Система (7.9), як правило, нелінійна.

Розв'язавши цю систему, отримаємо $X^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$ і $\Lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\dots,\lambda_m^*)$ — стаціонарні точки. Оскільки ці розв'язки одержані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум, мінімум задачі (7.6), (7.7) або можуть бути точками перегину (сідловими точками).

Для діагностування стаціонарних точок і встановлення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарної точки диференціал другого порядку (якщо для функцій $Z=f(x_1,x_2,\dots,x_n), q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для випадку функції n змінних приводить до такого правила.

За функцією Лагранжа вигляду (7.8) будується матриця Гессе, що має блочну структуру розмірності $(m+n)\cdot(m+n)$:

$$H=\left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P' & Q \end{array}\right),$$

де O — матриця розмірності $(m\cdot m)$, що складається з нульових елементів; P — матриця розмірності $(m\cdot n)$, елементи якої визначаються у такий спосіб:

$$P=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_n}\\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

P' – транспонована матриця до P розмірності $(n\times m)$; Q — матриця розмірності $(n\cdot n)$ вигляду:

$$Q=\left\|\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}\right\| (i=\overline{1,m}),(j=\overline{1,n}).$$

Дослідимо на вид екстремуму розв'язок системи (7.9). Нехай стаціонарна точка має координати $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$. Точка X^* визначає точку максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), наступні $(n-m)$ головних мінорів матриці H утворюють знакозмінюваний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$; точка X^* визначає точку мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), знак наступних $(n-m)$ головних мінорів матриці H визначається множником $(-1)^m$.

Розглянемо задачу, розв'язок якої знайдемо методом множників Лагранжа.

Приклад 7.3. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю виділило 1200 га ріллі під основні рослинницькі культури — озиму пшеницю і цукрові буряки.

У наступній таблиці маємо техніко-економічні показники вирощування цих культур.

Техніко-економічні показники	Озимапшениця x_1 ,сотні га	Цукрові буряки x_2 , сотні га
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн/т	800	300
Собівартість, грн/т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Необхідно знайти оптимальну площу посіву озимої пшениці і цукрових буряків.

Нехай x_1 — площа ріллі під озимою пшеницею, сотні га; x_2 — площа ріллі під цукровими буряками, сотні га.

Звернемо увагу на те, що собівартість 1 т пшениці і цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель. За критерій оптимальності візьмемо максимізацію валового доходу.

$$\max f = 4(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200)x_1 \cdot 100 +$$
$$+ 35(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650)x_2 100 =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2)$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2) +$$
$$+ \lambda_1(12 - x_1 - x_2).$$

Візьмемо частинні похідні і порівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 400\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3500\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_1 - 350\right) - \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 12 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

З цієї системи визначаємо координати сідлових точок. З першого та другого рівнянь знаходимо λ_1 і, прирівнюючи вирази, матимемо

$$400(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400) = 3500(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350), \quad (7.10)$$

або, скоротивши на 100 обидві частини і розкриваючи дужки:

$$150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = 1312{,}5x_2^2 + 10500x_2 - 12250\,. \qquad (7.11)$$

Із останнього рівняння системи одержимо $x_1 = 12 - x_2$.

Підставимо вираз для x_1 у рівність (7.11):

$$-150(12 - x_2)^2 + 1600(12 - x_2)^2 - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10500x_2 - 12250$$

або

$$-150\left(144 - 24x_2 + x_2^2\right) + 19200 - 1600x_2 - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10500x_2 - 12250\,;$$

$$21600 + 3600x_2 - 150x_2^2 + 19200 - 1600x_2 - 1600 + 1312{,}5x_2^2 - 10500x_2 + 12250 = 0\,;$$

отже,

$$1162x_2^2 - 8500x_2 + 11450 = 0\,;$$

$$D = 72250000 - 53219600 = 19030400\,;$$

$$\sqrt{D} \approx 4362\,;$$

$$x_2^{(1)} = \frac{8500 + 4362}{2324} \approx 5{,}53 \ \text{– 553 га;}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{8500 - 4362}{2324} \approx 1{,}78 \ \text{– 178 га.}$$

Відповідно дістаємо

$x_1^{(1)} \approx 6{,}47$(647 га);

$x_1^{(2)} \approx 10{,}22$(1022 га), тобто отримали дві сідлові точки:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 6{,}47 \\ x_2^{(1)} = 5{,}53 \end{cases} \begin{cases} x_1^{(2)} = 10{,}22 \\ x_2^{(2)} = 1{,}78 \end{cases}.$$

Перевіримо за допомогою достатньої умови існування екстремуму. спочатку сідлову точку $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$.

Матриця Гессе набуває такого вигляду:

$$H = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{array}\right).$$

За вказаним вище правилом визначаємо головні мінори починаючи від 2-го порядку ($m+1 = 1+1 = 2$):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -34100 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{vmatrix} = 435725\,.$$

Таким чином, головні мінори утворюють знакозмінний ряд, і починаючи з головного мінору 2-го порядку наступний мінор визначається знаком $(-1)^2 = (-1)^{m+1}$, тобто $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$ є точкою максимуму.

Значення цільової функції

$$f(x_1 = 6{,}47; x_2 = 5{,}53) = 4(800 - 532{,}26 + 1294 - 1200)647 +$$
$$+ 35(300 - 382{,}26 + 829{,}5 - 650)553 = 4625863\,.$$

Аналогічні обчислення для точки $X_1^*(x_1^{(2)} = 10{,}22; x_2^{(2)} = 1{,}78)$ вказують, що точка не є екстремальною.

Отже, цільова функція набуває максимального значення, якщо озима пшениця вирощується на площі 647 га, а цукровий буряк — на площі 553 га.

Метод множників Лагранжа може бути узагальнений також для випадку наявності обмежень на знаки змінних і обмежень-нерівностей.

Розглянемо задачу в загальному вигляді:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n)\,,$$
$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i\ (i = 1,2,...,k) \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i\ (i = k+1,...,l) \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i\ (i = l+1,2,...,m) \end{cases},$$
$$x_j \ge 0\,,$$

причому всі функції, що входять до задачі, повинні бути диференційованими хоча б один раз.

Очевидно, що введення в ліві частини нерівностей системи обмежень задачі додаткових невід'ємних змінних $x_{n+i} \ge 0, (i = k+1,...,m)$ приводить початкову задачу до задачі, що містить лише обмеження-рівності, тобто за формою та методом розв'язування збігається з задачами (7.6)—(7.7). Особливості розв'язування такого типу задач розглянуто в літературі [2, 4].

7.5. Необхідні умови існування сідлової точки

Для розробки методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування важливе значення має поняття сідлової точки, а також визначення необхідних і достатніх умов існування сідлових точок функції Лагранжа $L(X, \Lambda)$ у (n + m)-вимірному просторі змінних $(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ при довільних умовах, які можуть накладатися на їх знаки. (Необхідні і достатні умови існування сідлової точки функції Лагранжа за відсутності обмежень на знаки змінних див п. 7.4.)

Розглянемо нелінійну здачу:

$$\max F = f(x_1, x_1, ..., x_n)\,;$$
$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, (i = \overline{1,m})\,.$$

Причому на компоненти векторів X, Λ накладено обмеження по знаку. Позначимо множину точок, що задовольняють такі обмеження Ω.

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд

$$L(X, \Lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n))\,. \tag{7.12}$$

Точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ називається *сідловою точкою функції Лагранжа* (7.12), якщо для всіх $X \in \Omega, \Lambda \in \Omega$ виконується співвідношення

$$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda)\,. \tag{7.13}$$

Для диференційованих функцій $F(X)$ і $q_i(X)$ знайдемо потрібні умови існування сідлової точки.

Сідлова точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ функції $L(X, \Lambda)$ виляду (7.12) за означенням задовольняє умову

$$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*)\,.$$

Нерівність виконується для всіх точок X , тобто також і для тих, у яких лише одна координата відрізняється від X^* припустимо, що це x_k , а всі інші збігаються з координатами сідлової точки $x_j = x_j^*, (j = 1,2,..k-1, k+1,...,n)$.

Оскільки права частина нерівності є фіксована, а у лівій частині змінюється лише одна координата x_k, то маємо функції однієї змінної $L(X, \Lambda^*) = L(x_k)$, яку можна зобразити графічно на координатній площині.

Розглянемо спочатку випадок $x_k \geq 0$, тобто лише частину координатної площини, для якої $x_k \geq 0$.

Можливі такі випадки.

1. Коли всі $x_j^* > 0$ максимальне значення функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці, для якої $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 7.5).

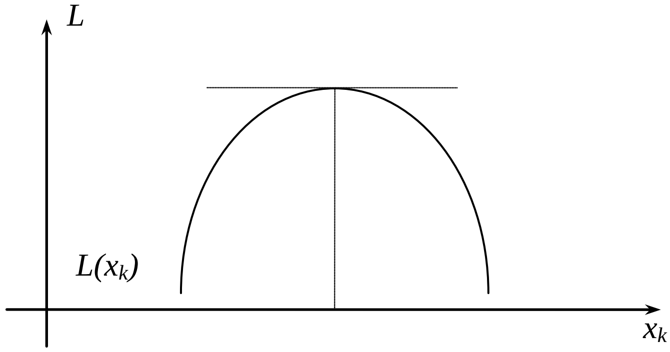


Рис. 7.5

2. Коли точка максимуму функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці $x_k = 0$ і розглядувана частинна похідна також дорівнюватиме нулю: $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 7.6).

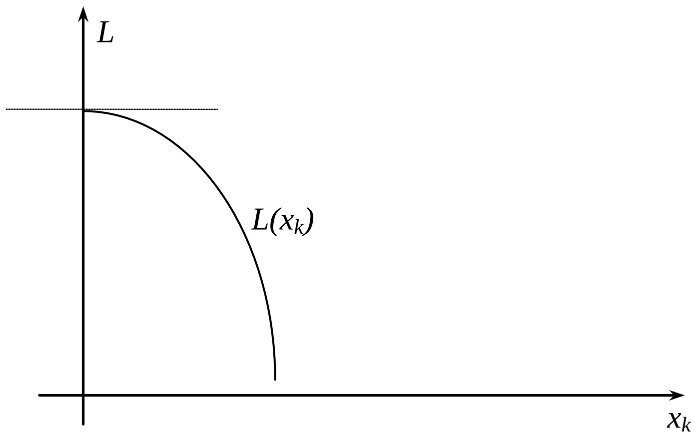


Рис. 7.6

3. Коли точка максимуму функції $L(x_k)$ досягатиметься також у точці $x_k = 0$, а частинна похідна $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} \leq 0$ (рис. 7.7).

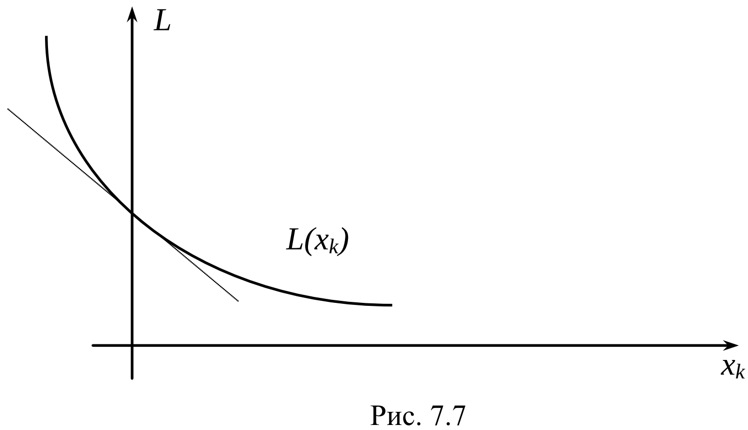


Рис. 7.7

Узагальнюючи всі три ситуації, дістанемо

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для } x_j \ge 0 \text{, та } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}(x_j^*) = 0 .$$

Розглядаючи другу частину нерівності (7.13), $L(X^*,\Lambda^*) \le L(X^*,\Lambda)$ аналогічними міркуваннями, що проілюстровані рис. 7.8—7.10, встановлюються необхідні умови для похідних по λ_l функції Лагранжа в сідловій точці.

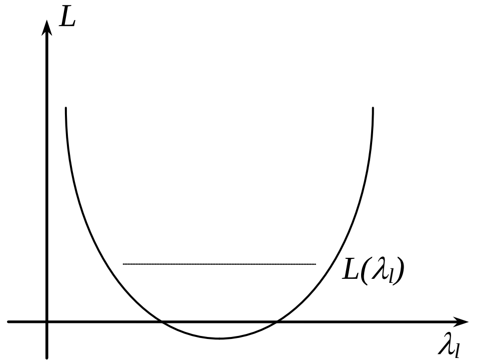


Рис. 7.8

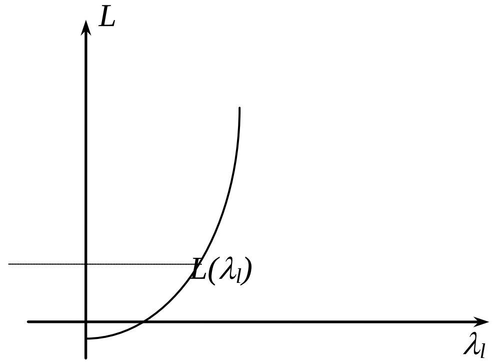


Рис. 7.9

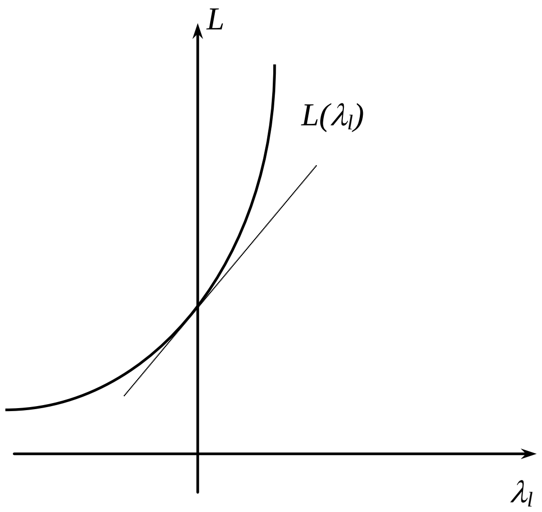


Рис. 7.10

Об'єднуючи всі три випадки для невід'ємних координат, маємо необхідні умови сідлової точки:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для тих індексів } j \text{, де } x_j \ge 0 . \tag{7.14}$$

Зауважимо, що для $x_k \le 0$ маємо ті самі випадки, які зображено на рис. 7.1—7.6, причому графіки будуть симетрично відображені стосовно осі *Oy*, тобто для недодатних координат необхідна умова набуває вигляду

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \ge 0 \text{ для тих індексів } j \text{, де } x_j \le 0 . \tag{7.15}$$

І нарешті, як відомо з попереднього параграфа, якщо на знак x_j умов не накладається, то необхідна умова

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}=0,\ x_j \text{ — довільного знаку.} \tag{7.16}$$

Узагальнюючи всі випадки, матимемо рівняння

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}\cdot x_j^*=0\,. \tag{7.17}$$

Розглядаючи другу частину нерівності (7.13), за допомогою аналогічних міркувань встановлюємо потрібні умови для похідних по λ_i функції Лагранжа в сідловій точці:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i}\geq 0 \text{ для тих індексів } i, \text{ де } \lambda_i\geq 0; \tag{7.18}$$

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i}\leq 0 \text{ для тих індексів } i, \text{ де } \lambda_i\leq 0; \tag{7.19}$$

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i}= 0 \text{ для тих індексів } i, \text{ де } \lambda_i \text{ має довільний знак.} \tag{7.20}$$

Отже, справджується рівняння

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i}\cdot \lambda_i^*=0\,. \tag{7.21}$$

Сукупність співвідношень (7.14)—(7.21) становить необхідні умови, які повинна задовольняти сідлова точка (X^*,Λ^*) функції Лагранжа для точок, що належать множині Ω. При цьому $L(X^*,\Lambda^*)$ повинна мати частинні похідні по всіх компонентах векторів X,Λ.

7.6. Використання теорема Куна-Такера

Метод множників Лагранжа дає можливість знаходити лише локальні сідлові точки функції Лагранжа. Теорема Куна—Таккера дозволяє встановити типи задач, для яких на множині допустимих розв’язків локальний екстремум є і глобальним екстремумом обумовленого типу.

Теорема Куна—Таккера тісно пов’язана з необхідними і достатніми умовами існування сідлової точки.

Розглянемо задачу нелінійного програмування, яку, не зменшуючи загальності, подамо у вигляді

$$\max F=f(X)\,; \tag{7.22}$$

$$q_i(X)\leq b_i,(i=\overline{1,m})\,; \tag{7.23}$$

$$x_j\geq 0,(j=\overline{1,n})\,. \tag{7.24}$$

(Очевидно знак нерівності можна змінити на протилежний множенням лівої і правої частини обмеження на (– 1)).

Теорема 7.1. (**Теорема Куна—Таккера**). Вектор X^* є оптимальним розв’язком задачі (7.22)—(7.24) тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор Λ^*, що при $X^*\geq 0,\Lambda^*\geq 0$ для всіх $X\geq 0,\Lambda\geq 0$ пара (X^*,Λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа

$$L(X,\Lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-q_i(X))\,,$$

і функція $f(X)$ є для всіх $X\geq 0$ вгнута, а функції $q_i(X)(i=\overline{1,m})$ — опуклі.

Доведення. *Необхідність*. Нехай X^* — оптимальний план задачі (7.22)—(7.23), тобто визначає точку глобального максимуму задачі. Отже, для всіх інших планів задачі X з множини допустимих розв'язків виконуватиметься співвідношення

$$f(X^*) \geq f(X).$$

Розглянемо тепер вектор $\Lambda^* \geq 0$, що відповідає точці глобального максимуму X^*, і значення функції Лагранжа в точках (X^*,Λ^*), (X^*,Λ), (X,Λ^*), де $X \geq 0$ довільний план задачі з множини допустимих розв'язків, $\Lambda \geq 0$ — вектор множників Лагранжа, що відповідає X.

З умови (7.21) маємо $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = (b_i - q_i(X)) \cdot \lambda_i^* = 0$, тоді

$$L(X^*,\Lambda^*) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) = f(X^*). \tag{7.25}$$

Для точки з координатами (X^*,Λ) деякі доданки виду $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*))$ можуть бути відмінні від нуля. Оскільки за умовою задачі $b_i - q_i(X^*) \geq 0$, то лише за умови, що $\Lambda \geq 0$ матимемо нерівність:

$$f(X^*) = L(X^*,\Lambda^*) \leq L(X^*,\Lambda) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)).$$

Функція $L(X^*,\Lambda)$ — лінійна відносно Λ, тобто остання нерівність виконується для будь-якого $\Lambda \geq 0$. Отже, точка (X^*,Λ^*) — точка глобального мінімуму по Λ функції Лагранжа.

Для встановлення нерівності, що відповідає лівій частині умови (7.13), а саме $L(X,\Lambda^*) \leq L(X^*,\Lambda^*)$, скористаємося також рівнянням (7.21), просумувавши його по i: $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0$. За умовою теореми $f(X), q_i(X)$ — вгнуті функції і $\Lambda \geq 0$, тому виконується таке рівняння:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i}\right)\left(\Lambda - \Lambda^*\right) = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - \Lambda^* \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} =$$

$$= \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_l^* = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i}.$$

Отже, у точці X^* функція Лагранжа має глобальний максимум по X, що повністю доводить необхідність теореми.

Достатність. Для доведення достатності умови теореми потрібно з того, що $X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0$, (X^*,Λ^*) — сідлова точка функції $L(X,\Lambda)$ (тобто для (X^*,Λ^*) виконується (7.13)) довести, що тоді X^* — оптимальний план задачі опуклого програмування.

У (7.13) підставимо вираз функції Лагранжа (7.12) для задачі (7.22)—(7.23):

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq$$

$$\leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \tag{7.26}$$

при всіх значеннях $X \geq 0, \Lambda \geq 0$.

Розглянемо праву частину подвійної нерівності (7.26).

$$f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(X^*) - f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) .$$

Остання нерівність має виконуватися для всіх $\Lambda \ge 0$, крім того, $(b_i - q_i(X)) \ge 0$, тобто нерівність справедлива лише у випадку, коли

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) = 0 .$$

Тоді з лівої частини нерівності (7.26) маємо

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \le f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \le f(X^*) .$$

Так як $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \ge 0$, то доходимо нерівності $f(X) \le f(X^*)$, яка справедлива для всіх значень $X \ge 0$.

Таким чином, точка X^* задовольняє обмеження і надає максимального значення цільовій функції задачі, так як для всіх інших $X \ge 0$ функція $f(X)$ набуває менших значень, ніж у точці X^*, тобто є оптимальним планом задачі нелінійного програмування. Достатність умов тереми доведено.

Умови теореми Куна—Таккера виконуються лише для задач, що містять опуклі функції.

7.7. Опуклі та вгнуті функції. Опукле програмування

7.7.1. Опуклі і вгнуті функції. Наведемо основні означення та теореми. Нехай задано n-вимірний лінійний простір R^n. Функція $f(X)$, що задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається *опуклою*, якщо для будь-яких двох точок X_1 і X_2 з множини X і будь-якого $0 \le \lambda \le 1$ виконується співвідношення

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \le \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \qquad (7.27)$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається *строго опуклою*.

Функція $f(X)$ задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається *вгнутою*, якщо для будь-яких двох точок X_1 і X_2 з множини X і будь-якого $0 \le \lambda \le 1$ виконується співвідношення

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \ge \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \qquad (7.28)$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається *строго вгнутою*.

Опуклість і вгнутість функції визначається лише стосовно опуклих множин у R^n, оскільки за наведеними означеннями разом із двома будь-якими точками X_1 і X_2 множині X належать також точки їх лінійної комбінації: $\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1$ для всіх $0 \le \lambda \le 1$, що можливо лише у випадку, коли множина X є опуклою.

Теорема 7.2. Нехай $f(X)$ — опукла функція задана на замкненій опуклій множині X, тоді будь-який локальний мінімум $f(X)$ на X є і глобальним.

Доведення. Припустимо, що в точці X' функція $f(X)$ має локальний мінімум, тоді як глобальний мінімум досягається в точці X^*, отже, виконуватиметься нерівність $f(X') > f(X^*)$. Так як $f(X)$ — опукла функція, то для будь-якого $0 \le \lambda \le 1$ справедливе співвідношення

$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda)X'\right) \le \lambda f\left(X^*\right) + (1-\lambda) f\left(X'\right). \qquad (7.29)$$

Множина X опукла, тому точка $\lambda X^* + (1-\lambda)X'$ при $0 < \lambda < 1$ також належить множині. Ураховуючи $f(X') > f(X^*)$, (7.29) матиме вигляд:

$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda)X'\right) \le \lambda f\left(X^*\right) + (1-\lambda) f\left(X'\right) < \lambda f(X') + (1-\lambda) f(X')$$
$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda)X'\right) < f(X').$$

Значення λ можна обрати так, щоб точка $\lambda X^* + (1-\lambda)X'$ була розташована як завгодно близько до X'. Тоді отримана остання нерівність суперечить тому, що X' — точка локального мінімуму, оскільки існує як завгодно близька до неї точка, в якій функція набуває менше значення, ніж у точці X', звідси попереднє припущення — неправильне. Теорему доведено.

Теорема 7.3. Нехай $f(X)$ — опукла функція, що визначена на опуклій множині *X*, і, крім того, неперервна разом із частинними похідними першого порядку в усіх внутрішніх точках *X*. Нехай X^* — точка, в якій $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) = 0 (i = \overline{1,n})$, тоді в точці X^* досягається локальний мінімум, що збігається з глобальним.

Доведення. З (7.12) для $0 < \lambda < 1$ знаходимо

$$f\left(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1\right) \le \lambda f\left(X_2\right) + (1-\lambda) f\left(X_1\right) = f(X_1) + \lambda(f(X_2) - f(X_1))$$
$$f\left(\lambda X_2 + X_1 - \lambda X_1\right) = f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) \le f(X_1) + \lambda(f(X_2) - f(X_1))$$
$$\frac{f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) - f(X_1)}{\lambda} \le f(X_2) - f(X_1).$$

Так як існують частинні похідні першого порядку, то функцію $f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1))$ можна розкласти в ряд Тейлора:

$$f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) = f(X_1) + \nabla f\left(X_1 + \lambda\theta(X_2 - X_1)\right)\lambda(X_2 - X_1),$$

де $\nabla f\left(X_1 + \lambda\theta(X_2 - X_1)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — градієнт функції *f*, обчислений у точці $X_1 + \lambda\theta(X_2 - X_1)$, $0 \le \theta \le 1$, тоді

$$\frac{f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) - f(X_1)}{\lambda} = \nabla f\left(X_1 + \lambda\theta(X_2 - X_1)\right)(X_2 - X_1) \le$$
$$\le f(X_2) - f(X_1).$$

Переходимо до границі при $\lambda \to 0$, одержимо

$$\nabla f(X_1)(X_2 - X_1) \le f(X_2) - f(X_1). \qquad (7.30)$$

Ця умова виконується для будь-яких внутрішніх точок X_1 та X_2 і є необхідною і достатньою умовою опуклості $f(X)$.

(Якщо функція $f(X)$ неперервна разом з частинними похідними першого порядку і угнута на *X*, то аналогічно попередньому результату маємо $\nabla f(X_1)(X_2 - X_1) \ge f(X_2) - f(X_1)$).

Припустимо, що X^0 — довільна точка множини *X*, тоді, поклавши $X_1 = X^*$, $X_2 = X^0$, а також за умовою теореми $\nabla f(X) = 0$ в (7.30), маємо

$$\nabla f(X^*)(X^0 - X^*) = 0 \le f(X^0) - f(X^*) \Rightarrow f(X^0) \ge f(X^*).$$

Таким чином, опукла функція $f(X)$ досягає глобального мінімуму на множині *X* у кожній точці, де $\nabla f(X) = 0$. Теорему доведено.

Як наслідок теореми можна показати, що коли X замкнена, обмежена знизу опукла множина, то глобального максимуму опукла функція $f(X)$ досягає на ньому в одній чи кількох точках (при цьому припускається, що в точці X значення функції скінченне). Застосовуючи у розв'язуванні таких задач процедуру перебору крайніх точок, можна дістати точку локального максимуму, однак не можна встановити, чи є ця точка точкою глобального максимуму.

Для угнутих функцій отримані результати формулюються так. Нехай $f(X)$ — угнута функція, що задана на замкненій опуклій множині $X \subset R^n$. Тоді будь-який локальний максимум $f(X)$ на X є глобальним. Якщо глобальний максимум досягається в двох різних точках множини, то він досягається і на нескінченній множині точок, що лежать на відрізку, який сполучає ці точки. Для строго вгнутої функції існує єдина точка, в якій вона досягає глобального максимуму.

Градієнт угнутої функції $f(X)$ у точках максимуму дорівнює нулю, якщо $f(X)$ — диференційована функція. Глобальний мінімум угнутої функції, якщо він скінченний і замкнений на обмеженій зверху множині має досягатися в одній чи кількох його крайніх точках, якщо функція $f(X)$ скінченна в кожній точці цієї множини.

Опукле програмування розглядає методи розв'язування задач нелінійного програмування, математичні моделі яких містять опуклі або вгнуті функції.

Розглянемо загальний вигляд задачі опуклого програмування:

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{7.31}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \; (i = \overline{1, m}), \tag{7.32}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1, n}), \tag{7.33}$$

де $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ — угнуті функції.

Або еквівалентна задача для опуклих функції.

Позначимо $F'(X) = -F(X); g_i'(X) = -g_i(X)$, тоді $\max F(X) \approx \min F'(X)$, і маємо

$$\min F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{7.34}$$

$$g_i'(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0 \; (i = \overline{1, m}), \tag{7.35}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1, n}), \tag{7.36}$$

де $F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i'(x_1, x_2, ..., x_n)$ — опуклі функції.

Оскільки задачі еквівалентні далі розглядатимемо задачу (7.31)—(7.33).

Множина допустимих планів, що визначається системою (7.32), є опуклою.

Як наслідок теорем 7.2—7.3 справедливе таке твердження.

Точка локального максимуму (мінімуму) задачі опуклого програмування (7.31)—(7.33) є одночасно її глобальним максимумом (мінімумом).

Таким чином, якщо встановлено точку локального екстремуму задачі опуклого програмування, тоді це означає, що знайдено точку глобального максимуму (мінімуму).

Задачу опуклого програмування розв'язуємо, застосовуючи метод множників Лагранжа для випадку обмежень-нерівностей.

Функція Лагранжа для задачі (7.31)—(7.33) матиме вигляд

$$L(X, \Lambda) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{7.37}$$

де $\lambda_i \, (i = \overline{1, m})$ — множники Лагранжа.

Використовуючи теорему Куна—Таккера, матимемо необхідні та достатні умови існування оптимального плану задачі опуклого програмування.

Теорема 7.4. Якщо задано задачу нелінійного програмування вигляду (7.31)—(7.33), де функції $F(X), g_i(X) \; (i = \overline{1, m})$ — диференційовані і вгнуті (по X), тоді для того, щоб вектор $X^* \geq 0$ був оптимальним розв'язком задачі, необхідно і достатньо, щоб існував такий вектор $\Lambda^* \geq 0$, що пара (X^*, Λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа, тобто виконуються умови

(I) $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0$, $\qquad \left(j=\overline{1,n}\right)$, (7.38)

(II) $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}\cdot x_j^* = 0$ $\qquad \left(j=\overline{1,n}\right)$, (7.39)

(III) $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \ge 0$ $\qquad \left(i=\overline{1,m}\right)$, (7.40)

(IV) $\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i}\cdot \lambda_i^* = 0$, $\qquad \left(i=\overline{1,m}\right)$. (7.41)

Для задачі мінімізації (7.34)—(7.36), де всі $F(X), g_i(X)$ $(i=\overline{1,m})$ — опуклі по X, маємо умови, аналогічні наведеним зі знаком «$\ge$» у нерівностях (7.39) і (7.41).

Сформульована теорема доводиться використанням уже викладених теорем даного і попередніх параграфів.

7.8. Квадратичне програмування

Окремим випадком задач опуклого програмування є задачі квадратичного програмування, до яких відносять задачі, що мають лінійні обмеження, а функціонал являє собою суму лінійної і квадратичної функцій:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \ldots + c_{nn}x_n^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + \ldots + 2c_{n-1,n}x_{n-1}x_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i=\overline{1,m}),$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1.n}).$$

7.8.1. Квадратична форма та її властивості. Квадратична функція n змінних називається *квадратичною формою* і може бути подана у вигляді

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = X^TCX,$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Причому матриця C завжди симетрична, тобто $c_{ij} = c_{ji}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$.

Квадратична форма $Z(X)$ називається *від'ємно визначеною*, якщо для всіх X, крім $X = 0$, значення $Z(X) < 0$ (якщо $Z(X) \le 0$, то маємо від'ємно напіввизначену квадратичну форму), в іншому разі $Z(X)$ — *додатньо визначена* (якщо $Z(X) \ge 0$, то маємо додатньо напіввизначену квадратичну форму).

Квадратична форма $Z(X)$ називається *невизначеною*, якщо вона додатна для одних значень X і від'ємна — для інших.

Вид квадратичної форми можна відшукати, використовуючи

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ — вектор характеристичних коренів (власних значень) матриці C.

Вектор характеристичних коренів матриці C — вектор, кожна компонента якого задовольняє систему рівнянь $\left(C - E\lambda_i\right)X = 0 (i = \overline{1,n})$. Система має ненульовий розв'язок, якщо $\left|C - E\lambda\right| = 0$. Таке рівняння називається характеристичним рівнянням матриці C і має $\lambda_i (i = \overline{1,n})$ коренів, які утворюють вектор Λ:

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & \cdots & c_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Наведемо без доведення теорему (доведення в [4]).

Теорема 7.5. Для того щоб довільна квадратична форма була додатно (від'ємно) визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі компоненти $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ були додатними (від'ємними) значеннями.

Якщо хоча б один із характеристичних коренів дорівнює нулю, квадратична форма буде напівдодатна (напіввід'ємна). Якщо корені мають різні знаки, то квадратична форма — невизначена.

Приклад 7.4. Встановити вид квадратичної форми

$$F = -4x_1x_2 - 4x_1^2 - x_x^2.$$

Матриця C має вигляд $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Запишемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, маємо $(-4-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)(-2) = 0 \rightarrow$ $4 + \lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 5\lambda = 0$.

Коренями останнього рівняння є числа $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -5 < 0$, тоді $\Lambda\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, тобто квадратична форма $F = -2x_1x_2 - 4x_1^2 - x_x^2$ за теоремою 7.5 є напіввід'ємна.

7.8.2. Метод розв'язування задач квадратичного програмування. З теорії аналізу функцій відоме таке твердження: від'ємно визначена квадратична форма є угнута, а додатна — опукла.

Розглянемо випадок від'ємно визначеної квадратичної форми, що входить до цільової функції задачі квадратичного програмування:

$$max\, F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j\ , \tag{7.42}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = \overline{1,m}), \tag{7.43}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1.n}). \tag{7.44}$$

Оскільки цільова функція задачі опукла, обмеження — лінійні, тобто визначають опуклу множину допустимих розв'язків, то задача належить до задач опуклого програмування, для яких справедливо, що будь-який локальний максимум є і глобальним. Таким чином, використовуючи умови теореми Куна—Таккера для задачі (7.42)—(7.44), дістанемо необхідні та достатні умови оптимальності плану у вигляді такої теореми.

Теорема 7.6. Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування тоді і тільки тоді, коли існують такі *m* вимірні вектори $\Lambda^* \geq 0, W \geq 0$ і *n* вимірний вектор $V \geq 0$, що виконуються умови

$$\text{(I)}\ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{7.45}$$

$$\text{(II)}\ v_j \cdot x_j^* = 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{7.46}$$

$$\text{(III)}\ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{7.47}$$

$$\text{(IV)}\ w_i \lambda_i^* = 0, \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{7.48}$$

Доведення. Запишемо функцію Лагранжа для задачі квадратичного програмування (7.42)—(7.44):

$$\begin{aligned} L(X, \Lambda) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} c_{jj} x_j^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} 2c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right). \end{aligned} \tag{7.49}$$

Нехай (X^*, Λ^*) — сідлова точка функції Лагранжа, тобто визначає оптимальний план задачі квадратичного програмування. Застосуємо теорему 7.4 до рівняння (7.49). За теоремою, для того, щоб (X^*, Λ^*) визначала оптимальний план, необхідно і достатньо виконання умов (7.38)—(7.41): для $x_j^* \geq 0$ має виконуватись умова

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i^* - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* a_{ij} \leq 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{7.50}$$

а також $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0$. (7.51)

Друга група умов:

для $\lambda_j^* \geq 0$ має виконуватись

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \geq 0, \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{7.52}$$

а також $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0$. (7.53)

Введемо два вектори $V(v_1, v_2, \ldots v_n) \geq 0$ і $W(w_1, w_2, \ldots w_m) \geq 0$, компоненти яких будуть введені як додаткові змінні в рівняння (7.50) і (7.52). Для цього виберемо $v_j > 0$, якщо $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} < 0$ і $v_j = 0$, якщо $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0$. Аналогічно оберемо $w_i > 0$, якщо $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} > 0$ і $w_i = 0$, якщо $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0$. Тепер додамо компоненти вектора $V(v_1, v_2, \ldots v_n) \geq 0$ у (7.50) і віднімемо компоненти $W(w_1, w_2, \ldots w_m) \geq 0$ від (7.52), враховуючи правила вибору компонент векторів матимемо для (7.50)

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Звідси $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} = -v_j$, і тому для (7.51) буде

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = -v_j \cdot x_j^* = v_j \cdot x_j^* = 0 .$$

Аналогічно для другої групи обмежень:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \ \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Звідси $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = w_i$, і тому $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = w_i \lambda_i^* = 0$.

Теорему доведено.

Наведену теорему можна використати для побудови ефективного методу розв'язування задач квадратичного програмування на основі алгоритму симплексного методу.

Умови (7.45)—(7.49) утворюють до змінних X^*, Λ^*, V, W систему (n + m) рівнянь з 2(n + m) невідомими.

Умови (7.47) і (7.48) означають, що змінні x_j^*, v_j не можуть одночасно мати додатні значення, тобто входити в базис разом. Якщо деякі k компонент вектора X^* додатні, то відповідні їм компоненти вектора V дорівнюють 0 і лише (n – k) компонент відмінні від нуля (додатні). Отже, разом x_j^*, v_j будуть мати не більш як n додатні компонент. Аналогічні міркування для (7.48) дають, що разом із λ_i^*, w_i всього буде n + m відмінних від нуля компонент, тобто це може бути базисний розв'язок системи, що утворена умовами (7.45), (7.47). Для пошуку такого розв'язку можна застосувати симплексний метод.

Якщо зазначена система рівнянь має допустимий план (він буде єдиним), то оптимальний план відповідної задачі квадратичного програмування також існує.

Розв'язуємо систему з рівнянь (7.45), (7.47) симплексним методом. Спочатку треба привести систему обмежень до канонічного вигляду введенням потрібної кількості додаткових і штучних змінних. У загальному випадку для зведення системи до канонічної форми та визначення початкового опорного плану вводимо штучні змінні як у рівняння (7.45) $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, які будуть базисними для першого опорного плану, так і для групи рівнянь (7.41) $\beta(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$, які також дають базисні змінні для початкового плану. Далі для пошуку базисного розв'язку системи (7.45), (7.47), розв'язуємо симплексним методом задачу лінійного програмування

$$max\, F' = -M\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i\right) \qquad (7.54)$$

за умов

$$\begin{cases} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j + \alpha_j = 0 \ \ (j = \overline{1, n}) \\ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i^*} - w_i + \beta_i = 0 (i = \overline{1, m}) \end{cases} . \qquad (7.55)$$

$$X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0, V \geq 0, W \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0 . \qquad (7.56)$$

Якщо при розв'язуванні задачі (7.54)—(7.56) всі штучні змінні вийшли з базису ($\alpha = 0, \beta = 0$) і при цьому для знайдених значень змінних X^*, Λ^*, V, W виконуються умови (7.46), (7.48), то знайдений розв'язок є оптимальним планом задачі квадратичного програмування (7.42)—(7.44).

Приклад 7.5. Розв'язати задачу квадратичного програмування

$$\max F = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1 x_2$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язування. Оскільки цільова функція є сумою лінійної функції $F_1 = 9x_1 + 5x_2$ і квадратичної форми $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$, а система обмежень подана лінійними функціями, маємо задачу квадратичного програмування.

Встановимо вид квадратичної форми $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$, для чого визначимо корені характеристичного рівняння, що відповідає матриці, складеній з коефіцієнтів при змінних даної функції:

$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, характеристичне рівняння для матриці C буде

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)(-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3; \lambda_2 = -1.$$

Оскільки обидва корені характеристичного рівняння від'ємні, то квадратична форма $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$ є від'ємно визначеною, а отже, опуклою.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(X, \Lambda) = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + \lambda(6 - 2x_1 - 3x_2).$$

Скористаємося теоремою 7.4. Необхідні умови існування екстремуму матимуть вигляд:

$\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 9 - 4x_1 - 2x_2 - 2\lambda \le 0$, причому $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} x_1^* = 0$,

$\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 5 - 4x_2 - 2x_1 - 3\lambda \le 0$, причому $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} x_2^* = 0$,

$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0$, причому $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda^* = 0$,

де $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ — координати сідлової точки.

Обмеження, що відповідають нерівностям запишемо у вигляді

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2\lambda \le -9, \\ -4x_2 - 2x_1 - 3\lambda \le -5, \\ -2x_1 - 3x_2 \ge -6 \end{cases}$$

Вводимо додаткові змінні для зведення нерівностей до рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2\lambda + v_1 = -9, \\ -4x_2 - 2x_1 - 3\lambda + v_2 = -5, \\ -2x_1 - 3x_2 - w_1 = -6 \end{cases}$$

Для зведення задачі до канонічної форми помножимо кожне з рівнянь на (–1):

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda - v_1 = 9, \\ 4x_2 + 2x_1 + 3\lambda - v_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6 \end{cases}$$

Очевидно, у даному випадку штучні змінні треба вводити в перші два рівняння. У третьому рівнянні базисною змінною буде w_1. Приходимо до наступної задачі лінійного програмування:

$$\max F' = -M\alpha_1 - M\alpha_2,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda - v_1 + \alpha_1 = 9, \\ 4x_2 + 2x_1 + 3\lambda - v_2 + \alpha_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$.

Розв'язуючи задачу симплексним методом, маємо

$$x_1^* = 2\frac{1}{6}, x_2^* = \frac{1}{6}, \lambda^* = 0, v_1 = v_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0, w_1 = 1\frac{1}{6}.$$

Необхідно перевірити виконання умов:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1^* = x_1^* v_1 = 2\frac{1}{6} \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} x_2^* = x_2^* v_2 = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda^* = \lambda^* w_1 = 0 \cdot 1\frac{1}{6} = 0.$$

Всі умови виконуються, отже, $(X^*, \Lambda^*) = \left(x_1^* = 2\frac{1}{6}, x_2^* = \frac{1}{6}, \lambda^* = 0 \right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для задачі квадратичного програмування, а $X^*\left(x_1^* = 2\frac{1}{6}, x_2^* = \frac{1}{6} \right)$ — оптимальний план задачі, для якого значення функціоналу $F = 9 \cdot 2\frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} - 2\left(\frac{13}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2 \cdot 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{97}{9}$.

7.9. Економічна інтерпретація множників Лагранжа

Теорему 7.4 можна розглядати як узагальнення другої теореми двоїстості задач лінійного програмування для задач нелінійного програмування. Умови (7.39)—(7.41) є умовами доповнюючої нежорсткості.

Для з'ясування питання про економічний зміст множників Лагранжа розглянемо застосування методу множників Лагранжа до задачі лінійного програмування як частинного випадку нелінійних задач.

Нехай задача має вигляд

$$\max F = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n \tag{7.57}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{7.58}$$

Функція Лагранжа для даної задачі

$$L(X, \Lambda) = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n + \lambda_1 (b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n) +$$
$$+ \lambda_2 (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n) + \ldots + \lambda_m (b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j c_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} x_j .$$

Якщо деякий змінний вектор $X'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ є допустимим розв'язком задачі (7.57)—(7.58), то функція Лагранжа ідентична (7.57), так як виконуються умови $a_{i1}x' + a_{i2}x_2' + \ldots + a_{in}x_n' = b_i \ (i = \overline{1, m})$, то доданки $\lambda_i(b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n)$ у функції Лагранжа перетворюються на нуль і $L(X', \Lambda) = F(X')$.

За необхідними умовами існування екстремуму для функції Лагранжа бачимо, що суттєвою для розгляду є лише умова рівності нулю частинних похідних $L(X, \Lambda)$ по множниках Лагранжа. Приходимо до задачі, що еквівалентна (7.57) і (7.58).

$$max\, L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j \,, \tag{7.59}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n = 0, \;\; (i = \overline{1, m})\,. \tag{7.60}$$

Розглянемо другу групу умов існування екстремальних точок функції Лагранжа, коли частинні похідні по $x_j \; (j = \overline{1, n})$ дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j - \lambda_1 a_{1j} - \lambda_2 a_{2j} - ... - \lambda_m a_{mj} = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0\,. \tag{7.61}$$

Припустимо, що деякий вектор $\Lambda'(\lambda_1', \lambda_2', ..., \lambda_m')$ задовольняє умови (7.61), тоді для нього функція Лагранжа набуває вигляду

$$L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i' a_{ij} x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i + \sum_{j=1}^{n} x_j (c_j - \lambda_1' a_{1j} - \lambda_2' a_{2j} - ... - \lambda_m' a_{mj}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i\,.$$

Причому для того, щоб задовольнити умову (7.59) необхідно знайти такі значення вектора, що $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i \to \min$, тобто матимемо таку задачу:

$$min\, L(X, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i\,, \tag{7.62}$$

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \;\; (j = \overline{1, n})\,. \tag{7.63}$$

Очевидно, що пара задач (7.57), (7.58) і (7.62), (7.63) є парою спряжених задач (початкова і двоїста), а множники Лагранжа — змінні двоїстої до початкової задачі ($\lambda_i = y_i, (i = \overline{1, m})$):

$\lambda_i \; (i = \overline{1, m})$ — двоїсті оцінки ресурсів, тіньові ціни відповідних ресурсів виробництва.

Якщо поширити результати на загальну задачу нелінійного програмування, додавши до задачі (7.57), (7.58) умову $x_j \geq 0 \, (j = \overline{1, n})$, то розв'язування можна здійснювати узагальненням методу Лагранжа (п. 7.4).

У результаті дістанемо двоїсту задачу, що матиме вигляд

$$min\, L(X, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i\,,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \geq c_j \;\; (j = \overline{1, n})\,,$$

$$\lambda_i \underset{>}{\leq} 0.$$

Звідси отримуємо економічну інтерпретацію змінних, параметрів початкової задачі, а також множників Лагранжа.

Очевидно, що залежно від економічної постановки задачі функція Лагранжа та умови існування сідлової точки можуть мати різну економічну інтерпретацію. Розглянемо задачу нелінійного програмування як задачу визначення оптимального плану виробництва продукції за умов використання обмежених ресурсів.

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b_i \ (i = \overline{1, m}),$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Головна мета виробничої системи — максимізація прибутку від реалізованої продукції. Отже, цільова функція $F = f(X)$ є чистий прибуток від реалізації продукції в кількості $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ (причому $f(X)$ — нелінійна). Крім того, процес виробництва продукції вимагає використання m видів сировини, обсяги кожного виду якої відомі і становлять $b_i \ (i = \overline{1, m})$. Система рівнянь $q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b_i$, $(i = \overline{1, m})$ може бути подана як $g_i(X) = q_i(x_1, x_2, ..., x_n) - b_i \geq 0$, $(i = \overline{1, m})$, тобто $q_i(X)$ — кількість *i*-го виду сировини, що використовується на виробництво продукції в кількості *X*, тоді $g_i(X)$ — залишок *i*-го ресурсу після виробництва продукції.

Якщо $g_i(X) > 0$, то на виробництво продукції використано не весь запас ресурсу, якщо $g_i(X) = 0$ — ресурс вичерпано, і якщо $g_i(X) < 0$, то початкової кількості сировини недостатньо для виробництва на рівні *X*.

Виробнича система у більшості випадків функціонує в конкурентному економічному середовищі, що характеризується антагоністичними інтересами.

Як було уже показано, λ_i — змінні двоїстої до прямої задачі. Вони можуть являти собою ціну, за якою на конкурентному ринку продається чи купується одиниця *i*-го виду сировини. Якщо $\lambda_i \geq 0$ і $g_i(X) > 0$, то така виробнича система може продавати лишки сировини і мати додатковий прибуток у розмірі $\lambda_i g_i(X)$. Якщо $g_i(X) < 0$, то система може закупити потрібну кількість сировини, витрачаючи суму $\lambda_i g_i(X)$. Така закупка дозволить забезпечити виробництво продукції на рівні *X*.

Таким чином, функція Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$$

являє собою загальний прибуток виробництва, який включає чистий прибуток від реалізації виготовленої продукції $f(X)$ і прибуток від продажу лишків сировини (чи витрати на придбання потрібної кількості сировини) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$.

При цінах λ_i, що встановлюються на ринку, виробнича система прагне максимізувати прибуток за допомогою встановлення оптимальної кількості виробництва продукції $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. Отже, знаходимо значення

$$L(X^*, \Lambda) = \max_X L(X, \Lambda).$$

Так як прибуток формується на конкурентному ринку, то слід розраховувати на встановлення цін ресурсів на мінімально можливому рівні, тобто матимемо величини :

$$L(X, \Lambda^*) = \min_{\Lambda} L(X, \Lambda).$$

Якщо для розглянутої задачі нелінійного програмування існує сідлова точка (X^*, Λ^*), це означає, що існує такий рівень виробництва X^* і ціни на ресурси Λ^*, за яких має місце конкурентна рівновага

$$L(X^*, \Lambda^*) = \max_X L(X, \Lambda) = \min_{\Lambda} L(X, \Lambda).$$

Оскільки, за теоремою Куна—Таккера, для сідлової точки за будь-яких значень X, Λ виконується нерівність

$$L(X^*, \Lambda) \leq L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X, \Lambda^*),$$

очевидно, що ніяка зміна рівня виробництва X^* виробничою системою не збільшить прибутку $L(X^*, \Lambda) \leq L(X^*, \Lambda^*)$ і також ніяка зміна цін на ресурси в ринковому середовищі не зможе зменшити прибутку $L(X^*,\Lambda^*)\le L(X,\Lambda^*)$. Таким чином, сідлова точка функції Лагранжа визначає точку ринкової рівноваги.

Розглянемо інтерпретацію множників Лагранжа. Позначимо $B(b_1,b_2,...,b_m)$ вектор із компонентами, що встановлюють загальну кількість *i*-го ресурсу у виробничій системі. Нехай $X^*(B)$ значить, що оптимальний план задачі є функція від значень наявних ресурсів *B*. Для спрощення припускаємо, що функція $X^*(B)$ і $f(X)$, $q_i(X)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ мають властивості неперервності та диференційованості. І нарешті припустимо також, що якщо для *i*-го ресурсу $g_i(X(B))>0$, то за невеликих змін значення вектора *B* (які позначимо B'), що є досить близькими до *B*, також виконується $g_i(X(B'))>0$.

За теоремою Куна—Таккера, у задачах нелінійного програмування з обмеженнями нерівностями для оптимального плану задачі має місце рівність ([3]):

$$\frac{\partial f(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}.$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції, знаходимо

$$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial b_k},\ \text{враховуючи, що}\ \frac{\partial f(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j},\ \text{маємо}$$

$$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial b_k}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial b_k}\right).$$

Далі припустимо, що деяке *i*-те обмеження активне в точці *B*, тобто $g_i(X^*(B))=\tilde{b}$. Тоді згідно з початковим припущенням обмеження активне також і в деякому невеликому околі *B*, звідси

$$\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial b_k}=\gamma_{ik}\ \text{де}\ \gamma_{ik}=\begin{cases}0, i\ne k,\\ 1, i=k\end{cases}$$

отже, $$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial b_k}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial b_k}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\gamma_{ik}=\lambda_i.$$

Тому λ_i є маргінальними змінами оптимального значення цільової функції у разі зміни b_i. За аналогією з задачами лінійного програмування можна вважати, що λ_i приблизно відповідає приросту цільової функції у разі збільшення обсягу відповідного *i*-го ресурсу на одиницю. Виходячи з чого можна оцінити, як зміниться оптимальне значення цільової функції у разі зміни обсягів ресурсів, не розв'язуючи нову задачу.

7.10. Градієнтний метод

Градієнтні методи належать до наближених методів розв'язування задач нелінійного програмування і дають лише певне наближення до екстремуму, якого за збільшення обсягу обчислень можна досягти з наперед заданою точністю, але при цьому є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Зауважимо, що такі методи можуть бути застосовані лише до тих типів задач нелінійного програмування, в яких цільова функція та обмеження є диференційовані хоча б один раз. Зрозуміло, градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму для задач опуклого програмування, в яких локальний і глобальний екстремуми збігаються.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційованої функції — визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу — перехід від однієї точки до іншої в напрямі градієнта з деяким наперед заданим кроком.

Розглянемо метод Франка—Вульфа, що визначає оптимальний план задачі шляхом перебору розв'язків, які є допустимими планами задачі.

Нехай

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

за лінійних обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \; (i = \overline{1,m}),$$
$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,n}).$$

Припустимо, що X_0 — початкова точка, що належить на множині допустимих планів даної задачі. У деякому околі цієї точки нелінійну цільову функцію замінюють на лінійну і розв'язують далі задачу лінійного програмування. Нехай розв'язок задачі дав значення цільової функції F_0, тоді з точки X_0 у напрямку F_0 треба рухатись доти, доки не припиниться зростання цільової функції. Тобто у вказаному напрямку обирають наступну точку X_1, цільова функція знову замінюється на лінійну і знову розв'язується задача лінійного програмування.

Розглянемо детальніше перехід від k-ї ітерації методу до $(k+1)$-ї ітерації.

Відома точка X_k, що належить площині припустимих розв'язків. У даній точці обчислюється градієнт цільової функції

$$\nabla f(X_k) = \left(\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2}; ..., \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \right).$$

Значення градієнту функції задає в даній точці напрям найшвидшого її зростання.

Вводимо заміну цільової функції задачі на лінійну функцію

$$F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n .$$

Далі розв'язуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями початкової задачі і новою цільовою функцією

$$\max F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \; (i = \overline{1,m}),$$
$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,n}).$$

Нехай розв'язок такої задачі є точка $\tilde{X}_k$.

З початкової точки X_k у напрямку $\tilde{X}_k$ рухаємося з деяким довільним кроком $0 \le \lambda \le 1$, визначаючи координати нової точки X_{k+1} у такий спосіб:

$$X_{k+1} = X_k + \lambda(\tilde{X}_k - X_k).$$

Зауважимо, що значення параметру $0 \le \lambda \le 1$ доцільно обирати таким, що дає найбільше значення цільової функції початкової задачі $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для даної точки повторюємо розглянутий процес, для чого повторно розраховуємо значення градієнта і т. д.

Таким чином, знаходимо послідовність точок X_0, X_1, що поступово наближається до оптимального плану початкової задачі. Ітераційний процес повторюється доти, доки значення градієнту цільової функції не стане рівним нулю або за виконання умови $\left|f(X_{k+1})-f(X_k)\right|<\varepsilon$, де ε — досить мале число, яке визначає потрібну точність обчислень.

Приклад 7.6. Підприємство виробляє два види продукції *A* і *B* і використовує на виробництво три види продукції I, II, III. Витрати ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції подано в таблиці.

Вид ресурсу	Вид продукції		Загальний обсяг ресурсу
	A	*B*	
I	1	3	30
II	1	1	15
III	5	2	60

Ціна реалізації одиниці продукції виду *A* становить 20 ум. од., проте прибуток залежить від витрат на виробництво, які пропорційні квадрату кількості виготовленої продукції.

Аналогічно для продукції виду *B*. Ціна реалізації — 18 ум. од., що для визначення прибутку зменшується на величину квадрату кількості виготовленої продукції.

Розв'язування. Позначимо x_1 — кількість продукції виду *A*; x_2 — кількість продукції виду *B*, тоді загальний прибуток матиме вигляд $F=20x_1-x_1^2+18x_2-x_2^2$.

Математична модель задачі буде такою:

$$\max F=20x_1-x_1^2+18x_2-x_2^2,$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 30, \\ x_1+x_2\le 15, \\ 5x_1+2x_2\le 60. \end{cases}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Розв'яжемо задачу методом Франка—Вульфа.

І ітерація. Обираємо точку, що належить множині допустимих планів задачі. Розглянемо точку $X_0(x_1=2;x_2=3)$.

Градієнт функції $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1};\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=\left(20-2x_1;18-2x_2\right)$.

У точці $X_0(x_1=2;x_2=3)$ обчислюємо значення градієнту:

$$\nabla f(X_0)=(20-2\cdot 2;18-2\cdot 3)=(16;12).$$

Використовуючи розраховане значення градієнту, вводимо нову цільову функцію: $F_1=16\cdot x_1+12\cdot x_2$. Одержимо задачу лінійного програмування

$$\max F_1=16\cdot x_1+12\cdot x_2,$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 30, \\ x_1+x_2\le 15, \\ 5x_1+2x_2\le 60. \end{cases}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$$

Розв'язуючи задачу симплексним методом, знаходимо її оптимальний план $\widetilde{X}_0(x_1=10;x_2=5)$.

Знайдемо новий допустимий план задачі, використовуючи $X_{k+1}=X_k+\lambda(\widetilde{X}_k-X_k)$.

Визначаємо координати X_1:

$$X_1=X_0+\lambda_1(\widetilde{X}_0-X_0)\ 0\le\lambda_1\le 1,$$

$$x_1=2+\lambda_1(10-2)=2+8\lambda_1; x_2=3+\lambda_1(5-3)=3+2\lambda_1.$$

Знайдемо крок λ_1 такий, за якого досягається максимальне значення цільової функції. Для цього підставимо розраховані значення для x_1, x_2, які виражені через λ_1 в цільову функцію $F=20x_1-x_1^2+18x_2-x_2^2$:

$F = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 20 \cdot (2+8\lambda_1) + 18 \cdot (3+2\lambda_1) - (2+8\lambda_1)^2 - (3+2\lambda_1)^2 =$

$= 40 + 160\lambda_1 + 64 + 36\lambda_1 - (4 + 32\lambda_1 + 64\lambda_1^2) - (9 + 12\lambda_1 + 4\lambda_1^2) =$

$= 40 + 64 + 160\lambda_1 + 36\lambda - 4 - 32\lambda_1 - 64\lambda_1^2 - 9 - 12\lambda_1 - 4\lambda_1^2,$

$F = 81 + 152\lambda_1 - 68\lambda_1^2.$

Матимемо функцію, що залежить від λ_1. Для встановлення максимального значення функції знайдемо значення λ_1, де похідна функції дорівнює нулю:

$F' = 152 - 136\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 152/136$, оскільки $0 \le \lambda_1 \le 1$, то $\lambda_1 = 1$, тоді наступна точка X_1 матиме координати $x_1 = 2 + 8 \cdot 1 = 10; x_2 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$.

Для знайденої точки $X_1(x_1 = 10; x_2 = 5)$, значення цільової функції $F = 165$.

ІІ ітерація. Розглянемо точку $X_1(x_1 = 10; x_2 = 5)$. Обчислюємо значення градієнту в точці X_1:

$\nabla f(X_1) = (20 - 2x_1; 18 - 2x_2) = (20 - 2 \cdot 10; 18 - 2 \cdot 5) = (0; 8)$.

Використовуючи розраховане значення градієнту, вводимо нову цільову функцію $F_1 = 8 \cdot x_2$. Доходимо до задачі лінійного програмування:

$max\, F_1 = 8 \cdot x_2,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Розв'язуючи задачу симплексним методом, знаходимо її оптимальний план: $\tilde{X}_1(x_1 = 0; x_2 = 10)$.

Знайдемо новий допустимий план задачі, використовуючи $X_{k+1} = X_k + \lambda(\tilde{X}_k - X_k)$.

Визначаємо координати X_2:

$X_2 = X_0 + \lambda_2(\tilde{X}_0 - X_0)\ 0 \le \lambda_2 \le 1,$

$x_1 = 10 + \lambda_2(0 - 10) = 10 - 10\lambda_2; x_2 = 5 + \lambda_2(10 - 5) = 5 + 5\lambda_2$.

Знайдемо крок λ_2 такий, за якого досягається максимальне значення цільової функції:

$F = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 20 \cdot (10 - 10\lambda_2) + 18 \cdot (5 + 5\lambda_2) - (10 - 10\lambda_2)^2 - (5 + 5\lambda_2)^2$.

Матимемо $F' = 40 - 250\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0{,}16$.

Таким чином, знаходимо координати точки X_2:

$x_1 = 10 - 10\lambda_2 = 10 - 10 \cdot 0{,}16 = 8{,}4; x_2 = 5 + 5\lambda_2 = 5 + 5 \cdot 0{,}16 = 5{,}8$.

Для знайденої точки $X_2(x_1 = 8{,}4; x_2 = 5{,}8)$, значення цільової функції $F = 166{,}2$.

Продовжуючи процес аналогічним чином, на **ІІІ ітерації** визначаємо точку $X_3(x_1 = 7{,}5; x_2 = 7{,}5)$, причому значення цільової функції знову зростає $F = 172{,}5$.

На **IV ітерації** розраховуються координати точки $X_4(x_1 = 8; x_2 = 7)$, $F = 173$.

V ітерація. Розглянемо точку $X_4(x_1 = 8; x_2 = 7)$. Обчислюємо значення градієнту в точці X_4:

$\nabla f(X_4) = (20 - 2x_1; 18 - 2x_2) = (20 - 2 \cdot 8; 18 - 2 \cdot 7) = (4; 4)$.

Використовуючи розраховане значення градієнту, вводимо нову цільову функцію: $F_4 = 4x_1 + 4x_2$. Доходимо до задачі лінійного програмування:

$max\, F_4 = 4x_1 + 4x_2,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Розв'язуючи, отримаємо значення оптимального плану $\tilde{X}_4(8;7)$, тобто повертаємося до попереднього значення. Таким чином, точку з координатами $X^*(8;7)$ вважаємо оптимальним планом, оскільки маємо нульовий градієнт функції.

7.11. Метод кусково-лінійної апроксимації

Розглянемо окремо метод розв'язування задачі нелінійного програмування з цільовою функцією та системою обмежень, що представлені сепарабельними функціями.

Сепарабельною називають таку функцію *n* змінних $\varphi(X) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$, що може бути подана у вигляді суми *n* функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної, тобто

$$\varphi(X) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j).$$

Нехай задача має вигляд

$$max\, F = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j), \tag{7.64}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i,\ (i = \overline{1,m}), \tag{7.65}$$

$$x_j \ge 0\, (j = \overline{1,n}). \tag{7.66}$$

Оскільки будь-яка лінійна функція є сепарабельною, то, очевидно, задачі нелінійного програмування з цільовою функцією і системою обмежень, що представлені сепарабельними функціями, можуть бути зведені до задач лінійного програмування і розв'язані відомими методами.

Для зведення нелінійних сепарабельних функцій до лінійних використовують метод лінеаризації. Кожна функція-доданок початкової сепарабельної функції $\varphi_j(x_j)$ змінюється кусково-лінійною $\hat{\varphi}_j(x_j)$ функцією, значення якої збігаються в точках зламу (вузлових) точках із значеннями заданої нелінійної функції (рис. 7.11).

Вузлові точки, як правило, вибирають на однаковій, наперед вибраній відстані одна від одної і вони повинні належати в площині означення функції. Зрозуміло, що апроксимована функція повинна має бути неперервною.

Замінимо у (7.64) сепарабельні доданки $f_j(x_j)$ кусково-лінійними $\hat{f}_j(x_j)$, а сепарабельні $g_{ij}(x_j)$ — також кусково-лінійними $\hat{g}_{ij}(x_j)$. Приходимо до такої задачі

$$max\, \hat{F} = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j), \tag{7.67}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(x_j) \le b_i,\ (i = \overline{1,m}), \tag{7.68}$$

$$x_j \ge 0\, (j = \overline{1,n}), \tag{7.69}$$

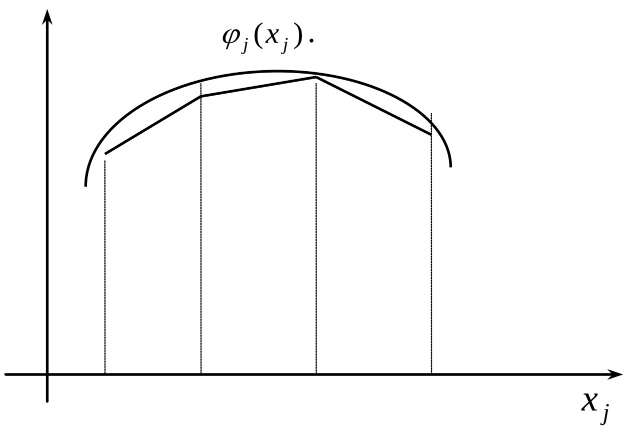


Рис. 7.11

Перетворення за допомогою заміни нелінійних функцій лінійними в задачі (7.67)—(7.69) приводить до задачі (7.64)—(7.66), наближеної до початкової, однак сформульованої вже в термінах лінійного програмування. Останню розв'язують за допомогою симплексного методу. Розв'язок лінійної задачі дасть наближення до розв'язку вихідної нелінійної задачі. Потрібної точності розв'язку задачі досягають за рахунок зменшення довжини ланок, на яких відбувається апроксимація початкової нелінійної цільової функції. Зрозуміло, що збільшення кількості відрізків для апроксимації веде до значного зростання обсягів обчислень.

З геометричних міркувань зрозуміло, що метод кусково-лінійної апроксимації дає можливість знаходити лише наближене значення точок локального екстремуму цільової функції. В деяких випадках можливі навіть ситуації, коли в побудованій наближеній задачі виникають свої екстремальні точки, що не мають жодним чином не стосуються початкової задачі. Лише за відомих властивостей опуклості цільової функції метод кусково-лінійної апроксимації визначає наближення значення точок глобального екстремуму.

На прикладі функції однієї змінної покажемо, як відбувається заміна сепарабельної функції кусково-лінійною.

Розглянемо неперервну функцію $f(x)$ на інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$. Через дві точки з координатами $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ проведемо пряму $\hat{f}(x)$, що є лінійною та апроксимує початкову функцію $f(x)$ (рис. 7.12).

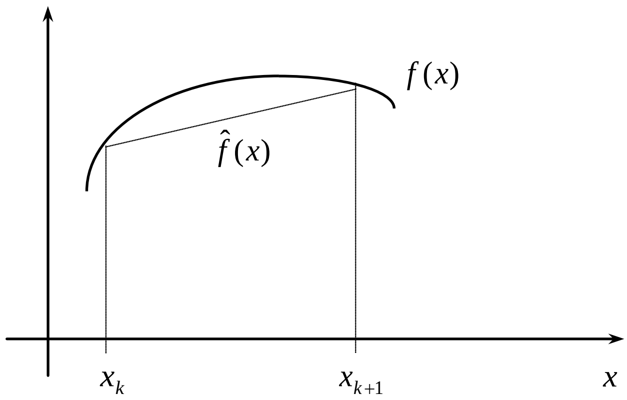


Рис. 7.12

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки має вигляд

$$\frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_k)}{f(x_{k+1}) - f(x_k)} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Звідси знаходимо значення $\hat{f}(x)$ (оскільки значення функцій $\hat{f}(x)$ та $f(x)$ у крайніх точках відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ збігаються, тоді $\hat{f}(x_k) = f(x_k)$):

$$\hat{f}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) + \hat{f}(x_k),$$

або

$$\hat{f}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) + f(x_k). \qquad (7.70)$$

Пригадуючи, що для лінійної функції будь-яка точка x з відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ може бути представлена у вигляді лінійної комбінації двох точок, тобто

$$x = \lambda x_{k+1} + (1-\lambda)x_k,\ 0 \le \lambda \le 1, \qquad (7.71)$$

вираз (7.70) набуває вигляду

$$\hat{f}(x) = \frac{\lambda x_{k+1} + (1-\lambda)x_k - x_k}{x_{k+1} - x_k}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) + f(x_k) =$$

$$=\frac{\lambda x_{k+1}+x_k-\lambda x_k-x_k}{x_{k+1}-x_k}\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)+f(x_k)=$$

$$=\frac{\lambda(x_{k+1}-x_k)}{x_{k+1}-x_k}\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)+\hat{f}(x_k)=\lambda\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)+f(x_k)=$$

$$=\lambda\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)+\hat{f}(x_k)=\lambda f(x_{k+1})-\lambda f(x_k)+f(x_k)\Rightarrow$$

$$\hat{f}(x)=\lambda f(x_{k+1})+(1-\lambda)f(x_k).$$

Введемо позначення $\lambda=\lambda_{k+1}$ і $(1-\lambda)=\lambda_k$, тоді

$$\hat{f}(x)=\lambda_{k+1}f(x_{k+1})+\lambda_k f(x_k), \qquad (7.72)$$

$$\lambda_k\geq 0,\lambda_{k+1}\geq 0,x_k\geq 0,x_{k+1}\geq 0.$$

Знайдений вираз можемо узагальнити для будь-яких значень $x_k\geq 0,x_{k+1}\geq 0$, отже, на довільний відрізок $[0;\alpha]$ і будь-яку функцію $\hat{f}(x)$. З (7.71), (7.72) матимемо:

$$x=\sum_{k=0}^{\alpha}\lambda_k x_k, \qquad (7.73)$$

$$\hat{f}(x)=\sum_{k=0}^{\alpha}\lambda_k f(x_k), \qquad (7.74)$$

$$\sum_{k=0}^{\alpha}\lambda_k=1,\lambda_k\geq 0,k=\overline{0,\alpha}. \qquad (7.75)$$

Оскільки функція $\hat{f}(x)$ є ламаною лінією, не більше двох сусідніх значень λ_k будуть додатними.

Подальше узагальнення здійснимо для випадку функцій багатьох змінних. Введемо позначення $f_j(x_k)=f_{jk}$, $g_{ij}(x_k)=g_{ijk}$, тоді $\hat{f}_j(x_j)=\sum_{k=0}^{\alpha_j}\lambda_{kj}f_{kj}$, $\hat{g}_{ij}=\sum_{k=0}^{\alpha_j}\lambda_{kj}g_{ijk}$. Таким чином, задача (7.67)—(7.69) матиме вигляд:

$$max\,\hat{F}=\sum_{j=1}^{n}\hat{f}_j(x_j)=\sum_{k=0}^{\alpha_j}\lambda_{kj}f_{kj}, \qquad (7.76)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\alpha_j}\lambda_{kj}g_{ijk}\leq b_i \quad (i=\overline{1,m}), \qquad (7.77)$$

$$\sum_{k=0}^{\alpha_j}\lambda_{kj}=1,\lambda_{kj}\geq 0,j=\overline{0,n} \qquad (7.78)$$

з вимогою, що не більше двох сусідніх $\lambda_{kj}\geq 0,j=\overline{0,n}$ будуть додатними.

Задача (7.76)—(7.78) є задачею лінійного програмування і розв'язується симплексним методом. За визначеним оптимальним планом $\Lambda^*(\lambda_{kj}^*)(k=\overline{0,\alpha_j};j=\overline{0,n})$, ураховуючи (7.73), знаходимо наближений розв'язок початкової задачі $x_j^*=\sum_{k=0}^{j\,\alpha}\lambda_{kj}^*x_{kj}$ $(j=\overline{1,n})$.

Приклад 7.7. Підприємство виготовляє хімічні речовини двох видів X_1 і X_2 з вмістом фіксованого набору елементів. Можлива реалізація продукції різного об'єму, але не більше як 2 см^3. Крім того, речовини X_1 і X_2 повинні збільшувати концентрацію вказаного набору елементів залежно від об'єму речовини. Відомо, що кількість набору елементів у вигляді сухої суміші, яку витрачають на виробництво 1 см^3 кожного виду хімічної речовини, не має лінійної залежності від її об'єму. Так, на виробництво 1 см^3 речовини X_1 витрачають удвічі більше грамів сухої суміші, ніж квадрат об'єму речовини X_1. Отже, X_2 треба витрачати в три рази більше грамів сухої суміші, ніж квадрату об'єму речовини, якщо позначити x_1 — об'єм речовини першого типу X_1; x_2 — об'єм речовини другого типу X_2. Звідси вказані умови матимуть такий вигляд: витрати у грамах на виробництво

1 см^3 речовини X_1 дорівнюють $2x_1^2$; витрати комплектуючих на виробництво 1 см^3 речовини X_2 дорівнюють $3x_2^2$. Загальна кількість суміші для виготовлення хімічних речовин обмежена на день і становить 6 г. Прибуток від реалізації одиниці об'єму продукції також має, якщо обмеженою є загальна кількість сировини і становить на день 24 000. нелінійний зв'язок з її обсягом. Для першого типу продукції прибуток від реалізації одиниці об'єму становитиме $4x_1 - x_1^2$, прибуток від реалізації 1 см^3 продукції другого типу дорівнює її обсягу.

Визначити оптимальний об'єм виробництва хімічних речовин, щоб за вказаних вимог стосовно концентрації набору хімічних елементів дістати максимальний прибуток від реалізації продукції.

Розв'язування. Враховуючи введені змінні, маємо таку економіко-математичну модель задачі:

$$\max F = 4x_1 - x_1^2 + x_2,$$
$$2x_1^2 + 3x_2^2 \le 6,$$
$$0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2.$$

Функція F є сепарабельною, оскільки її можна подати як суму двох функцій $f_1(x_1) = 4x_1 - x_1^2$ і $f_2(x_2) = x_2$, тобто $F = 4x_1 - x_1^2 + x_2 = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Функція $g_{ij} = 2x_1^2 + 3x_2^2$ також сепарабельна, оскільки подана у вигляді суми двох функцій: $g_{11}(x_1) = 2x_1^2$ і $g_{12}(x_2) = 3x_2^2$, тобто $g_{ij} = 2x_1^2 + 3x_2^2 = g_{11}(x_1) + g_{12}(x_2)$.

Усі введені функції є опуклими, отже, методом кусково-лінійної апроксимації можна знайти наближене значення глобального максимуму цільової функції F.

За умовою задачі змінні x_1 і x_2 можуть набувати значень із проміжку $[0;2]$. Оберемо крок інтервалу для апроксимації 0,5. Розраховані значення для $x_{k1}, x_{k2}, f_{k1}, f_{k2}, g_{k11}, g_{k12}$ наведемо в таблиці.

k	x_{k1}	f_{k1}	g_{k11}	x_{k2}	f_{k2}	g_{k12}
0	0	0	0	0	0	0
1	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,75
2	1	2	2	1	1	3
3	1,5	3	4,5	1,5	1,5	6,75
4	2	4	2	2	8	12

Математична модель наближеної задачі має вигляд:

$$\max \hat{F} = \lambda_{01} f_{01} + \lambda_{11} f_{11} + \lambda_{21} f_{21} + \lambda_{31} f_{31} + \lambda_{41} f_{41} + \\ + \lambda_{02} f_{02} + \lambda_{12} f_{12} + \lambda_{22} f_{22} + \lambda_{32} f_{32} + \lambda_{42} f_{42}$$

за умов

$$\lambda_{01} g_{011} + \lambda_{11} g_{111} + \lambda_{21} g_{211} + \lambda_{31} g_{311} + \lambda_{41} g_{411} + \lambda_{02} g_{012} + \lambda_{12} g_{112} + \lambda_{22} g_{212} + \\ + \lambda_{32} g_{312} + \lambda_{42} g_{412} \le 6,$$
$$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} = 1,$$
$$\lambda_{02} + \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} + \lambda_{42} = 1,$$
$$\lambda_{kj} \ge 0 (k = 0,1,2,3,4; j = 1,2).$$

Підставляючи наведені в таблиці розраховані значення f_{kj} і g_{kij}, $(k = 0,1,2,3,4; j = 1,2; i = 1)$, маємо числову економіко-математичну модель у вигляді:

$$\max \hat{F} = \lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 0,5\lambda_{12} + \lambda_{22} + 1,5\lambda_{32} + 2\lambda_{42}$$

за умов

$$0,5\lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 4,5\lambda_{31} + 8\lambda_{41} + 0,7\lambda_{12} + 3\lambda_{22} + 6,75\lambda_{32} + 12\lambda_{42} \le 6,$$
$$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} = 1,$$
$$\lambda_{02} + \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} + \lambda_{42} = 1,$$
$$\lambda_{kj} \ge 0 (k = 0,1,2,3,4; j = 1,2).$$

Задачу розв'язуємо симплексним методом, дотримуючись умови, що не більше як двох сусідніх $\lambda_k (k = \overline{0,4})$ для кожного $j = 1,2$ додатні.

Оптимальний план:

$$\begin{aligned}&\lambda_{01}^* = \lambda_{11}^* = \lambda_{31}^* = \lambda_{41}^* = 0, \lambda_{21}^* = 1,\\&\lambda_{02}^* = \lambda_{12}^* = \lambda_{32}^* = \lambda_{42}^* = 0, \lambda_{22}^* = 1\end{aligned}.$$

Знаходимо наближений оптимальний розв'язок початкової задачі:

$$\begin{aligned}&x_1^* = \lambda_{01}^* x_{01} + \lambda_{11}^* x_{11} + \lambda_{21}^* x_{21} + \lambda_{31}^* x_{31} + \lambda_{41}^* x_{41} = x_{21} = 1\\&x_2^* = \lambda_{02}^* x_{02} + \lambda_{12}^* x_{12} + \lambda_{22}^* x_{22} + \lambda_{32}^* x_{32} + \lambda_{42}^* x_{42} = x_{22} = 1,\\&\max F = 4.\end{aligned}$$

Наведену задачу легко розв'язати графічним методом (рис. 7.13). У результаті переконуємося, що розв'язок є наближеним розв'язком задачі.

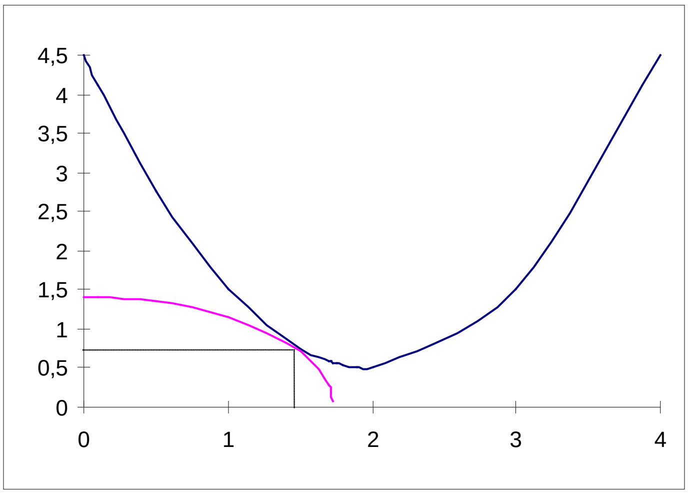


Рис. 7.13

Зменшуючи крок розбиття інтервалу [0;2] і повторюючи вище розглянуту процедуру, матимемо точніший розв'язок задачі $X^*(x_1^* \approx 1{,}42; x_2^* \approx 0{,}81)$, $\max F = 4{,}47$.

Стислі висновки

Задачі нелінійного програмування часто виникають як у теорії управління, так і в інших науках. Систематичне дослідження таких задач, що розпочалося наприкінці 1940-х років, сприяло появі самостійної наукової дисципліни — нелінійне програмування.

У рамках даного розділу сформульовані лише основні теоретичні положення та найвивченіші методи розв'язування задач нелінійного програмування.

Оскільки для задач нелінійного програмування не існує універсального методу, то не всі наведені методи однаково зручні для розв'язування певної практичної задачі. У кожному конкретному випадку необхідно обирати кращий метод. Неможливо в рамках даного посібника викласти всі відомі в наш час методи нелінійного програмування, тому залишились поза увагою цікаві методи загального. Отже, тим, хто бажає детальніше ознайомитись з нелінійним програмуванням, доцільно переглянути джерела [2, 3, 4, 6, 7].

Головною метою розгляду даної теми було звернення уваги майбутніх фахівців-економістів на практичне значення використання моделей нелінійного програмування. В значно узагальнених постановках економічних задач визначення точного виду функцій у математичній моделі може видатись неможливим, однак у конкретних застосуваннях точний вигляд усіх функцій часто визначається безпосередньо, і тоді розв'язок на основі побудованої моделі дає оптимальний план адаптований до реальних умов.

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Як записується в загальному вигляді задача нелінійного програмування?
2. Труднощі розв'язування задач нелінійного програмування.
3. Функція Лагранжа.
4. Метод Лагранжа.
5. Яка функція називається опуклою (угнутою)?
6. Сформулюйте необхідні та достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції.
7. Теорема Куна—Таккера.
8. Сформулюйте задачу квадратичного програмування.
9. Етапи розв'язування задачі нелінійного програмування методом кусково-лінійної апроксимації.
10. За методом Лагранжа знайти точку умовного екстремуму.

1. $Z = 2x_1^2 + x_2^2$,	2. $Z = x_1^2 - x_2^2$,
$2x_1 + 3x_2 = 5$.	$3x_1 + 4x_2 = 12$.
3. $Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$,	4. $Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$,
$2x_1 - x_2 = 5$.	$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$.
5. $Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2$,	6. $Z = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2$,
$x_1 + 3x_2 = 6$.	$x_1 + 5x_2 = 12$.
7. $Z = 4x_1 + 2x_1^2 + x_2 + 2x_2^2$,	8. $Z = 2x_1x_2 + x_2^2$,
$3x_1 + 4x_2 = 12$.	$2x_1 + 4x_2 = 8$.

Основні терміни і поняття

Основні терміни та поняття

- Функція Лагранжа
- Множники Лагранжа
- Локальний оптимум
- Умовний та безумовний екстремум
- Сідлова точка
- Опуклі і угнуті функції
- Опукле програмування
- Квадратичне програмування
- Градієнтний метод

Розділ 8

СТОХАСТИЧНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:

- ✓ загальну математичну постановку задачі стохастичного програмування;
- ✓ площину застосування задач стохастичного програмування та особливості їх математичної постановки;
- ✓ одноетапні задачі стохастичного програмування;
- ✓ двохетапні задачі стохастичного програмування;

а також УМІТИ:

- формулювати математично економічні задачі як задачі стохастичного програмування;
- зводити задачі стохастичного програмування до задач лінійного програмування;
- розв'язувати задачі за алгоритмом симплекс-методу та застосовувати ПК;
- проводити аналіз розв'язку, робити висновки.

8.1. Область застосування задач стохастичного програмування в економіці

Повертаючись до наведеної у розд. 1 класифікації задач математичного програмування, переконаємося, що в попередніх розділах досить детально було розглянуто основні види математичних моделей, які носять детермінований характер. Головною умовою побудови і використання детермінованих моделей є припущення, що всі початкові параметри задачі можуть бути чітко визначеними. З позицій економіки така умова рівносильна тому, що на етапі постановки задачі абсолютно точно відома інформація про всі параметри моделі. Однак загальновідомо, що економічні системи функціонують і розвиваються в умовах невизначеності, тобто досить важко, а іноді й неможливо, вказати точні значення деяких параметрів математичної моделі, особливо коли розглядається розвиток процесів у майбутньому.

Фактичні значення можуть суттєво відрізнятись від тих, які були взяті за основу у побудові математичних моделей і визначенні оптимальних планів, що породжує ризик прийнятих рішень. Невизначеність може бути різного рівня залежно від того, яку інформацію маємо про досліджуваний процес чи явище.

Виділяють шість інформаційних ситуацій. Перша інформаційна ситуація характеризується заданим розподілом відповідних параметрів. У таких випадках для прийняття рішень використовують методи стохастичного програмування, суть яких полягає в тому, при знаходженні оптимального рішення $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, яке визначається для керованих змінних, необхідно враховувати також вплив ряду випадкових параметрів $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$, регулювати якими немає можливості. Наприклад, плануючи діяльність сільськогосподарських підприємств, маємо можливість встановлювати площі посівів сільськогосподарських культур, рівні внесення добрив, поголів'я тварин (керовані змінні), але кінцевий результат діяльності значною мірою залежить також від погодних умов, податкової та кредитної політики та ін. (некеровані змінні).

Умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку — це випадкові величини, є предметом стохастичного програмування.

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи — прямі і непрямі.

Прямі методи використовуються для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X,\omega)$ і $g_i(X,\omega)\le 0,\ i=\overline{1,m}$ на базі інформації про параметри

ω. Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

У стохастичному програмуванні більше, ніж в інших розділах математичного програмування, значні труднощі виникають не лише при розробці методів розв'язування задач, а одразу при їх постановці. Адже у постановці кожної задачі мають бути відображені особливості прийняття рішень в умовах невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування в значній мірі залежить від її цільових засад та інформаційної структури.

8.2. Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування

Типова задача математичного програмування в детермінованій постановці: визначити вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, для компонент якого

$$\max(\min) F = f(X),$$
$$q_i(X) \le 0 \ (i = \overline{1, m}),$$
$$X \ge 0.$$

Якщо функції в даній задачі, крім керованих параметрів *X*, залежать ще й від деяких випадкових величин $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, то матимемо *задачу стохастичного програмування*:

$$\max(\min) F = f(X, \omega),$$
$$q_i(X, \omega) \le 0 \ (i = \overline{1, m}),$$
$$X \ge 0, \ \omega \in \Omega,$$

де Ω — простір подій ω.

Залежно від можливості здобути та врахувати інформацію про детермінованості (стохастичності) функцій $f(X, \omega)$, $q_i(X, \omega)$ задачі, постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

а) стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;

б) детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;

в) стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени і коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Перш за все необхідно враховувати таке.

1. Вектор *X* є детермінованим чи випадковим. Якщо вектор *X* детермінований, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо він випадковий, то тоді $X(\omega)$ залежить від випадкових параметрів.

2. Як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції — як абсолютну (для всіх значень $\omega \in \Omega$) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або мінімізації середньоквадратичного відхилення. Наприклад, що краще, мати платню 500±200 чи 450±50. У першому випадку платня може змінюватись в межах 300 — 700, у другому лише 400 — 500 грн.

3. Як виконуються обмеження — абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала.

При постановці задач стохастичного програмування слід виходити не тільки з математичних міркувань, а й з економічного змісту та евристичних міркувань. Наприклад, детермінованість чи стохастичність вектора *X* визначається із сутності економічних, технологічних процесів тощо.

Для сільськогосподарського підприємства вектор, що визначатиме площі посіву рослинницьких культур, обов'язково має бути детермінованим, якщо ж шуканий вектор для того ж підприємства за тих самих умов визначатиме, наприклад, обсяги кредитів його компоненти мають бути стохастичними величинами, бо достеменно невідомо, чи будуть вони отримані.

Методи розв'язування стохастичних задач ділять на дві групи — прямі та непрямі.

Прямі методи використовуються для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X, \omega)$ і $g_i(X, \omega) \le 0$, $i = \overline{1, m}$ на базі інформації про параметри ω. Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмувань, тобто перехід до детермінованого аналогу задачі стохастичного програмування.

8.3. Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування

У задачах детермінованого характеру за певним набором початкових даних однозначно визначається вигляд цільової функції та обмежень задачі. У стохастичному програмуванні особливості побудови математичних моделей задач пов'язані з можливостями вибору функції, мети та обмежень, тобто за одного набору початкових значень можна отримати математичні моделі, що суттєво відрізнятимуться, а отже, значні розбіжності матимуть і одержані за ними оптимальні плани. Розглянемо основні відмінності будови математичних моделей задач стохастичного програмування.

Довільна математична модель задачі математичного програмування складається з двох частин — цільова функція та обмеження. У задачах стохастичного програмування важливим є вибір як виду цільової функції, так і виду обмежень. Цільова функція визначає ефективність функціонування і розвитку економічної системи. Якщо відомі основні характеристики випадкових параметрів задачі, то цільовою функцією можуть бути використані:

- максимізація математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рентабельності і т. д.), у такому випадку задачі мають назву М-моделей;
- мінімізація дисперсії деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої ефективності того ж показника, тоді задачі мають назву V-моделей;
- імовірність перевищення (неперевищення) економічним показником певного фіксованого порога, тоді задача належить до Р-моделей.

Обмеження в стохастичних економіко-математичних моделях можуть також задаватися різними способами, а значить, отримані оптимальні плани будуть мати відповідний рівень гарантії їх виконання. При цьому потрібно брати до уваги як внутрішню невизначеність (технологічні процеси), так і невизначеність зовнішнього середовища (постачання сировини, попит на вироблену продукцію, податки тощо).

Нехай задано обмеження задачі математичного програмування в загальному вигляді

$$g(X,\omega)\le 0\,. \tag{8.1}$$

Неможливість, а іноді й недоцільність вимоги, щоб знайдене рішення задовольняло обмеження (8.1) за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $\omega\in\Omega$, породжує таку ідею: накласти дещо менш жорсткі умови, зокрема, замість (8.1) можна допускати невиконання умов з певною ймовірністю

$$P\{g(X,\omega)>0\}\le\gamma\,, \tag{8.2}$$

або

$$P\{g(X,\omega)\le 0\}\ge 1-\gamma\,. \tag{8.3}$$

Обмеження (8.2) трактується так: імовірність того, що $g(X,\omega)>0$ не перевищує величину γ. Відповідно вираз (8.3) гарантує, що з ймовірністю $1-\gamma$ буде виконуватися обмеження (8.1). Наприклад, якщо $\gamma=0{,}05$, то обмеження у 95 випадках із 100 буде виконуватися і тільки у 5 випадках — виконуватися не буде.

Крім того, система обмежень задачі може бути змішаною, тобто частина обмежень може виконуватись в середньому, частина — у жорсткій постановці, а частина — з деякою ймовірністю.

Наведемо кілька варіантів постановок задач стохастичного програмування.

Нехай $f(X,\omega)$ — функція, яка виражає ефективність плану при заданих X і ω. Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану X при випадкових параметрах ω можна сформулювати у таких варіантах:

а) $\max Mf(X,\omega)$ (8.4)

за умов

$$P\{g(X,\omega)\le 0\}\ge 1-\gamma \tag{8.5}$$

$$X\ge 0\,,\ \omega\in\Omega\,, \tag{8.6}$$

б) $max\ \xi$ (8.7)

за умов

$$P\{f(X,\omega)\geq\xi, g(X,\omega)\leq 0\}\geq 1-\gamma\ , \qquad (8.8)$$

$$X\geq 0\ ,\ \omega\in\Omega\ . \qquad (8.9)$$

Отже, при постановці задачі варіанта а) треба максимізувати середню сподівану ефективність за умов, що обмеження, наприклад, по ресурсах, виконанню контрактів тощо відбуваються з імовірністю $1-\gamma$. При постановці задачі варіанта б), крім того, вимагається, щоб значення функції ефективності, наприклад, прибутку, було не менше від величини ξ з ймовірністю $1-\gamma$, а також величина ξ була максимальною. Зазначимо, що перевага варіанта а) полягає у тому, що він простіший в обчислювальному аспекті.

Оскільки модель (8.4)—(8.6) критерієм оптимальності використовує математичне сподівання $f(X,\omega)$, то маємо М-модель, а плани, отримані за такою моделлю, називають M-планами.

Зрозуміло, що можна формулювати задачі стохастичного програмування також і в інших варіантах, в яких поєднуються чи комбінуються певним способом умови наведених вище першої та другої моделей. Так, наприклад, задача стохастичного програмування може мати вигляд

$$P\{f(X,\omega)\geq\alpha\}\to\min$$

за умов

$$M(g_i(X,\omega))\leq 0\ ,\ (i=\overline{1,k}, k<m)\ ,$$

$$g_i(X,\omega)\leq 0 (i=\overline{k+1,m})\ ,$$

$$X\geq 0\ .$$

Таким чином, очевидно, що конкретних постановок задач стохастичного програмування досить багато і вибір певного виду для розв’язування практичних задач залежить від конкретних умов задачі, набору інформації, мети дослідження.

Приклад 8.1. Побудуємо математичну модель відомої задачі визначення оптимального виробничого плану в термінах стохастичного програмування. Необхідно розрахувати оптимальний план виробництва трьох видів продукції $X=(x_1,x_2,x_3)$, який максимізує загальний прибуток підприємства. Для спрощення розглянемо використання двох видів ресурсів, обсяги яких відомі $b_1=550$ од., $b_2=205$ од., прибуток від реалізації одиниці *j*-го виду продукції $c_{jk}\ (j,k=\overline{1,3})$ є випадковим і встановлений з відомими ймовірностями $p_{jk}\ (j,k=\overline{1,3})$. Норми затрат *i*-го виду ресурсу на одиницю *j*-го виду продукції детерміновані $a_{ij}\ (i=\overline{1,2};\ j=\overline{1,3})$. Початкові дані наведено в табл. 8.1—8.4.

Таблиця 8.1

Прибуток від одиниці першого виду продукції c_{1k}, ум. од.	Імовірність p_{1k}
10	0,3
13	0,4
15	0,3

Таблиця 8.2

Прибуток від одиниці другого виду продукції c_{2k}, ум. од.	Імовірність p_{2k}
12	0,2
15	0,5
13	0,3

Таблиця 8.3

Прибуток від одиниці третього виду продукції c_{3k}, ум. од.	Імовірність p_{3k}
12	0,3
11	0,5
14	0,2

Таблиця 8.4

Вид продукції	Норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції	
	першого виду, ум. од.	другого виду, ум. од.
Перший	5	1
Другий	4	2
Третій	3	1,5

Розв'язування. Математична постановка задачі стохастичного програмування може бути подана в різних варіантах залежно від вигляду цільової функції. Розглянемо кілька можливих варіантів постановок для умов даної задачі.

I варіант. Цільова функція залежить від випадкової величини, отже, математична модель даної задачі матиме вигляд:

$$\max F = C(\omega)X,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \end{cases},$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,3}).$$

Маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з випадковими параметрами цільової функції. Очевидно, що величина F є також випадковою величиною із законом розподілу $N(\overline{F}, \sigma_F^2)$, де $\overline{F}$ — математичне сподівання, σ_F^2 — дисперсія.

Щоб розв'язати таку задачу, треба знайти математичне сподівання $\overline{F}$.

Позначимо символами $M(c_j)$ $(j = \overline{1,3})$ — математичне сподівання прибутку від j-го виду продукції, тоді математична модель набуває вигляду

$$\max \overline{F} = M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 = M(C^T(\omega)X),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \end{cases},$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,3}).$$

У наведеній постановці маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з М-моделлю, оскільки цільова функція є математичним сподіванням деякої випадкової величини.

Оскільки випадкові величини прибутків та обсягів ресурсів є дискретними і відомі значення відповідних імовірностей p_{jk} $(j = \overline{1,3}; k = \overline{1,5})$, можливо безпосередньо обчислити значення $M(c_j)$ $(j = \overline{1,3})$. Отже, в числовому вигляді маємо

$$M(c_1) = \sum_{k=1}^{3} c_{1k}p_{1k} = c_{11}p_{11} + c_{12}p_{12} + c_{13}p_{13} = 10 \cdot 0{,}3 + 13 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}3 = 12{,}7,$$

$$M(c_2) = \sum_{k=1}^{3} c_{2k}p_{2k} = c_{21}p_{21} + c_{22}p_{22} + c_{23}p_{23} = 12 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}5 + 13 \cdot 0{,}3 = 13{,}8,$$

$$M(c_3) = \sum_{k=1}^{3} c_{3k}p_{3k} = c_{31}p_{31} + c_{32}p_{32} + c_{33}p_{33} = 12 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}5 + 14 \cdot 0{,}2 = 11{,}9,$$

$$\max F = 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550, \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,3}).$$

Початкова задача зведена до задачі лінійного програмування, яку розв'язано симплексним методом. Оптимальний план такої детермінованої задачі є наближеним розв'язком початкової стохастичної.

Оптимальний план $X_1^* = (x_1 \approx 46{,}67; x_2 = 0; x_3 \approx 105{,}56)$, причому прибуток становитиме $F_{\max} \approx 1848{,}78$.

II варіант. Отриманий розв'язок може бути основою плану виробництва продукції за даних умов. Однак очевидно, що оскільки значення випадкових величин були замінені їх математичним сподіванням, розв'язок задачі знайдено як деяке усереднення всіх можливих за даних умов розв'язків. Для деякого набору фіксованих умов розрахований план може виявитись не оптимальним, тобто справжнє значення прибутку буде значно відрізнятись від очікуваного рівня. Якщо, наприклад, зовнішні умови складаються найнесприятливіше (мінімальні рівні прибутків для кожного з видів продукції), то значення цільової функції для розрахованого оптимального плану буде

$$F(c_{j\min}) = 10 \cdot 46{,}67 + 11 \cdot 105{,}56 = 1627{,}86.$$

Очевидно, що відхилення даного значення від середнього очікуваного рівня ($1848{,}78 - 1627{,}86 = 220{,}92$) вказує на можливі втрати прибутку. Відомо, що однією з головних характеристик відхилення значень випадкової величини від її середнього є дисперсія. Розрахуємо значення дисперсії для отриманого оптимального плану:

$$D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 + x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} + x_1 x_3 \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} + x_2 x_3 \sigma_2 \sigma_3 \rho_{23} = 22672{,}88.$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{22672{,}88} = 150{,}58$.

Якщо припустити, що випадкова величина має нормальний закон розподілу, то, враховуючи властивості середньоквадратичного відхилення (правило «трьох сигм»), визначимо межі, в яких змінюватиметься прибуток: $\overline{F} \pm \sigma_F = 1848{,}78 \pm 150{,}58 = [1397{,}05; 2300{,}51]$. Якщо розраховані зміни прибутку не можуть влаштовувати особу, що приймає рішення, то доцільно ввести обмеження, яке зменшить ризик втрати доходу.

За потреби зменшення можливих втрат прибутку до системи обмежень вводять умову, що дисперсія прибутку повинна не перевищувати деякої заданої величини. Розв'яжемо задачу з додатковою умовою, що дисперсія має не перевищувати 2500.

$$\max F = 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550, \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205 \\ 3{,}81 \cdot x_1^2 + 1{,}56 \cdot x_2^2 + 1{,}29 \cdot x_3^2 \le 5000 \end{cases},$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,3}).$$

Дана задача є нелінійною, розв'язуючи її маємо оптимальний план:

$X_2^* = (x_1 = 14{,}23; x_2 = 37{,}78; x_3 = 39{,}39)$, причому прибуток $F = 1170$ буде змінюватись приблизно на 210 ум. од. (оскільки $\sigma_F = \sqrt{D_F} \approx 70$).

III варіант. Застосування інструментарію математичного програмування до розв'язання економічних задач дає можливість врахувати найвибагливіші побажання до набору властивостей розроблених планів. Припустимо, що необхідно, орієнтуючись на деякий рівень середнього прибутку, досягти мінімального рівня можливих його змін. У такому випадку доречно використати V-модель задачі стохастичного програмування.

$$\min Z = D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 + x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} + x_1 x_3 \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} + x_2 x_3 \sigma_2 \sigma_3 \rho_{23},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 \ge W \end{cases},$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,3}),$$

де W — бажаний рівень сподіваного прибутку.

Зафіксуємо бажаний рівень прибутку не нижче, ніж 1500 ум. од. і знайдемо оптимальний план такої задачі:

$$\min Z = D_F\,,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550, \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205, \\ 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3 \ge 1500 \end{cases},$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1{,}3}).$$

Розв'язуючи задачу квадратичного програмування, маємо $X_3^* = (x_1 = 18{,}24; x_2 = 48{,}4; x_3 = 50{,}47)$, мінімальна дисперсія сподіваного прибутку буде $Z = \min D_F = 8206{,}125$, тобто зміни прибутку відбуватимуться у межах ± 270 ум. од.

Вибір одного з наведених варіантів математичних моделей залежатиме від конкретних ситуації, поставлених цілей і вимог, однак наведений приклад вказує, що використання стохастичних задач дає математично обґрунтований набір інформації, що може слугувати основою для прийняття рішень у складних реальних умовах.

Постановка задачі стохастичного програмування залежить значною мірою також від того, чи є можливість під час вибору (прийняття) рішень уточнювати стан економічного середовища (природи) на підставі певних спостережень.

Відомо, що для економічних систем розробляють стратегічні та тактичні плани. Під час розробки стратегічних планів враховують всі можливі значення ω, тобто стан зовнішнього та внутрішнього середовищ, і приймають рішення про траєкторіїю розвитку системи. Однак зустрічаються задачі, коли є можливість провести спостереження над ω (у певний момент часу стан економічного середовища стає відомим) і вибрати розв'язок з урахуванням результатів спостережень. Наприклад, у плануванні виробничої діяльності підприємства рішення про обсяги випуску продукції приймається з урахуванням дослідження поточного стану структури ринку. Тоді розробляють тактичний план, тобто знаходять рішення $X(\omega)$ за заданого $\omega \in \Omega$, тобто розв'язують задачу

$$\max\ f(X(\omega))$$

за умов

$$g_i(X(\omega)) \le 0,\ i = \overline{1, m}, \qquad X(\omega) \ge 0\,.$$

У загальному випадку спостереження не повністю визначають стан економічного середовища, а тому етапи вибору рішень можуть чергуватись з етапами спостережень за станом зовнішнього середовища. Отже, відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень у такій послідовності:

рішення — спостереження — рішення — спостереження ...

або

спостереження — рішення — спостереження — рішення ...

Якщо ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N кількість разів, то модель називають N-етапною задачею (моделлю) стратегічного стохастичного програмування, а якщо зі слова «спостереження» — задачею (моделлю) тактичного стохастичного програмування.

Кожен з N етапів також може бути розподілений певним чином. У таких випадках матимемо одно- і двоетапні задачі стохастичного програмування.

Одноетапна задача стохастичного програмування використовується в тому випадку, коли рішення приймаються на підставі відомих стохастичних характеристик розподілу випадкових параметрів умов задачі до спостережень за їхніми реалізаціями. При цьому має прийматись найкраще в середньостатистичному розумінні рішення. Іншими словами, випадкові параметри задачі замінюються їх середніми величинами і початкова задача стохастичного програмування зводиться до детермінованого випадку.

Двоетапна задача стохастичного програмування виникає тоді, коли процес прийняття рішення розподіляється на два етапи.

На першому етапі вибирається попередній план, який задовольняє умови задачі за будь-якої реалізації випадкових параметрів. На другому етапі розраховується величина компенсації відхилень розробленого плану від фактичних значень, що були одержані після спостереження реалізації випадкових параметрів. Оптимальний план задачі визначають у такий спосіб, щоб забезпечити мінімум середнього значення сумарних витрат, які виникають на обох етапах розв'язування задачі. Для існування розв'язку двоетапної задачі вибір плану на першому етапі має гарантувати існування плану-компенсації.

8.4. Приклади економічних задач стохастичного програмування

Приклад 8.2. Нехай потрібно зробити запас з n товарів у кількості $X = (x_1, x_{2,..., x_n})$, на які є випадковий попит $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$. Нестача одиниці *j*-го товару карається штрафом C_j, тобто $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, а витрати на зберігання одиниці відповідної продукції, яку не вдалося збути, задаються вектором $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$.

Розв'язування. Функція збитків, що відповідає розв'язку *x*, матиме вигляд

$$f(x, \omega) = \sum_{j=} \{C_j \max(0, \omega_j - x_j) + d_j \max(0, x_j - \omega_j)\},$$

де $C_j \max(0, \omega_j, -x_j)$ — штраф за незадоволення попиту по *j*-му виду продукції; $d_j \max(0, x_j, -\omega_j)$ — витрати на зберігання *j*-ї продукції.

Для пошуку оптимального розв'язку цієї задачі треба мати функцію розподілу випадкової величини ω. Якщо така функція розподілу невідома, тобто її неможливо знайти, то приймають, що випадкова величина розподілена рівномірно.

При цьому слід пам'ятати, що саме таке припущення може призвести до неправильного прийняття рішення.

Приклад 8.3. Індивіди можуть тримати своє багатство у вигляді грошей та облігацій. Оскільки гроші — це актив, що використовується як засіб обігу, вони не приносять процентів. Облігації — цінні папери, що дають певний процент. Логічно, що індивідууми повинні зберігати своє багатство у вигляді облігацій. Однак це не так, оскільки процент і ринкова вартість облігацій наперед точно не відомі , тобто існує невизначеність.

Розв'язування. Нехай S — величина активу, а *x* і *y* — величини активів, які зберігаються у формі грошей та облігацій. Вважаємо, що через рік активи, вкладені в облігації, змінюються. За решти рівних умов облігацію, яка приносить більший процент прибутку на ринках цінних паперів, можна збути за вищу суму, ніж облігацію з меншим процентом. Позначимо через ξ і η величини активів, які реалізуються через рік на одиницю активів, збережених у формі грошей і вкладених в облігації відповідно. Величина $\xi \equiv 1$, а η є випадковою величиною. Економіко-математична модель найбільш пріоритетного розподілу активу на гроші та облігації полягає у максимізації сподіваної корисності:

$$\max F(x. y) = \mathrm{M}(x + \eta y)$$

за умов

$$x + y \le S\,,$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0\,.$$

Звідси слідує, якщо $M\eta > 1$, то активи потрібно вкладати в облігації, і навпаки. Отже, питання про розподіл активу між грішми та облігаціями повністю вирішується на користь одного з цих видів заощаджень. Якщо $M\eta = 1$, то однаково, який саме спосіб заощадження буде використано.

Приклад 8.4. Відомо, що у комерційних банках нараховується більший процент на вкладені суми порівняно з ощадним, але повернення внеску не гарантується. Перед кожним вкладником постає дилема: мати меншу, але гарантовану суми, або більшу, проте з ризиком втратити внесок. З ризиком невикористаних можливостей пов'язаний внесок в ощадний банк.

Розв'язування. Позначимо через S — загальну суму грошових засобів певного власника; x — обсяг внеску в ощадний банк; y — у комерційний; a, b — процент нарахування в ощадному та комерційному банках; $(1-p)$ — імовірність ліквідації (банкрутство) комерційного банку. Джерелом невизначеності є повернення вкладу з комерційного банку.

За певного розподілу S на x і y можливі такі дві ситуації щодо отримання дивідендів:

$ax + by$ — за умов успішного функціонування комерційного банку;

$ax-y$ — в іншому випадку.

Економіко-математична модель має такий вид:

$$\max F(x,\ y) = (1-p)(ax-y) + p(ax+by)$$

за умов

$$x + y \le S\ ,$$
$$x,\ y \ge 0.$$

Приклад 8.5. Потрібно оцінити доцільність страхування. Нехай особа (клієнт) бажає застрахувати певну частину свого активу. Для цього сплачує певний внесок страховій компанії, а у разі втрати активу одержує від неї страхову винагороду.

Визначити частку активу, яку особа вважає за доцільне застрахувати.

Розв'язування. Позначимо через S актив (капітал, майно тощо), власником якого є певна особа. Частку, яку бажано застрахувати, позначимо через x. Страховий внесок, що сплачується страховій компанії, дорівнює rx, а у разі втрати активу клієнт одержує винагороду qx. Якщо відома інформація про ймовірність p недоторканності свого активу, то економіко-математична модель визначення частки страхового активу можна записати так:

$$\max F(x) = p(S - rx) + (1-p)qx\ ,$$
$$0 \le x \le S\ .$$

Тут легко врахувати також обсяги дивідендів.

Схожа модель може бути корисною для страхових компаній у визначенні доцільних величин страхових внесків і страхових винагород, які зацікавили клієнтів і були б вигідними страховій компанії.

Приклад 8.6. У буряково-цукровому комплексі мають суму коштів S, які необхідно розподілити між розширенням сировинної бази і збільшенням потужностей з її переробки. Потрібно так спланувати розподіл коштів, щоб одержати найбільшу кількість цукру. При цьому урожайність цукрових буряків вважається випадковою величиною ξ.

Розв'язування. Нехай q_1 — питомі витрати коштів на вирощування цукрових буряків на 1 га; q_2 — питомі приведенні витрати на створення одиниці потужності; d — частка виходу цукру з одиниці сировини; x — планова площа під цукровим буряком; y — планова потужність цукрового заводу.

Потрібно максимізувати приріст обсягу виробництва цукру за обмежених коштів. Економіко-математична модель має вигляд

$$\max_{x,\ y} F(x,\ y) = d\ M\ \min\{\xi\ x,\ y\}$$

за умов

$$q_1 x + q_2 y \le S\ ,$$
$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

8.5. Одноетапні задачі стохастичного програмування

Розглянемо лінійну одноетапну задачу стохастичного програмування в такій постановці.

Визначити план *X*, для якого

$$\max M\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j\right\},$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \le b_i(\omega)\right\} \ge p_i \ (i = \overline{1,m})\ ,$$

$$x_j \ge 0, \omega \in \Omega \ (j = \overline{1,n})\ ,$$

де вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції $C(\omega) = (c_j(\omega))$ $(j = \overline{1,n})$, матриця коефіцієнтів при змінних у системі обмежень $A(\omega) = \left(a_{ij}(\omega)\right)$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, а також вектор $B(\omega) = (b_i(\omega))$ $(i = \overline{1,m})$ — випадкові величини; ω — випадковий параметр; Ω — множина значень ω, що з'являються з невід'ємною ймовірністю.

Нехай $A(\omega)$ — нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $\overline{a}_{ij}$ і дисперсією σ_{ij}^2, а $B(\omega)$ і $C(\omega)$ — нормально розподілені випадкові величини з математичним сподіванням $\overline{b}_i$ і $\overline{c}_j$ та дисперсіями σ_i^2, σ_j^2.

В обмеженнях задачі $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \le b_i(\omega)\,(i = \overline{1,m})$ матриця $A(\omega)$ і вектор $B(\omega)$ є нормально розподіленими випадковими величинами, тоді їх різниці $\Delta_i(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\,(i = \overline{1,m})$ також є випадковими величинами з нормальним розподілом, математичним сподіванням $\overline{\Delta_i(X)}$ $= \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}x_j - \overline{b}_i$ $(i = \overline{1,m})$ і дисперсією $\sigma_i^2 = \sum \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_j^2$.

Обмеження $P\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \le b_i(\omega)\right\} \ge p_i$ $(i = \overline{1,m})$ еквівалентні нерівностям $P\{\Delta_i(X) \le 0\} \ge p_i$ $(i = \overline{1,m})$. Враховуючи, що $\Delta_i(X)$ нормально розподілена випадкова величина, використаємо функцію нормального закону розподілу, внаслідок чого наведену нерівність можна записати так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(X)} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left\{\frac{(\xi - \overline{\Delta_i})^2}{2\sigma_i^2(X)}\right\} d\xi \ge p_i, \quad (i = \overline{1,m}).$$

Позначимо $\Phi(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$, тоді останню нерівність зведемо до вигляду

$\Phi\left(-\frac{\overline{\Delta_i}(X)}{\sigma_i(X)}\right) \ge p_i$ звідки $\overline{\Delta_i}(X) + \Phi^{-1}(p_i)\sigma_i(X) \le 0$. Підставимо в цю нерівність значення $\overline{\Delta_i}(X)$ і $\sigma_i(X)$, маємо

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \overline{b_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \qquad (i = \overline{1,m}).$$

Отже, початкову стохастичну задачу зведено до детермінованого аналогу з лінійною цільовою функцією та нелінійними обмеженнями:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j$$

за умов

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \overline{b_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j, \quad (i = \overline{1,m}).$$

Таку задачу можна розв'язати одним із відомих методів вирішення задач нелінійного програмування, наприклад, методом множників Лагранжа.

Розглянемо одноетапну задачу стохастичного програмування, що задана Р-моделлю. Отже, маємо задачу вигляду

$$\min F = k$$

за умов

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\} = p_0,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i\right\} \ge p_i \quad (i=\overline{1,m}),$$
$$X \ge 0 .$$

У даній задачі необхідно мінімізувати величину k, що обмежує витрати на виготовлення продукції $\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$, причому така вимога має виконуватися не строго, а із заданим рівнем імовірності p_0. Інші обмеження також виконуються з певною імовірністю $p_i \quad (i=\overline{1,m})$.

Припустимо, що випадкова величина $c_j \; (j=\overline{1,n})$ розподілена нормально з математичним сподіванням $\overline{c_j}$ і кореляційною матрицею $C=(c_{tj})$, де $c_{tj}=M\{(c_t-\bar{c}_t)(c_j-\bar{c}_j)\}$. Тоді $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ — випадкова величина, що розподілена з математичним сподіванням $\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j$ і дисперсією $\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_t x_j$. З попередніх викладок, отже, можна записати

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\} = p_0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\mathrm{k} - \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} \bar{\mathrm{c}}_{\mathrm{j}} x_j}{\sqrt{\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{j=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{c}_{\mathrm{tj}} x_t x_j}}\right) = p_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{k(X)} = \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} \bar{\mathrm{c}}_{\mathrm{j}} x_j + \Phi^{-1}(p_0)\sqrt{\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{j=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{c}_{\mathrm{tj}} x_t x_j} .$$

При $p_0 \ge 0$ величина $k(X)$ є угнутою функцією по змінних x_j. Таким чином, за зроблених припущень, задачі стохастичного програмування

$$\min F = k ,$$
$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\} = p_0 ,$$
$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i\right\} \ge p_i \quad (i=\overline{1,m}),$$
$$X \ge 0 .$$

відповідає детермінований еквівалент

$$\min \; \mathrm{k(X)} = \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} \bar{\mathrm{c}}_{\mathrm{j}} x_j + \Phi^{-1}(p_0)\sqrt{\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{j=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{c}_{\mathrm{tj}} x_t x_j}$$

за умов

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_t\sum_j \nu_{it} x_t x_j + 2\sum_j \nu_{ij} x_j^2 + \theta_i^2} \le \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i=\overline{1,m}).$$

Остання задача являє собою задачу опуклого програмування. Для її розв’язування можна застосувати теорему Куна—Таккера або використати один з інших методів розв’язування задач нелінійного програмування.

Приклад 8.7. Фермер має можливість купити три види зерна та готувати з них різні суміші для виробництва свинини. У таблиці наведено дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби у поживних речовинах. Потреба у поживних речовинах розподілена рівномірно на вказаних інтервалах від мінімально можливого до максимального рівня $[\min_i;\max_i]$ по кожній i-й поживній речовині $(i=\overline{1,4})$.

№ з/п	Зерно	Поживні речовини				Ціна, грн
		Кормові одиниці, ц	Перетравний протеїн, кг	Лізин, кг	Кальцій, кг	
1	Ячмінь ц	1,15	8,5	0,41	45	45
2	Кукурудза ц	1,33	7,3	0,21	40	40
3	Горох ц	1,18	19,2	1,42	0,2	50
4	Потреба у споживчих речовинах					
	а) максимальна max_i	106	890	45	12	
	б) мінімальна min_i	95,4	801	41	9	

Розробити економіко-математичну модель і знайти оптимальний розв'язок, який забезпечував би мінімальні витрати на закупівлю зерна за умов виконання мінімально допустимих потреб у всіх поживних речовинах з імовірністю $\gamma = 0{,}9$.

Розв'язування. Нехай x_1, x_2, x_3 —обсяги ячменя, кукурудзи і гороху відповідно, які необхідно закупити.

Критерій оптимальності

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов

$$P\{1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \geq a\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d\} \geq 0{,}9,$$

де a, b, c, d — випадкові рівномірно розподілені величини.

Цю систему ймовірнісних обмежень запишемо детермінованими еквівалентами, тобто

$$1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \geq a,$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b,$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c,$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 — значення випадкових величин, що задовольняють умови $P\{a \geq a_1\} \geq 0{,}9;$ і $P\{b \geq b_1\} \geq 0{,}9;$

$$P\{c \geq c_1\} \geq 0{,}9 \text{ і } P\{d \geq d_1\} \geq 0{,}9.$$

Визначимо параметри a_1, b_1, c_1, d_1. З теорії ймовірностей відомо, що

$$\frac{1}{106 - 95{,}4} \int_{95{,}4}^{a_1} d\varphi = 0{,}9 .$$

Отже, маємо $\frac{1}{10{,}6}\left(\varphi \Big|_{95{,}4}^{a_1}\right) = 0{,}9$, звідси $\frac{1}{10{,}6}(a_1 - 95{,}4) = 0{,}9$ або $a_1 - 95{,}4 = 9{,}54$, і тому $a_1 = 104{,}94$.

Відповідно, матимемо $b_1 = 881{,}1$, $c_1 = 44{,}6$ і $d_1 = 11{,}7$.

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі купівлі фермером зерна, яке буде використано для відгодівлі свиней:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов

$$\begin{gathered}1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \ge 104{,}94,\\ 8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \ge 881{,}1,\\ 0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \ge 44{,}6,\\ 0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \ge 11{,}7,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.\end{gathered}$$

Розв’язавши цю задачу симплексним методом, маємо $X_1 = 30{,}94$, $X_2 = 35{,}59$, $X_3 = 18{,}66$. Оптимальні витрати дорівнюють 3749 грн.

8.6. Двоетапні задачі стохастичного програмування

Недоліком розглянутих одноетапних задач стохастичного програмування є те, що в них лише фіксується факт можливих відхилень значень випадкових параметрів і усереднені розв’язки обирають за умови, що відхилення значень від середнього рівня в будь-яку сторону небажане (обмежується величина дисперсії параметрів в умовах або цільова функція — дисперсія мінімізується).

У більшості реальних економічних задач має значення не лише розмір відхилення, але й також і його напрям. Двоетапні задачі стохастичного програмування позбавлені вказаного недоліку.

Розглянемо задачу стохастичного програмування в такій постановці:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j\,, \tag{8.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j = b_i(\omega)\ (i = \overline{1,m})\,, \tag{8.11}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,n})\,. \tag{8.12}$$

Якщо обмеження залежно від значень випадкових параметрів і вектора X виконуються як $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \le b_i(\omega)$, тоді можливе існування надлишку (ресурсів, продукції тощо), яке позначимо Δ_i^+:

$$\Delta_i^+(X,\omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right).$$

При виконанні обмежень залежно від значень випадкових параметрів і вектора X у вигляді $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \ge b_i(\omega)$ виникає дефіцит, який позначимо як Δ_i^-:

$$\Delta_i^-(X,\omega) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega) \right).$$

Таким чином, якщо $\Delta_i^+(X,\omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right)$, то $\Delta_i^-(X,\omega) = 0$, якщо $\Delta_i^-(X,\omega) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega) \right)$, то $\Delta_i^+(X,\omega) = 0$.

Інакше кажучи,

$$\Delta_i^+(X,\omega) = \max\left[0, \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j\right)\right],$$

$$\Delta_i^-(X,\omega) = \max\left[0, \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\right)\right].$$

Очевидно, що система обмежень (8.11) задачі може бути подана в еквівалентній формі

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j + \Delta_i^+ - \Delta_i^- = b_i(\omega)\ (i = \overline{1,m}).$$

Припустимо також, що відомі величини α_i — питомі витрати на збереження надлишків $\alpha_i \geq 0$ і $\beta_i > 0$ $(i = \overline{1,m})$ — питомі витрати, що пов'язані з дефіцитом. Отже, можна визначити штрафну функцію для *i*-го обмеження за результатом його виконання. Позначимо її *S*, тоді

$$S_i = \max\left\{\alpha_i\Delta_i^+; -\beta_i\Delta_i^-\right\} = \begin{cases} \alpha_i\Delta_i^+, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) \leq b_i(\omega), \\ -\beta_i\Delta_i^-, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) \geq b_i(\omega) \end{cases}.$$

Далі доцільно розв'язувати задачу (10.10)—(10.12) у такій постановці:

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + M\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i\Delta_i^+(X,\omega) + \beta_i\Delta_i^-(X,\omega)\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + M\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \max\left\{0, \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j\right)\right\} + \right.$$

$$\left. + \beta_i \max\left\{0, \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\right)\right\}\right), \qquad (8.13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j = b_i(\omega)\ (i = \overline{1,m}), \qquad (8.14)$$

$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1,n}). \qquad (8.15)$$

Змінні Δ_i^+ і Δ_i^- можна розглядати як змінні, що коригують обмеження (8.11).

Отже, розв'язування задачі відбувається у два етапи: спочатку приймається фіксований план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ за апріорною інформацією про стан зовнішнього середовища, який і визначає реалізацію випадкових параметрів. Значення вектора *X* не задовольняє обмежень задачі для кожного $\omega \in \Omega$.

На другому етапі, після спостереження над зовнішнім середовищем і отримання точного значення випадкових параметрів ω, знаходять значення змінних Δ_i^+ і Δ_i^-, що ліквідують відхилення, які виникли за попереднім планом *X*. Витрати на коригування початкового плану визначаються, як

$$\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i\Delta_i^+ + \beta_i\Delta_i^-).$$

Важливо прийняти такий план, який би вимагав мінімальних витрат не лише на реалізацію, а також і на його коригування.

Коригування планів у процесі їх реалізації є цілком природним у разі створення планів для реальних економічних процесів. Необхідність коригування плану обумовлена не недоліками планування, а проблемою прийняття рішень в умовах невизначеності.

У рамках детермінованих моделей неможливо об'єднати два етапи — прийняття плану і його коригування. Перехід від детермінованих моделей до стохастичних, які використовують випадкові величини, що саме і викликають потребу у коригуванні, дозволяє одержати математичні моделі, що об'єднують згадані вище два етапи планування. Отже, у результаті розв'язування двоетапних стохастичних задач отримують плани, що є стійкими в умовах невизначеності, мінімізують загальні витрати на реалізацію і коригування плану або середній загальний ефект від попереднього плану і його змінювання.

У моделях двоетапного стохастичного програмування відображаються найбільш характерні особливості планування в умовах невизначеності:

1) імовірнісний характер початкової інформації;

2) коригування попереднього обраного плану мірою уточнення інформації;

3) вибір попереднього плану з урахуванням його майбутнього коригування.

Модель (8.13)—(8.15) — найпростіша двоетапна модель стохастичного програмування. В загальному випадку план-коригування вводиться до системи обмежень з допомогою матриці коригування загального вигляду, елементи якої можуть залежати від ω, тобто розглядається система нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j + \sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\omega)y_k + b_i(\omega) \ge 0 \ \ (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}), \ y_k \ge 0 \ (k = \overline{1,r}),$$

або у векторно-матричній формі

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \ge 0, \tag{8.16}$$

$$X \ge 0, \ Y \ge 0. \tag{8.17}$$

Попередній план X приймається до спостережень над ω. Коли ω стає відомим, обирається план-коригування Y у такий спосіб, щоб виконувались співвідношення (8.16), (8.17). При цьому ефект від плану-коригування дорівнює

$$\sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\omega)y_k. \tag{8.18}$$

Оскільки з кожним планом-коригуванням Y пов'язано певний ефект, то за певного X і спостереженого ω його краще за все вибирати з умови максимізації (8.18) за обмежень (8.16), (8.17).

Позначимо такий план через $Y(X,\omega)$ і назвемо його оптимальним коригуванням плану X за зовнішніх умов ω. Можна припустити, що $Y(X,\omega)$ існує за кожного X і ω, в іншому разі до (8.16) можливо ввести штучні змінні Y^- і одночасно в (8.17) з досить великим штрафом (прийом введення штучних змінних детально описано в розд. 2).

Сподіваний ефект від плану-коригування дорівнює

$$M\left(\sum_{k=1}^{r} d_k(\omega)y_k(X,\omega)\right).$$

Задача полягає у пошуку плану X, який максимізує математичне сподівання ефекту від плану з урахування його майбутнього коригування:

$$F(X) = \overline{C}(\omega)X + M\left(\sum_{k=1}^{r} d_k(\omega)y_k(X,\omega)\right) \tag{8.19}$$

за умов

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \ge 0, \tag{8.20}$$

$$X \ge 0, \ Y \ge 0. \tag{8.21}$$

Іноді нелінійну задачу (8.19) — (8.21) зручно формулювати дещо в іншому вигляді, а саме — знайти такий детермінований вектор X і такий $Y(\omega)$, щоб

$$max\, F(X) = \overline{C}(\omega)X + M\big(d(\omega), Y(\omega)\big) \tag{8.22}$$

за обмежень

$$A(\omega)X + D(\omega)Y(\omega) + b(\omega) \ge 0, \tag{8.23}$$

$$X \ge 0, \ Y(\omega) \ge 0. \tag{8.24}$$

У даній постановці двоетапна задача зводиться до одноетапної. Одночасно знаходимо оптимальний план X і його оптимальне коригування $Y(\omega)$. Задача (8.22)—(8.24) на відміну від (8.19)—(8.21) — лінійна, однак якщо в задачі (8.19)—(8.21) розв'язком є n-вимірний вектор X, для пошуку якого можна застосувати чисельні методи, то в задачі (8.22)—(8.24) невідомими є $(X, Y(\omega))$ і отримати для розв'язування задачі чисельні методи, що практично реалізуються, імовірно лише у випадках, коли Ω — скінченна множина з невеликою кількістю елементів.

Приклад 8.8. Розглянемо в загальному вигляді найпростішу стохастичну задачу визначення оптимального плану виробництва.

Необхідно спланувати виробництво однорідної продукції, попит на яку випадковий.

Розв'язування. Позначимо через X обсяги виробництва продукції, через ω — попит на неї, через C — витрати на виробництво одиниці продукції.

Оскільки попит на продукцію випадковий, то за будь-яких X можливо або перевиробництво продукції, або її дефіцит. Позначимо надлишок продукції через $Y^+(X,\omega)$, дефіцит — через $Y^-(X,\omega)$, питомі витрати, що пов'язані зі збереженням надлишку продукції та компенсації дефіциту, відповідно, — через D^+ і D^-. Задача полягає у пошуку X, що мінімізує математичне сподівання витрат, які пов'язані з виробництвом, надлишком і дефіцитом продукції.

Математична модель задачі матиме вигляд

$$\min F(X) = CX + M\left(D^+Y^+(X,\omega) + D^-Y^-(X,\omega)\right),$$

де

$$Y^+(X,\omega) = \max\{0, X-\omega\},$$

$$Y^-(X,\omega) = \max\{0, \omega - X\},\ X \geq 0.$$

Очевидно, що коли розв'язок обрати за середнім значенням попиту $\overline{\omega}$, то при $D^+ > C$ і $D^- > C$ (що, як правило, виконується) дістанемо тривіальну відповідь $X = \omega$.

Приклад 8.9. Потрібно перевезти однорідну продукцію від двох постачальників трьом споживачам. Обсяг продукції першого постачальника $a_1 = 340$ од., обсяг продукції другого постачальника $a_2 = 560$ од. Попит на продукцію для кожного споживача є випадковим і відомий з відповідними ймовірностями.

Таблиця 8.5

Попит першого споживача на продукцію b_1, од.	Імовірність
100	0,05
175	0,2
200	0,6
300	0,1
340	0,05

Таблиця 8.6

Попит другого споживача на продукцію b_2, од.	Імовірність
250	0,05
290	0,25
300	0,4
320	0,2
360	0,1

Таблиця 8.7

Попит третього споживача на продукцію b_3, од.	Імовірність
290	0,1
300	0,3
400	0,3
590	0,2
600	0,1

Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до кожного споживача, що наведені в табл. 8.8 в ум. од.

Таблиця 8.8

Постачальники	Споживачі		
	перший	другий	третій
Перший	30	37	28
Другий	32	26	30

Якщо попит на продукцію буде більшим від її наявності, тоді необхідно буде сплатити штраф за недопостачання кожної одиниці продукції першому, другому і третьому споживачам у розмірі 105, 169, 86 ум. од. відповідно; а якщо попит буде меншим, тоді потрібно буде зберігати надлишки, що вимагає витрат на одиницю продукції 40, 45, 30 ум. од. відповідно.

Слід визначити обсяги перевезень продукції від постачальників до споживачів, які забезпечили б за заданих умов мінімальні витрати на постачання і зберігання продукції, а також на штрафи за недопостачання.

Розв'язування. Задача належить до транспортного типу. Треба перевірити умову існування розв'язку транспортної задачі. Оскільки потреби споживачів є випадковими величинами, визначимо спочатку математичне сподівання попиту кожного споживача:

$$M(b_1) = 100 \cdot 0{,}05 + 175 \cdot 0{,}2 + 200 \cdot 0{,}6 + 300 \cdot 0{,}1 + 340 \cdot 0{,}05 = 207,$$
$$M(b_2) = 250 \cdot 0{,}05 + 290 \cdot 0{,}25 + 300 \cdot 0{,}4 + 320 \cdot 0{,}2 + 360 \cdot 0{,}1 = 305,$$
$$M(b_3) = 290 \cdot 0{,}1 + 300 \cdot 0{,}3 + 400 \cdot 0{,}3 + 590 \cdot 0{,}2 + 600 \cdot 0{,}1 = 417.$$

Загальний обсяг попиту на продукцію становитиме $\sum_{j=1}^{3} M(b_j) = 207 + 305 + 417 = 929$; пропозиція $\sum_{i=1}^{2} a_i = 340 + 560 = 900$ од.

Порівняємо кількість продукції в постачальників і сподіваний попит:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i < \sum_{j=1}^{3} M(b_j).$$

Отже, виникає незадоволений попит $\sum_{j=1}^{3} M(b_j) - \sum_{i=1}^{2} a_i = 929 - 900 = 29$ од.

Позначимо x_{ij} — обсяги перевезень продукції від i-го постачальника до j-го споживача, а невідомі величини, що характеризують обсяги недопостачання і надлишки, відповідно векторами:

$$Y^- = (y_1^-, y_2^-, y_3^-),$$
$$Y^+ = (y_1^+, y_2^+, y_3^+).$$

Тоді математична модель двоетапної здачі стохастичного програмування зведена до задачі лінійного програмування матиме вигляд (10.22)—(10.24):

$$min\, F = 30x_{11} + 37x_{12} + 28x_{13} + 32x_{21} + 26x_{22} + 30x_{23} +$$
$$105y_1^- + 169y_2^- + 86y_3^- + 40y_1^+ + 45y_2^+ + 36y_3^+$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 340, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 560, \\ x_{11} + x_{21} + y_1^+ - y_1^- = 207, \\ x_{12} + x_{22} + y_2^+ - y_2^- = 305, \\ x_{13} + x_{23} + y_3^+ - y_3^- = 417. \end{cases}$$
$$x_{ij} \ge 0,\ y_j^+ \ge 0,\ y_j^- \ge 0,\ i = 1{,}2;" = 1{,}2{,}3.$$

Оптимальний план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 340 \\ 207 & 353 & 0 \end{pmatrix},$$

причому план-коригування $Y^+ = (0 \quad 0 \quad 77)$, $Y^- = (0 \quad 48 \quad 0)$. Мінімальні витрати дорівнюють $F = 35744$ ум. од.

Стислі висновки

Одним із способів урахування недетермінованої інформації є застосування методів стохастичного програмування.

Головною ціллю використання стохастичних моделей і методів оптимального планування є врахування всього діапазону можливих значень параметрів, що вивчаються, та ймовірнісного характеру використаної інформації.

Причини ймовірнісного характеру вихідної інформації для економіко-математичних моделей відомі: наявність випадкових помилок у процесі збору даних, випадковість економічних процесів, вплив погодних умов на деякі галузі матеріального виробництва. Вивчення, а також практичне застосування стохастичних моделей, дозволяє не лише підвищити наукову обґрунтованість і точність планових розрахунків, але й розглянути ряд цікавих задач, розв’язування яких у рамках детермінованих моделей неможливе.

Однією з важливих переваг, що дає використання методів і моделей стохастичного програмування, є можливість пошуку оперативних та перспективних планів розвитку системи, що досліджується, а також визначення планів, які можна коригувати, причому сумарні витрати на реалізацію плану і його подальше коригування будуть мінімальні.

Необхідно наголосити, що більшість практично цікавих моделей стохастичного програмування має ряд особливостей, які не дозволяють застосовувати для них традиційні методи нелінійного програмування. Тому останнім часом інтенсивно розвиваються прямі методи стохастичного програмування, з допомогою яких стало можливим розв’язування схожих задач.

Серед спеціалізованої літератури, присвяченої стохастичному програмуванню, слід звернути увагу на праці Ю. М. Єрмольєва та ін. [7—9].

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Сутність задач стохастичного програмування.
2. За якими ознаками можлива класифікація задач стохастичного програмування?
3. Яка стохастична задача називається одноетапною?
4. Яка стохастична задача називається двоетапною?
5. Методи розв’язування одноетапних стохастичних задач.
6. Методи розв’язування двоетапних стохастичних задач.
7. Як звести стохастичну задачу вигляду

$$M(C(\omega)X) \to \max,$$
$$A(\omega) \le B(\omega),$$
$$X \ge 0, \omega \in \Omega$$

до детермінованої задачі?

8. Розв’язати такі задачі.

Задача 8.1. Для виготовлення виробів двох видів ($j = 1,2$) можна використати обладнання двох груп ($i = 1,2$). Затрати часу a_{ij} цими групами обладнання на виготовлення продукції є випадковими величинами; собівартість одного виробу b_{ij} ($i = 1,2$; $j = 1,2$) — також випадкова величина.

Нехай щільність розподілу випадкових величин a_{ij} і b_{ij} відома; a_{ij} розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням $\overline{a}_{ij}$ і середньоквадратичним відхиленням σ_{ij}, а b_{ij} розподілені рівномірно в інтервалі (b_{ij}, γ_{ij}).

Нехай N_1 і N_2 — плани випуску виробів першого і другого виду (що обумовлено контрактом): $N_1 = 100$ шт., $N_2 = 200$ шт.

Визначити оптимальний план роботи обладнання, за якого мінімізуються сподівані сумарні виробничі витрати на випуск виробів, якщо ризик (імовірність) перевищення фонду часу T у разі виконання контрактів становить не більш як 0,10, а ризик невиконання контракту не перевищує 0,05.

Побудувати математичну модель задачі і розв'язати її для даних, наведених у таблиці.

Група обладнання i	Питомі затрати часу, люд.-год / шт.				Питома собівартість виробу, грн				Фонд часу i-го обладнання, год
	$j = 1$		$j = 2$		$j = 1$		$j = 2$		
	a_{i1}	σ_{i1}	a_{i2}	σ_{i2}	δ_{i1}	γ_{i1}	δ_{i2}	γ_{i2}	
1	0,2	0,2	0,3	0,3	2	4	1	2	50
2	0,1	0,2	0,1	0,2	3	6	2	8	65

Задача 8.2. Фірма виробляє товар, попит на який наперед невідомий. Навіть за відомих цін і витрат на виробництво очевидний ризик або неодержання прибутку, якщо обсяг виробництва менший від попиту, або в іншому разі — невиправданих витрат.

Нехай ξ — випадковий попит на продукцію; C — ціна на реалізовану продукцію; g — питомі витрати на її виробництво; x — шуканий обсяг виробництва продукції.

Сформулювати модель балансування попиту і пропозиції з урахуванням можливості часткової адаптації виробництва до попиту.

Задача 8.3. Деталі ($j = A$, B, C) можна обробляти на трьох верстатах ($i = 1, 2, 3$). Припустимо, що норми затрат часу на обробку j-ї деталі на i-му верстаті випадкові і розподілені за рівномірним законом в інтервалі $\lfloor \delta_{ij}, \gamma_{ij} \rfloor$, а ціна j-ї деталі C_j — також випадкова величина, що розподілена за нормальним законом із середніми $\overline{C}_j$ і середньоквадратичними відхиленнями δ_{ij}. Значення δ_{ij} і γ_{ij}, $\overline{C}_j$ і σ_j наведено в таблиці.

Основні терміни і поняття

- Детерміновані коефіцієнти
- Стохастичні коефіцієнти
- Ймовірність
- Математичне сподівання
- Дисперсія
- Одноетапна задача
- Двоетапна задача
- Зведення до задач лінійної оптимізації

Розділ 9

ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

Вивчивши матеріал даної теми, будете ЗНАТИ:

✓ особливості економічної постановки задач динамічного програмування;
✓ метод рекурентних співвідношень у задачах розподілу капіталовкладень між двома підприємствами на n років;
✓ принцип оптимальності у задачах розподілу капіталовкладень при багатокроковому процесі прийняття рішень;
✓ методи розв'язування задач динамічного програмування;

а також УМІТИ:

- формулювати математично економічні задачі перспективного планування як задачі оптимального динамічного програмування;
- застосовувати метод рекурентних співвідношень при оптимізації глобальної цілі;
- застосовувати алгоритм багатокрокового процесу прийняття рішень задач динамічного програмування.

9.1. Економічна сутність задач динамічного програмування

Усі економічні процеси та явища суть є динамічними, оскільки вони функціонують і розвиваються не тільки у просторі, але й у часі.Так народне господарство в цілому, його галузі, регіони чи окремі підприємства для стабільного розвитку та функціонування мають розробляти стратегічні та тактичні плани. Стратегічні визначають параметри діяльності об'єкта протягом значного періоду часу, отже, мають розроблятися на основі саме динамічних моделей, для знаходження розв'язків яких використовуються методи динамічного програмування.

Динамічне програмування являє собою математичний апарат, що дозволяє здійснювати планування багатокрокових керованих процесів, а також процесів, які розвиваються у часі.

Таким чином, динамічне програмування не є окремим методом розв'язування задач, а скоріше — це єдина теорія, що поєднує ряд однотипних ідей і прийомів, які використовуються для розв'язування досить різних за змістом задач.

До задач динамічного програмування належать такі, що пов'язані з оптимальним розподілом капіталовкладень, розподілом продукції між різними регіонами, визначенням найкоротшого шляху завезення товарів споживачам, задачі заміни устаткування, оптимального управління запасами та ін.

Усі згадані економічні процеси можна подати такими, що складені з кількох етапів (кроків), на кожному з яких здійснюється вплив на розвиток усього процесу. Тому при плануванні багатоетапних процесів, прийняття рішень на кожному з етапів має враховувати попередні зміни та бути підпорядковане кінцевому результату. Динамічне програмування дає можливість прийняти ряд послідовних рішень, що забезпечує оптимальність розвитку процесу в цілому.

Сума оптимальних планів на окремих відрізках планового часу не завжди є оптимальною на всьому інтервалі планування. Наприклад, недостатньо визначити оптимальний план виробництва на місяць, цілком імовірно, що в наступні місяці виробництво за тим самим планом може стати неоптимальним, так як у його розробці не враховувались можливості подальшого розвитку. Доцільніше визначати оптимальні плани на кожен місяць з урахуванням змін у попередніх періодах, лише тоді річний оптимальний план виробництва буде сумарним результатом оптимальних рішень, що приймались для кожного місяця.

Поставимо задачу динамічного програмування в загальному вигляді.

Нехай аналізується деякий керований процес, подання якого допускає декомпозицію на послідовні етапи (кроки), кількість яких n задана. Ефективність всього процесу Z може бути подана як сума ефективностей $Z_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ окремих кроків, тобто

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j ,$$

що має назву аддитивного критерію (або як добуток ефективностей $Z_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ окремих кроків у вигляді $Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j$, що має назву мультиплікативного критерію).

З кожним етапом (кроком) задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого *крокового управління* $x_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всієї операції.

Розв'язування задачі динамічного програмування полягає в пошуку такого управління $X = \left(x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n\right)$ процесом, яке максимізує загальну ефективність: $\max Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j$. (*max* $Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j$).

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління X^*, що складається з сукупності оптимальних покрокових управлінь $X^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ \dots\ x_n^*\right)$ і дозволяє досягнути максимальної ефективності

$$Z^* = \max_{x \in X} \left\{Z\left(x\right)\right\}.$$

9.2. Задача про розподіл капіталовкладень між двома підприємствами на *n* років

Розглянемо задачу динамічного програмування на прикладі розподілу капіталовкладень.

Припустимо, що існує певна виробнича система, що складається з двох підприємств. Нехай плановий період складається з n інтервалів-частин (наприклад, років) і протягом даного періоду слід використати суму коштів b, що має бути розподілена між двома підприємствами. Відомі прибутки, що їх приносять вкладення коштів у перше підприємство — вкладення обсягом x дає прибуток $g(x)$, а друге підприємство — прибуток з цієї ж суми $h(x)$.

Необхідно розподілити кошти на період у n років у такий спосіб, щоб досягти максимального прибутку за весь плановий період.

Легко сформулювати задачу, коли плановий період складається з одного року (однокрокова задача).

Якщо в перше підприємство здійснились вкладення обсягом x, тоді сума вкладених у друге підприємство коштів становитиме $b - x = y$ і дасть прибуток $h(y)$.

У такому випадку маємо однокрокову задачу

$$\max Z = g\left(x\right) + h\left(y\right)$$

за умов

$$x + y = b,$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0,$$

Введемо позначення

$Z = Z_1$, $b = b_1$, $x = x_1$, $y = b_1 - x_1$, тоді задача матиме вигляд

$$\max Z_1 = g(x_1) + h(b_1 - x_1), \tag{9.1}$$

$$0 \le x_1 \le b_1. \tag{9.2}$$

Далі розглянемо задачу оптимального використання капітальних вкладень, яка складається з двох періодів (етапів).

Так як прибуток утворюється в результаті випуску та реалізації продукції, що пов'язано з певними виробничими витратами, то на початок другого періоду початкова сума x_1 зменшиться до величини $x_2 = \alpha x_1$, де $0 \le \alpha \le 1$, а сума $(b_1 - x_1)$ до величини $\beta(b_1 - x_1)$, де $0 \le \beta \le 1$. Щоб визначити найбільший прибуток, який можливо отримати від сумарного залишку $b_2 = \alpha x_1 + \beta(b_1 - x_1)$ протягом другого етапу, слід розв'язати задачу математичного програмування, аналогічну до задачі (9.1)—(9.2), тобто

$$\max Z_2 = g(x_2) + h(b_2 - x_2), \tag{9.3}$$

$$0 \le x_2 \le b_2. \tag{9.4}$$

Поставимо тепер задачу оптимального поточного планування розподілом капіталовкладень по всіх *n* інтервалах періоду, причому принцип розподілу вкладень на кожному з періодів полягає у пошуку оптимального використання тієї кількості коштів, що залишається на кінець попереднього періоду. Критерій оптимальності не змінюється і полягає в максимізації прибутку за весь період.

Тоді для *k*-го етапу (періоду) маємо b_k — залишок коштів після використання в попередньому періоді. Визначаємо оптимальну суму коштів x_k, що доцільно вкладати в перше підприємство в поточному періоді, розв'язуючи таку задачу:

$$\max Z_k = g(x_k) + h(b_k - x_k), \tag{9.5}$$

$$0 \le x_k \le b_k. \tag{9.6}$$

Нагадаємо, що критерієм оптимальності є максимізація загального прибутку за всі *n* періодів, тому необхідно знайти максимальне значення функціонала, що складається з максимальних значень прибутків кожного окремого періоду, тобто загальна задача матиме вигляд

$$\max Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{k=1}^{n} \left[g(x_k) + h(b_k - x_k) \right] \tag{9.7}$$

за умов

$$0 \le x_k \le b_k, \tag{9.8}$$

$$(k = \overline{1,n}),\ b_k = \alpha x_{k-1} + \beta(b_{k-1} - x_{k-1}),\ (k = \overline{2,n}).$$

Цільова функція (9.7) є функцією *n* змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і залежить від початкового параметру b_1.

Розв'язування задачі (9.7)—(9.8) розглянутими раніше однокроковими методами може виявитися неможливим. Проте міркування, які привели до формулювання задачі (9.7)—(9.8), породжують ідею побудови алгоритму поетапного розв'язування динамічних задач.

9.2.1. Метод рекурентних співвідношень. Продовжимо розгляд задачі (9.7)—(9.8). Позначимо $R_n(b)$ як максимальний прибуток, що досягнуто внаслідок виконання *n* кроків, тоді

$R_n(b) = \max\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_n} Z(b, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де змінні $x_j\ (j = \overline{1,n})$ задовольняють обмеження (9.8).

Як уже зазначалось, при $n = 1$ маємо однокрокову задачу управління, а прибуток за один рік вкладення коштів у два підприємства обчислюється як:

$$R_1(b) = \max_{0 \le x \le b} \left[g(x) + h(b - x) \right].$$

Розглянемо період з двох років. До початку другого періоду сумарний залишок коштів становить $b_2 = \alpha x + \beta(b - x)$. Використаємо введені вище позначення $b = b_1$, $x = x_1$.

Найбільший прибуток, який можна отримати на другому етапі дорівнює

$$R_2(b) = \max_{\substack{0 \le x_1 \le b_1, \\ 0 \le x_2 \le b_2}} \left[g(x_1) + h(b_1 - x_1) + g(x_2) + h(b_2 - x_2) \right].$$

Розглянемо детально зв'язок між величинами $R_1(b)$ і $R_2(b)$, тобто максимальний прибуток для однокрокової задачі, і максимальний прибуток, що може бути отриманий за два кроки.

У разі довільно визначеного на першому кроці значення x, тоді максимальний прибуток на другому кроці визначатиметься як

$$R_1(b_2)=\max_{0\le x_2\le b_2}\left[g(x_2)+h(b_2-x_2)\right]=R_1(\alpha x+\beta(b-x)).$$

Позначимо тепер $R_2(b)$ — найбільший прибуток, що може бути отриманий від початкової суми b за два періоди. Очевидно, це значення буде розраховуватись як максимальна сума доходів першого та другого періодів:

$$R_2(b)=\max_{0\le x\le b}\left(Z_1+Z_2\right)=\max_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)+R_1(\alpha x+\beta(b-x))\right]. \quad (9.9)$$

Формула (9.9) — рекурентне співвідношення, що пов'язує величину прибутку, яке досягнуто лише за другий інтервал планового періоду і дорівнює $R_1\left[\alpha x^*+\beta(b-x^*)\right]$; і прибуток за обидва (перший і другий) інтервали планового періоду, який дорівнює $R_2(b)$, де x^* — максимальне значення функції Z_1+Z_2.

Міркуючи аналогічно, доходимо до співвідношення, що визначає загальний прибуток, який досягається на n інтервалах:

$$R_n(b)=\max_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)+R_{n-1}(\alpha x+\beta(b-x))\right] \quad (n=2,3,\ldots), \quad (9.10)$$

де $R_1(b)=\max_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)\right]$.

Очевидно, що $R_{n-1}(\alpha x+\beta(b-x))$ — максимальний прибуток від $n-1$ останніх років при розподілі на першому кроці ресурсів у відношенні: першому підприємству — x, другому — $b-x$.

Визначивши $R_1(b)=\max_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)\right]$ з (9.10), можемо знайти $R_2(b)$ і, користуючись ним, обчислимо знову з (9.10) $R_3(b)$ і т. д., причому на кожному кроці матимемо як значення $R_k(x_k)$, так і $x_k(b_k)$.

Отже, розв'язування задачі полягає в обчисленні послідовностей функцій $R_k(x_k)$ і $x_k(b_k)$ для всіх $x_k\ge 0, k=\overline{1,n}$.

Наведемо найпростішу задачу динамічного програмування.

9.3. Задача про розподіл капіталовкладень між підприємствами

Приклад 9.1. Виробнича система складається з чотирьох філіалів. За умови здійснення реконструкції обладнання на кожному філіалі можна досягти певного приросту прибутку. Фірма виділяє на додаткові капітальні вкладення 200 тис. ум. од. (для спрощення розрахунків розглянемо здійснення додаткових вкладень сумами по 50, 100, 150 і 200 тис. ум. од.).

Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між філіалами для максимізації сумарного прибутку від усіх чотирьох філіалів за умов, що відомі прирости прибутку для кожного з філіалів фірми.

Капіталовкладення, тис. ум. од.	Приріст прибутку по філіалах, тис. ум. од.			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Розв'язування. У даному прикладі етапами задачі буде не час, як у попередніх викладках, а розподіл коштів по філіалах, отже, маємо чотириетапну задачу динамічного програмування. Відповідно до введених раніше позначень візьмемо $g_i(x)$ – приріст прибутку на i-му підприємстві при капіталовкладеннях x тис. ум. од. Умова задачі матиме вигляд

Приріст випуску продукції по філіалах, тис. ум. од.			
$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
25	30	36	28
60	70	64	56
100	90	95	110
140	122	130	142

І етап. Найпростіший спосіб розподілу коштів, з якого починаємо розв’язування задачі, — вкладення коштів лише у перший філіал. Якщо маємо в розпорядженні суму коштів $b_1 = 50$, тоді ефективність вкладення даної суми відповідає прибутку, що його буде отримано від інвестування в перший філіал, 50 тис. ум. од. Ефективність І етапу позначається $R_1(b)$:

$$R_1(b_1 = 50) = \max_{0 \le x_1 \le b_1}\left[g(x_1)\right] = \max_{\substack{x_1=0,\\ x_1=50}}\left[g(0), g(50)\right] = g(50) = 25.$$

Аналогічно розглядаємо випадок, коли у розпорядженні маємо суму $b_2 = 100$ тис. ум. од., тоді з наявних коштів вкладати можна суму розміру x_2, що набуває такі значення або $x_2 = 0$, або $x_2 = 50$, або $x_2 = 100$ тис. ум. од., очевидно, що з трьох названих можливих варіантів найбільшу ефективність маємо при вкладенні коштів у сумі 100 тис. ум. од. Отже, фіксуємо найбільшу ефективність на другому кроці І етапу — $R_1(b_2 = 100) = 60$ тис. ум. од. і т. д. $R_1(b_3 = 150) = 100$.

Узагальнимо всі випадки першого етапу у вигляді таблиці:

b	$R_1(b)$
50	25
100	60
150	100
200	140

ІІ етап. На кожному етапі необхідно порівняти ефективність прийнятого рішення на попередньому та поточному етапах. Отже, тепер розглянемо розподіл коштів одночасно між двома філіалами фірми, порівнюючи отриманий прибуток з ефективністю попереднього етапу. Скористаємося формулою для загального випадку

$$R(b) = \max_{0 \le x \le b}\left[g\ (x\ ) + h\ (b - x)\right].$$

Для нашого прикладу величина $g(x)$ — ефективність, що дають вкладення на попередньому етапі (у даному прикладі — у перший філіал фірми), яка була розрахована на першому кроці і позначалась $R_1(b)$, а величина $h(b-x)$ — прибуток, що дає другий філіал від залишку суми. Для введених у даному прикладі позначень формула набуває вигляду:

$$R_2(b) = \max_{0 \le x \le b}\left[g_1(x) + g_2(b - x)\right] = \max_{0 \le x \le b}\left[g_2(x) + R_1(b - x)\right].$$

Знову спочатку припускаємо, що розподіляється сума $b_1 = 50$, тоді можливі два варіанти вкладення: $x_1 = 0$ (вкладаємо кошти лише в другий філіал) або $x_1 = 50$ (вкладаємо кошти лише в перший філіал), тоді

$$R_2(b_1 = 50) = \max_{0 \le x_1 \le 50}\left[g_2(x_1) + R_1(b_1 - x_1)\right] = \max\left[g_2(0) + R_1(50); g_2(50) + R_1(0)\right];$$

$$R_2(b_1 = 50) = \max\left[0 + 25; 30 + 0\right] = 30.$$

Для наочності зручно подати проміжні розрахунки у вигляді таблиці:

x_1	$b_1 - x_1$	$g_2(x_1)$	$R_1(b_1 - x_1)$	$R_2(b_1)$
0	50	0	25	0+25=25
050	0	30	0	30+0=30 ←

Значення виділеного стрілкою елементу фіксує найбільший із можливих прибутків від операції розподілу вкладення 50 тис. ум. од. одночасно в перший і другий філіали фірми.

Таким чином, розраховано елемент таблиці виду 1а для випадку $b_1 = 50$.

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	
150	100	
200	140	

Далі розглядаються можливі варіанти розподілу коштів $b_2 = 100$, тоді вкладати лише в другий філіал можна суму $x_2 \le b_2$, що набуватиме такі значення: $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од., отже, маємо

x_2	$b_2 - x_2$	$g_2(x_2)$	$R_1(b_2 - x_2)$	$R_2(b_2)$
0	100	0	60	0+60=60
50	50	30	25	30+25=55
0100	0	70	0	70+0=70 ←

З даної таблиці фіксуємо, що при вкладенні 100 тис. ум. од. з усіх варіантів найбільший прибуток буде 70 тис. ум. од. Отже, таблиця 1а поповнюється таким елементом:

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	
200	140	

Аналогічно проводимо обчислення для $b_3 = 150$, $b_4 = 200$ тис. ум. од.

Нехай $\underline{b_3 = 150}$ (розглядається чотири можливих варіанти розподілу):

x_3	$b_3 - x_3$	$g_2(x_3)$	$R_1(b_3 - x_3)$	$R_2(b_3)$
00	150	0	100	0+100=100 ←
50	100	30	60	30+60=90
100	50	70	25	70+25=95
150	0	90	0	90+0=90

Нехай $\underline{b_4 = 200}$ (розглядається п'ять можливих варіантів розподілу):

x_4	$b_4 - x_4$	$g_2(x_4)$	$R_1(b_4 - x_4)$	$R_2(b_4)$
00	200	0	140	0+140=140 ←
50	150	30	100	30+100=130
100	100	70	60	70+60=130
150	50	90	25	90+25=115
200	0	122	0	122+0=122

Внесемо всі розрахунки другого етапу до табл. 1а:

Таблиця 1б

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	100
200	140	140

ІІІ етап. Знову необхідно порівняти ефективності попереднього та поточного етапів. Отже, використовуємо дані, що описують прибуток, який отриманий від вкладення одразу в перший і другий філіали одночасно (стовпчик $R_2(b)$) і прибуток від вкладення одночасно в три філіали, знову користуємося формулою (9.10) у вигляді

$$R_3(b) = \max_{0 \le x \le b}\left[g_3(x) + R_2(b-x)\right].$$

Аналогічно попереднім випадкам спочатку $b_1 = 50$, тоді $x_1 = 0$ або $x_1 = 50$ тис. ум. од., маємо

x_1	$b_1 - x_1$	$g_3(x_1)$	$R_2(b_1 - x_1)$	$R_3(b_1)$
0	50	0	30	0+30=30
50	0	36	0	36+0=36 ←

$$R_3(b_1 = 50) = 36.$$

Другий крок $b_2 = 100$, тоді x_2 може набуває такі значення $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од., маємо

x_2	$b_2 - x_2$	$g_3(x_2)$	$R_2(b_2 - x_2)$	$R_3(b_2)$
00	100	0	70	0+70=70 ←
50	50	36	30	36+30=66
100	0	64	0	64+0=64

$$R_3(b_2 = 100) = 70.$$

При $b_3 = 150$ величина x_3 може набирати чотири значення $x_3 = 0$, $x_3 = 50$, $x_3 = 100$, $x_3 = 150$ тис. ум. од., які визначають частину загальної суми вкладення коштів лише в третє підприємство, відповідні чотири випадки $b_3 - x_3$=150, $b_3 - x_3$=100, $b_3 - x_3$=50, $b_3 - x_3$=0 — лишок коштів, що необхідно вкладати в перші два філіали. Отже, маємо

x_3	$b_3 - x_3$	$g_3(x_3)$	$R_2(b_3 - x_3)$	$R_3(b_3)$
00	150	0	100	0+100=100 ←
50	100	36	70	36+70=106
100	50	64	30	64+30=94
150	0	95	0	95+0=95

Таким чином, $R_3(b_3) = 106$.

Останнє значення при $b_4 = 200$

x_4	$b_4 - x_4$	$g_3(x_4)$	$R_2(b_4 - x_4)$	$R_3(b_4)$
00	200	0	140	0+140=140 ←
50	150	36	100	36+100=136
100	100	64	70	64+70=134
150	50	95	30	95+30=125

$R_3(b_4) = 140$. Запишемо значення $R_3(b)$ у вигляді стовпчика табл. 1б.

Таблиця 1б

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$
50	25	30	36
100	60	70	70
150	100	100	106
200	140	140	140

Аналогічно проводяться обчислення для $R_4(b)$, які наводяться без коментарів.

$\underline{b_1 = 50}$

x_1	$b_1 - x_1$	$g_4(x_1)$	$R_3(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	36	0+36=36 ←
50	0	28	0	28+0=28

$R_4(b_1)$=36.

$\underline{b_2 = 100}$

x_2	$b_2 - x_2$	$g_4(x_2)$	$R_3(b_2 - x_2)$	$R_4(b_2)$
00	100	0	70	0+70=70 ←
50	50	28	36	28+36=64
100	0	56	0	56+0=56

$R_4(b_2)$=70.

$\underline{b_3 = 150}$

x_3	$b_3 - x_3$	$g_4(x_3)$	$R_3(b_3 - x_3)$	$R_4(b_3)$
00	150	0	106	0+106=106 ←
50	100	28	70	28+70=98
100	50	56	36	56+36=92
150	0	110	0	110+0=110

$R_4(b_3) = 110$

$\underline{b_4 = 200}$

x_4	$b_4 - x_4$	$g_4(x_4)$	$R_3(b_4 - x_4)$	$R_4(b_4)$
0	200	0	140	0+140=140
50	150	28	106	28+106=134
100	100	56	70	56+70=126
0150	50	110	36	110+36=146 ←
200	0	142	0	142+0=142

$R_4(b = 200 = b_4)$=146.

Остаточно маємо табл. 2.

Таблиця 2

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$	$R_4(b)$
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	134	146

З табл. 2. бачимо, що найбільший прибуток, який дадуть всі чотири філіали при вкладенні коштів у розмірі 200 тис. ум. од., становитиме 146 тис. ум. од. Повертаючись до останнього кроку розрахунків, бачимо, що дане значення таблиці було розраховане у такий спосіб:

x_4	$b_4 - x_4$	$g_4(x_4)$	$R_3(b_4 - x_4)$	$R_4(b_4)$
0	200	0	140	0+140=140
50	150	28	106	28+106=134
100	100	56	70	56+70=126
150	50	110	36	110+36=146 ←
200	0	142	0	142+0=142

і число 146 відповідає елементу

$$x_4 = 150\,,\ b_4 - x_4 = 50 \Rightarrow 110 + 36 = g_4(150) + R_2(50)\,.$$

Звідси маємо 150 тис. ум. од. Необхідно використати на четвертому філіалі і 50 тис. ум од. розподілити на три перші.

Знову повертаємося до елементів табл. 2. Використання 50 тис. ум. од. на трьох перших філіалах дає сумарний прибуток 36 тис. ум. од. (виділений елемент табл. 2). Це значення було розраховано на III етапі, крок перший $b = 50 = b_1$ таким чином:

x_1	$b_1 - x_1$	$g_3(x_1)$	$R_2(b_1 - x_1)$	$R_3(b_1)$
0	50	0	30	0+30=30
50	0	36	0	36+0=36 ←

Відповідно маємо $x_1 = 50$, $g_3(50)$ означає, що 50 тис. ум. од. виділяється третьому філіалу та $b_1 - x_1$=0, $R_2(0)$ — на перших двох філіалах кошти взагалі не використовуються.

Отже, оптимальний план задачі $X^*(x_1^* = 0; x_2^* = 0; x_3^* = 50; x_4^* = 150$ тис. ум. од.). При вказаному розподілі коштів між філіалами фірми максимальний прибуток становитиме 146 тис. ум. од.

9.4. Принцип оптимальності

З викладених у попередніх параграфах міркувань бачимо, що для прийняття оптимального рішення на *k*-му кроці багатокрокового процесу потрібна оптимальність рішень на всіх попередніх кроках цього процесу, а сукупність усіх рішень дає оптимальний розв'язок задачі лише в тому разі, коли на кожному кроці приймається оптимальне рішення, що залежить від параметра етапу b_k, визначеного на попередньому кроці.

Цей факт є основою методу динамічного програмування і становить так званий *принцип оптимальності Р. Беллмана*, який формулюється так.

Оптимальний розв'язок багатокрокової задачі $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ має ту властивість, що якими б не був стан системи b_i у результаті деякої кількості кроків, необхідно обирати управління x_{i+1}^* на найближчому кроці так, щоб воно в сукупності з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках приводило б до максимального виграшу на всіх останніх кроках, включаючи даний.

Доведемо справедливість такого твердження, міркуючи від супротивного. Нехай маємо задачу на максимізацію функції $Z=\sum_{j=1}^{n} z_j(x_j)$ і вектор $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ дає оптимальний план (стратегію, поведінку) *n*-крокового процесу (*n*-вимірної задачі) з початковим параметром стану *b*.

Принцип оптимальності еквівалентний твердженню, що вектор $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ повинен бути оптимальним планом $(n-1)$-крокового процесу $(n-1)$-вимірної задачі з початковим параметром стану b_{n-1}, що дорівнює $b-x_1^*$.

Припустимо протилежне: вектор $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ не є оптимальним планом відповідного процесу, а ним є план $(x_1', x_2', ..., x_n'')$, тоді дістанемо

$$\max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') > \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*),$$

але

$$\max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*) = \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*) <$$
$$< \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j' \ ) = \max_{x_1} \max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \max_{x_1,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j),$$

що суперечливо. Отже, принцип оптимальності доведено.

9.5. Багатокроковий процес прийняття рішень

Динамічний процес розбивається на сукупність послідовних етапів чи кроків. На кожному етапі оптимізується тільки один крок, а рішення, під впливом якого система переходить з поточного стану в новий, вибирається з урахуванням його наслідків у майбутньому і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі. Для останнього кроку приймається рішення, яке дає максимальний ефект, оскільки майбутнього для нього не існує. Тому оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця, тобто спочатку планується останній крок.

На базі відомої інформації про те, як закінчився попередній крок, для різних гіпотез щодо завершення передостаннього кроку вибирається управління на останньому. Таке управління називають *умовно оптимальним* і знаходять за припущенням, що попередній крок був завершений згідно з однією із можливих гіпотез.

Враховуючи сказане, дамо алгоритм розв’язування задач динамічного програмування.

1. Специфікація стану заданої керованої системи і множини параметрів, що описують цей стан. Стан системи обирається таким чином, щоб забезпечити зв’язок між послідовними етапами проходження процесу і мати змогу одержати допустиме рішення задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо, а крім того, приймати оптимальні рішення на наступних етапах без урахування впливу майбутніх рішень на ті, що були прийняті раніше.
2. Розбити процес (операцію) на етапи (кроки), які, як правило, відповідають часовим періодам при плануванні динамічних процесів, або окремим об’єктам (підприємствам видам продукції, устаткуванню тощо), при розробці рішень керування ними.
3. Сформулювати перелік управлінь x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження на них.
4. Визначити ефект, який забезпечує управління x_j на *j*-му кроці, якщо перед тим система була у стані *S*, у вигляді функції ефективності

$$\max Z = g(x) + h(b-x).$$

5. Визначити, як змінюється стан *S* системи під впливом управління x_j на *j*-му кроці, тобто здійснюється перехід до нового стану:

$$S' = \varphi_j(S, x_j).$$

6. Побудувати рекурентну залежність задачі динамічного програмування, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j(S)$, починаючи з *j*-го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}(S')$:

$$Z_j(S) = \max_{x_j}\{\ \}\ Z_j(S) = \max_{X_j}\{f_j(S, X_j) + Z_{i+1}(S, X_j)\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на *j*-му кроці $(X_j(S))$. Зауважимо, що у функції $Z_{j+1}(S)$ необхідно замість *S* врахувати змінений стан системи, тобто $S' = \varphi_j(S, X_j)$.

7. Використати умовну оптимізацію останнього *n*-го кроку, задаючись множиною станів *S*, з яких множина за один крок дійде до кінцевого стану. Умовний оптимальний ефект на *n*-му кроці обчислюється за формулою

$$Z_n(S) = \max_{X_n}\{f_n(S, X_n)\}..$$

Далі відшукуємо умовне оптимальне управління $X_n(S)$, завдяки якому цей максимум буде досягнуто.

8. Провести умовну оптимізацію $(n-1)$-го, $(m-2)$-го і так далі кроків за рекурентними залежностями (див. п. 6) і визначити для кожного кроку умовне оптимальне управління.

$$Z^x = Z_1(S_0)..$$

9. Провести безумовну оптимізацію управління у зворотному напрямі від початкового стану S_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління, на першому кроці $X_1^* = X_1(S)$, змінити стан системи за п. 5. Далі для цього нового стану знайти оптимальне управління на другому кроці X_2^*, і так далі до останнього етапу (кроку).

9.6. Приклади розв'язування задач динамічного програмування

Приклад 9.2. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного з підприємств розроблені інвестиційні проекти, які відображають прогнозовані сумарні витрати *C* і доходи *D*, пов'язані з реалізацією кожного проекту. Зміст цих проектів ілюструє таблиця:

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект передбачає відмовитися від розширення підприємства, а тому має нульові витрати і доходи. Розробити план інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язування. Спрощеним і найменш ефективним способом розв'язування таких задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв'язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про неприпустимі розв'язки, а також неможливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв'яжемо цю задачу за алгоритмом (методом) *зворотного прогону*. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підприємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програмування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженнями на загальний обсяг виділених коштів — 4 млн грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1—4;

x_2 — те саме на кроках 2—4;

x_3 — те саме на кроках 3 і 4;

x_4 — те саме на кроці 4;

k_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — обсяги інвестицій на i-му підприємстві $\left(k_i = 0, 1, 2, 3, 4\right)$;

k_i^* $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — оптимальні обсяги інвестицій на i-му підприємстві.

Рекурентне співвідношення для зворотного прогону від кроку 4-го до 1-го (від четвертого підприємства до першого) подається у вигляді

$$f_i^*\left(x_5\right)=0,$$

$$f_i^*\left(x_j k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i-C_i\left(k_i\right)\right)\right\}\left(i=\overline{1,4}\right),\ \ C_j\left(k_i\right)\le X_i,$$

де $f_i^*\left(x_i;k_i\right)$ — сумарна ефективність інвестицій з i-го кроку до останнього. Тут $f^*\left(x_5\right)=0$, оскільки п'ятого підприємства не існує.

Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

Етап 4.

$$f_4^*\left(x_j k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i-C_i\left(k_i\right)\right)\right\}.$$

Результати розрахунків подамо таблицею:

x_4	Дохід $f_4\left(x_4;k_4\right)=D_4\left(k_4\right)+f_5^*\left(x_5\right)$					Оптимальний розв'язок	
	$k_4=0$	$k_4=1$	$k_4=2$	$k_4=3$	$k_4=4$	$X_1=4,$	$k_1 = 0,1,2,3,4.$
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1
2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

Етап 3.

$$f_3^*\left(x_3\right)=\max_{k_3}\left\{D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)\right\}$$

за умов

$$C_3\left(k_3\right)\le X_3,\ k_3=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Результати розрахунків показано у таблиці:

x_3	Дохід $f_3\left(x_3;k_3\right)=D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)$				Оптимальний розв'язок	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$k_3=4$	$f_3^*\left(x_3\right)$	k_3^*
0	$0+f_4^*(0-0)=$ $=0+0=0$				0	0
1	$0+f_4^*(1-0)=$ $=0+2=2$				2	0
2	$0+f_4^*(2-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(2-2)=$ $=4+0=4$			8	0
3	$0+f_4^*(3-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(3-2)=$ $=4+2=6$	$9+f_4^*(3-3)=$ $=9+0=9$		9	3
4	$0+f_4^*(4-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(4-2)=$ $=4+8=12$	$9+f_4^*(4-3)=$ $=9+2=11$	$12+f_4^*(4-4)=$ $=12+0=12$	12	2 або 4

Розрахунки виконуються так. Нехай потрібно знайти $f_3^*(x_3=3)$. Обчислюємо

$$f_3(x_3;k_3)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3)).$$

Отже,

$$f_3(x_3=3;k_3=1)=0+f_4^*(3-0)=0+f_4^*(3)=0+8=0,$$
$$f_3(x_3=3;k_3=2)=4+f_4^*(3-2)=4+2=6,$$
$$f_3(x_3=3;k_3=3)=9+f_4^*(3-3)=9+0=9.$$

Зауважимо, що $C_3(k_3=1)=0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн грн. Значення $f_4^*(x_3-C_3(k_3))$ беремо з попередньої таблиці. Далі маємо:

$$f_3^*(x_3)=\max_{K_3=1,2,3}\{D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))\}=\max\{0,6,9\}=9.$$

Етап 2.

$$f_2^*(x_2)=\max_{k_2}\{D_2(k_2)+f_3^*(x_2-C_2(k_2))\}$$

за умов

$$C_2(k_2)\le x_2,\ k_2=0,1,2,3,4.$$

Результати розрахунків подаємо у таблиці:

x_2	Дохід $f_2(x_2;k_2)=D_2(k_2)+f_3^*(x_3-C_2(k_2))$					Оптимальний розв'язок	
	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$	$f_2^*(x_2)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

Етап 1.

$$f_1^*(x_1)=\max_{k_1}\{D_1(k_1)+f_2^*(x_1-C_1(k_1))\}$$

за умов

$$C_1(k_1)\le x_1,\ k_1=0,1,2,3,4.$$

Виконуємо розрахунки лише для $x_1=4$, подаючи їх у вигляді таблиці:

x_1	Дохід $f_1(x_1;k_1)=D_1(k_1)+f_2^*(x_1-C_1(k_1))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$k_1=4$	$f_1^*(x_1)$	k_1^*
4	$3+f_2^*(4-1)=$ $=3+12=15$	$5+f_2^*(4-2)=$ $=5+6=11$	$7+f_2^*(4-3)=$ $=7+4=11$		15	1

Знайдемо оптимальний план. З таблиці першого кроку випливає, що $k_1^* = 1$, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, який використовує 1 млн грн інвестицій з ефективністю 3 млн грн. Отже, для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4 – 1 = 3 млн грн інвестицій.

З таблиці другого кроку маємо, що за умов $x_2 = 3$ максимальний ефект настає в разі реалізації для другого підприємства першого проекту ($k_2 = 1$), ефективність становить 4 млн грн. Отже, $x_3 = 3 - 1 = 2$, тобто для третього і четвертого підприємств слід використати 2 млн грн інвестицій.

Із таблиці третього кроку за умов $x_3 = 2$ маємо, що $k_3 = 0$. Отже, $x_4 = 2$, а йому відповідають капітальні вкладення $k_4 = 2$, ефективність яких 8 млн грн. Остаточно маємо: ефективність 4 млн грн інвестицій становить 3 + 4 + 8 = 15 (млн грн).

Приклад 9.3. Підприємство розробляє стратегію поповнення запасів деякої продукції для заданого періоду часу, який складається з N етапів (підперіодів). Для кожного з них відомий розмір попиту, причому він не є однаковим для всіх етапів. Щоб задовольнити попит, підприємство може придбати необхідну кількість продукції, замовивши її у виробника, або виготовити самостійно.

Передбачається, що запаси поповнюються миттєво, запізнення поставки та дефіцит неприпустимі. Залежно від ринкової кон’юнктури підприємству може бути вигідно створювати запаси продукції для задоволення попиту в майбутні періоди, що пов’язано, проте, з додатковими витратами на зберігання запасів.

Розробити програму управління запасами підприємства, тобто визначити обсяги замовлення і період його розміщення, щоб загальні витрати на постачання та зберігання продукції були мінімальними, а попит задовольнявся повністю і своєчасно.

Дані задачі вміщено в таблиці:

Період часу (квартал року)	Попит на продукцію, тис. од.	Витрати на розміщення замовлення, тис. грн	Витрати на зберігання, тис. грн
1	4	7	2
2	5	8	3
3	3	6	1
4	2	9	0

Відомо, що на початку планового періоду запас становить 2 тис. од., а під час купівлі продукції діє система оптових знижок. Витрати на придбання 1 тис. од. продукції становлять 15 тис. грн, а коли розмір замовлення перевищує 3 тис. од., витрати знижуються на 12 % і становлять 12 тис. грн.

Нехай $N\left(i = \overline{1, N}\right)$ — кількість етапів планового періоду. Тоді для i-го етапу застосуємо такі позначення: x_i — запас продукції на початок етапу; y_i — обсяг замовленої продукції (розмір замовлення); h_i — витрати на зберігання 1 тис. од. продукції запасу; k_i — витрати на розміщення замовлення; β_i — попит на продукцію; $C_i y_i$ — витрати, що пов’язані із купівлею (виробництвом) продукції y_i.

Визначимо $f(x_i, y_i)$ як мінімальні витрати на етапах $i,\ i+1,\ \ldots,\ N$, якщо рівень запасів x_i.

Рекурентні залежності, що відповідають схемі зворотного прогону, набирають вигляду

$$f_i^*(x_i) = \min_{y_i} f(x_i; y_i) = \min_{y_i}\left\{C_i y_i + k_i + h_i(x_i) + f_{i+1}(x_i + y_i - \beta_i)\right\}$$

за умов

$$\beta_i \le x_i + y_i \le \beta_i + \ldots + \beta_N, \quad i = \overline{1, N}, \quad y_i \ge 0.$$

Для N-го етапу маємо

$$f_N^*(x_N) = \min_{y_N}\left\{C_N y_N + k_N\right\}$$

за умов

$$x_N + y_N = \beta_N, \quad y_N \ge 0.$$

Розглянемо покроковий розрахунок оптимальної стратегії управління запасами.

Етап 4. Маємо $\beta_4 = 2$:

$$f_4(x_4) = \min_{x_4, y_4}\{C_N y_N + k_N\}$$

за умов

$$x_4 + y_4 = 2 .$$

Можливі варіанти розв'язків ілюструє таблиця:

x_4	$f(x_4)$			Оптимальний розв'язок	
	$y_4 = 0$	$y_4 = 1$	$y_4 = 2$	$f_4^*(x_4)$	y_4^*
0			$9 + 2 \cdot 15 = 39$	39	2
1		$9 + 1 \cdot 15 = 24$		24	1
2	$0 + 0 \cdot 15 = 0$	$9 + 1 \cdot 15 = 24$		0	0

Етап 3. Маємо $\beta_3 = 3$. $f_3^*(x_3) = \min_{y_3}(x_i; y_i) = \min_{y_i}\{k_3 + C_3 y_3 + h_3 \cdot x_3 + f_4^*(x_3 + y_3 - \beta_3)\}$
за умов

$$3 \le x_3 + y_3 = 3 + 2 .$$

Результати розрахунків подамо у вигляді таблиці:

x_3	Доходи $f_3(x_3; k_3) = D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3))$						Оптимальний розв'язок	
	$y_3 = 0$	$y_3 = 1$	$y_3 = 2$	$y_3 = 3$	$y_3 = 4$	$y_3 = 5$	$f_3^*(x_3)$	y_3^*
0				$6 + 3 \cdot 15 +$ $+39 = 90$	$6 + 4 \cdot 12 +$ $+24 = 78$	$6 + 5 \cdot 12 +$ $+0 = 66$	66	5
1			$6 + 2 \cdot 15 +$ $+1 \cdot 1 + 39 = 76$	$\vert 6 + 3 \cdot 15 +$ $+1 \cdot 1 + 39 = 76$	$6 + 3 \cdot 12 +$ $1 \cdot 1 + 0 = 55$		55	4
2		$6 + 1 \cdot 15 +$ $+2 \cdot 1 + 39 = 62$	$6 + 2 \cdot 15 +$ $+2 \cdot 1 + 24 = 62$	$\vert 6 + 3 \cdot 15 +$ $+2 \cdot 1 + 0 = 53$			53	3
3	$3 \cdot 1 + 39 = 42$	$6 + 1 \cdot 15 +$ $+3 \cdot 1 + 24 = 48$					39	2
4	$4 \cdot 1 + 24 = 48$	$6 + 1 \cdot 15 +$ $+4 \cdot 1 + 0 = 25$					25	1
5	$5 \cdot 1 + 0 = 5$						5	0

Розрахунки виконуємо так. Наприклад, обчислимо $f_3^*(x_3)$ і y_3^*. Оскільки за умовою $3 \le x_3 + y_3 \le 5$, то x_3 може набувати значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, а y_3 —значень 0, 1, 2, 3, 4, 5 відповідно. Тепер знайдемо $f_3^*(x_3)$ і y_3^* для $x_3 = 2$ і $y_3 = 1, 2, 3$. Для $x_3 = 2$ і $y_3 = 1$ матимемо

$$f_3(x = 2; y_3 = 1) = k_3 + 1 \cdot C_3 + h_3 \cdot 2 + f_4^*(0) = 6 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 1 + 39 = 62 .$$

Аналогічно

$$f_3(x=2;\, y_3=2)=6+2\cdot 15+2\cdot 1+\ f_4\ (1)=6+30+2+24=62\,,$$
$$f_3(x=2;\, y_3=3)=6+3\cdot 15+2\cdot 1+\ f_4\ (2)=6+45+2+0=53\,.$$

Далі обчислюємо

$$f^*(x=2)=\min_{y_N}\{f_3(x=2;\, y=1);\, f_3(x=2;\, y=2);\, f_3(x=2;\, y=3)\}=$$
$$=\min(62,\ 62,\ 53)=53.$$

Отже, $f^*(x=2)=53$ при $y^*=3$.
Так само виконуємо розрахунки для x = 1, 2, 3, 4, 5, а результати вміщуємо у відповідну таблицю.

Етап 2. У таблицю записуємо лише остаточні результати:
Маємо $\beta_3 = 5$.

$$f_2^*(x_2)=\min_{y_2}\{k_2+C_2y_2+h_2x_2+\ f_3^*(x_2+y_2-\beta_2)\}$$

за умов

$$5\le x_2\ +y_2\ \le 5+3+2=10\,.$$

Етап 1. Діємо так, як і на етапі 2, складаючи таблицю результатів:

x_2	$f(x_2)$											Оптимальні розв’язки	
	$y_2=0$	$y_2=1$	$y_2=2$	$y_2=3$	$y_2=4$	$y_2=5$	$y_2=6$	$y_2=7$	$y_2=8$	$y_2=9$	$y_2=10$	$f_2^*(x_2)$	y_2^*
$x_2=0$						134	135	145	143	141	133	133	10
$x_2=1$					125	126	136	134	132	124		124	9
$x_2=2$				125	117	127	125	123	115			115	8
$x_2=3$			113	117	118	116	114	106				106	7
$x_2=4$		101	105	118	107	105	97					97	6
$x_2=5$	81	93	106	107	96	88						81	0
$x_2=6$	73	94	95	96	79							73	0
$x_2=7$	74	83	74	79								74	0 або 2
$x_2=8$	63	72	67									63	0
$x_2=9$	52	55										52	0
$x_2=10$	35											35	0

x_1	$f_1(x_1)$											Оптимальні розв’язки	
	$y_1=2$	$y_1=3$	$y_1=4$	$y_1=5$	$y_1=6$	$y_1=7$	$y_1=8$	$y_1=9$	$y_1=10$	$y_1=11$	$y_1=12$	$f_1^*(x_1)$	y_2^*
2	174	180	174	177	180	176	180	193	194	195	180	174	2 або 4

Маємо $\beta_1 = 4$.

$$f_1^*(x_1)=\min_{y_1}\{k_1+C_1y_1+h_1x_1+\ f_2^*(x_1+y_1-\beta_1)\}$$

за умов

$$4\le x_1+y_1\le 4+5+3+2=14\,.$$

Отже, дістали два оптимальні плани управління запасами підприємства, яким відповідають мінімальні сумарні витрати на постачання та зберігання продукції.

Інформацію про перший оптимальний план містить таблиця:

Етап	Запас	Розмір замовлення	Попит	Залишок продукції на кінець етапу	Витрати на придбання продукції та її зберігання
1	$x_1 = 2$	$y_1^* = 2$	$\beta_1 = 4$	$x_2 = 2 + 2 - 4 = 0$	$7 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 2 = 41$
2	$x_2 = 0$	$y_2^* = 10$	$\beta_2 = 5$	$x_3 = 0 + 10 - 5 = 5$	$8 + 10 \cdot 12 + 0 = 128$
3	$x_3 = 5$	$y_3^* = 0$	$\beta_3 = 3$	$x_4 = 5 + 0 - 3 = 2$	$5 \cdot 1 = 5$
4	$x_4 = 2$	$y_4^* = 0$	$\beta_4 = 2$	$x_5 = 2 + 0 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$
Разом					174

Інформація про другий оптимальний план:

Етап	Запас	Розмір замовлення	Попит	Залишок продукції на кінець етапу	Витрати на придбання продукції та її зберігання
1	$x_1 = 2$	$y_1^* = 4$	$\beta_1 = 4$	$x_2 = 2 + 4 - 4 = 2$	$7 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 2 = 59$
2	$x_2 = 2$	$y_2^* = 8$	$\beta_2 = 5$	$x_3 = 2 + 8 - 5 = 5$	$8 + 8 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 110$
3	$x_3 = 5$	$y_3^* = 5$	$\beta_3 = 3$	$x_4 = 5 + 0 - 3 = 2$	$5 \cdot 1 = 5$
4	$x_4 = 2$	$y_4^* = 2$	$\beta_4 = 2$	$x_5 = 2 + 0 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$
Разом					174

Порівнюючи ці два плани, бачимо, що відрізняються вони першими двома етапами і дають можливість маневрувати фінансовими ресурсами підприємства, що водночас вирішує ще низку проблем.

Стислі висновки

Розв'язування наведених задачі динамічного програмування ґрунтується на визначеному Беллманом принципі оптимальності. Безумовно, Беллман одним із перших зрозумів суть принципу оптимальності та з дивовижною винахідливістю став застосовувати його буквально до сотень оптимізаційних задач, що виникають як в економіці, так і в математиці, техніці та ін. У книжці «Кібернетика і медична діагностика» Беллман писав: «Найцінніша ознака математики — її універсальність. Математичні методи, розроблені для дослідження економіки, можуть знайти застосування у вивченні питань хіміотерапії; теорія, первісно розроблена для розрахунку оптимальних орбіт космічних кораблів, може використовуватись для конструювання протезів. Нові ідеї, один раз народившись, швидко знаходять собі застосування в найрізноманітніших галузях».

Зрозуміло, що викладення такого напряму, як динамічне програмування, у вигляді короткого конспекту є неповним. Основну увагу було зосереджено на двох головних моментах: по-перше, розглянуті основні поняття і формальні побудови, що становлять сутність теорії динамічного програмування; по-друге, для опису обчислювального методу динамічного програмування.

Залишились поза увагою такі цікаві задачі динамічного програмування, як задачі резервування ресурсів, розподіл ресурсів з вкладенням доходів у виробництво, марковські моделі прийняття рішень тощо. Детальніше задачі динамічного програмування розглядаються в літературі [4, 5, 7, 8].

Запитання і завдання для самостійної роботи

1. Сформулюйте задачу динамічного програмування.
2. Методи розв'язування задач динамічного програмування.
3. Наведіть приклади економічних задач, що належать до класу задач динамічного програмування.
4. Принцип оптимальності Р. Беллмана.
5. Чи забезпечує принцип оптимальності незалежність наступних розв'язків від здобутих раніше?
6. Розв'язати такі задачі.

Задача 9.1. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на трьох підприємствах, виділяючи для цього 18 млн грн. За кожним із підприємств розроблено інвестиційний проект із зазначенням прогнозованих сумарних витрат *C* і доходів *D*, що пов'язані з його реалізацією. Розробити план інвестування.

Інвестиційний проект	Підприємство					
	1		2		3	
	Інвестиції, млн грн	Прибуток, млн грн	Інвестиції, млн грн	Прибуток, млн грн	Інвестиції, млн грн	Прибуток, млн грн
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	6	12	7	9
3	4	8	7	14	8	10
4	5	11	9	18	10	14

Задача 9.2. Розв'язати задачу 9.1, якщо розмір інвестицій становить 20 млн грн, а перший інвестиційний проект (ситуація, коли певному підприємству не виділяється коштів) є неприпустимим.

Задача 9.3. Розв'язати задачу 9.1, якщо модернізація має проводитися ще на одному — четвертому підприємстві фірми, для якого розроблено три інвестиційні проекти:

Проект	Інвестиції, млн грн	Прибуток, млн грн
1	0	0
2	4	6
3	5	8

Врахувати, що інвестиційний портфель збільшиться на 2 млрд грн.

Основні терміни і поняття

- Динамічне програмування
- Рекурентне співвідношення
- Принцип оптимальності
- Багатокроковий процес
- Крокове управління

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Абрамов Л.М., Капустин В.Ф.* Математическое программирование. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1976. — 184 с.
2. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1985.
3. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. — М.: Наука, 1981.
4. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Иностранная литература, 1960.
5. *Белман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.
6. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. — Т. 1-3. — М.: Мир, 1972.
7. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972. — 552 с.
8. *Вентцель Е.С.* Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964.
9. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Новые направления в линейном программировании. — М.: Советское радио, 1966.
10. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969.
11. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщение и приложения. — М.: Прогресс, 1966.
12. *Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій: Підручник. — 4-те вид., переоб. і доп. — К., 2000. — 688 с.
13. *Зангвилл У.* Нелинейное программирование. Единый подход. — М.: Советское радио, 1973. — 312 с.
14. *Ермольев Ю.М., Ястремский А.И.* Стохастические модели и методы в экономическом планировании. — М.: Наука, 1979. — 249 с.
15. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программрования. — М.: Наука, 1976.
16. *Калихман И.Л.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высшая шк., 1975.
17. *Калихман И.Л., Войтенко М.А.* Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1973.
18. *Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.* Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 407 с.
19. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.* Математическое программирование. — М.: Высш. школа, 1980. — 300 с.
20. *Кюнци Г.П., Крелле В.* Нелинейное программирование. — М.: Советское радио, 1965. — 299 с.
21. *Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.М.* Методы выпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1987.
22. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. Теория и практика. — М.: Мир, 1984.
23. *Наконечний С.І., Гвоздецка Л.В.* Збірник задач з курсу «Математичне програмування»: Навч. посібник. Ч. 1. — К.: ІСОД, 1996. — 128 с.
24. *Наконечний С.И., Андрійчук В.Г.* Математическое моделирование экономических процессов сельскохозяйственного производства: Учеб. пособие. — К.: КИНХ, 1982. — 106 с.
25. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.
26. *Романюк Т.П., Терещенко Т.О., Присенко Г.В., Городкова І.М.* Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: ІЗМН, 1996. — 312 с.
27. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — К.: Наук. думка, 1985. — 384 с.
28. *Степанюк В.В.* Методи математичного програмування. — К.: Вища школа, 1997. — 272 с.
29. *Таха Х.* Введение в исследование операций. — М.: Мир, 1985. — Т. 1, 2.
30. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967.
31. *Ястремский А.И.* Стохастические модели математической экономики. — К., 1983.
32. *Ястремский А.И.* О соотношениях двойственности в условиях оптимальности в линейных задачах стохастического программирования // Кибернетика. — 1987. — № 1. — С. 102-110.

Навчальне видання

ВІТЛІНСЬКИЙ Вальдемар Володимирович
ТЕРЕЩЕНКО Тетяна Опанасівна
САВІНА Світлана Станіславівна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ: ОПТИМІЗАЦІЯ

Навчальний посібник

Редактор *В. Македон*
Коректор *О. Щербак*
Верстка *І. Грибанової*

Підп. до друку 19.09.15. Формат 60×84/8.
Друк. арк. 23,71. Зам. № 15-5124

Державний вищий навчальний заклад
«Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, № 235 від 07.11.2000)

Тел./факс (044) 537-61-41; тел. (044) 537-61-44
E-mail: publish@kneu.kiev.ua