ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

Лектор

БІЛОУСОВА СВІТЛАНА ВІКТОРІВНА

E-mail: svetlana_belousova@ukr.net

Конт. тел.: +38067-966-8227

Лекція 1

Матриці та визначники.

1 Основні поняття та види матриць.

2 Дії з матрицями.

3 Означення визначників.

4 Практичні способи обчислення визначників.

Прямокутну таблицю чисел назвемо **матрицею** з **розмірами** ***mxn***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, з яких утворено матрицю, називають **елементами матриці**. Їх позначають малими літерами з подвійною індексацією – a_{ij}, де перший індекс вказує на номер рядка, у якому знаходиться елемент $(i=1,2,...,m)$, а другий індекс j – на номер стовпця $(j=1,2,...,n)$.

Позначають: однією великою літерою A

(a_{ij}), $(i=1,2,...,m,\quad j=1,2,...,n)$

Матрицю, що має у своєму складі один рядок, називають **матриця (вектор) – рядок**, $A=(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$

один стовпець – **матриця (вектор) – стовпець**. $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Якщо $m=n$, то називають **квадратна матриця** n**-го порядку**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

діагональ, що йде від елемента a_{11} до елемента a_{nn},

головна діагональ матриці,

діагональ, що йде від елемента a_{1n} до елемента a_{n1} –

бічна діагональ.

Квадратну матрицю, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші елементи – нулеві, називають **одинична матриця**:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо у матриці A поміняти місцями рядки і стовпці, то отримаємо матрицю A^T, **транспоновану до матриці** A:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матриці A^T має розмір $n \times m$, якщо матриця A розміру $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Множення матриці на число.

$$A \cdot \lambda = B$$

Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)$ на число λ називають матрицю $B = \left(b_{ij}\right)$, елементи якої дорівнюють добутку числа λ на відповідні елементи матриці A:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad \left(i = 1,\ 2, ..., m; \quad j = 1,\ 2, ..., n\right).$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = 6A$, то $B = \begin{pmatrix} -6 & 18 & 30 \\ 12 & 48 & 24 \end{pmatrix}$.

Добуток матриці на число має лінійні властивості, які для довільних чисел λ і μ та матриці A можна подати у вигляді тотожностей:

- $\lambda A = A\lambda$ – комутативність (переставність) відносно числового множника і матриці;
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ – асоціативність (сполучність) відносно числових множників;
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ – дистрибутивність (розподільність) відносно числового множника.

Додавання матриць.

Сумою двох матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ однакового зміру $m\times n$ називають матрицю $C=(c_{ij})$, кожний елемент ої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \quad (i=1,\ 2,\ldots.,m;\quad j=1,\ 2,\ldots.,n).$$

Властивості:

а) *переставний закон* $A+B=B+A$;

б) *сполучний закон* $(A+B)+C=A+(B+C)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\ C=A+B=\begin{pmatrix}5 & 5 & 8\\ 5 & 10 & 5\end{pmatrix}.$$

Множення прямокутних матриць.

Добуток прямокутних матриць $A=(a_{ij})$, $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k})$ і $B=(b_{ij})$, $(i=\overline{1,k};\ j=\overline{1,n})$, можливий лише у випадку, коли число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Тоді добутком матриць $A\cdot B$ називають таку матрицю $C=(c_{ij})$, $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, кожний елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}.$$

Властивості:

а) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (не комутативність)

б) $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

в) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивність)

г) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

добуток матриць $A \cdot B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Добуток цих двох матриць можливий, бо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B (матриця A має три стовпці, а матриця B – три рядки).

$$C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 1 & -2 & 6\\ 5 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 3+4\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot 4+4\cdot 5+3\cdot 2\\ 1\cdot 3+(-2)\cdot 2+6\cdot 1 & 1\cdot 4+(-2)\cdot 5+6\cdot 2\\ 5\cdot 3+7\cdot 2+(-3)\cdot 1 & 5\cdot 4+7\cdot 5+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 34\\ 5 & 6\\ 26 & 49\end{pmatrix}.$$

добуток матриці B на матрицю A у наведеному прикладі не існує, бо число стовпців матриці B дорівнює двом, а число рядків матриці A – трьом.

Множення матриць.

добуток матриць залежить від порядку множення, тобто **множення матриць некомутативне**: $\boldsymbol{AB \neq BA}$.

для деяких пар матриць A і B може трапитись, що $BA = AB$.
Це – **переставні матриці**.

переставними будуть будь-які степені тієї самої матриці A:

$$A^k \cdot A^r = A^r \cdot A^k.$$

комутативний закон виконується і для множення

матриці A на одиничну матрицю E:

$$A \cdot E = E \cdot A.$$

I

ВИЗНАЧНИКИ

Визначником порядку n називають число, що задається квадратною матрицею порядку n та обчислюється за формулою, залежно від n.

позначають $|A|,\ \Delta,\ d,\ \delta$.

Визначником матриці першого порядку $A=(a_{11})$, або **визначником першого порядку**, називають елемент a_{11}:

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}.$$

Наприклад, нехай $A=(3)$, тоді $\Delta_1 = |A| = 3$.

Визначником матриці другого порядку $A=(a_{ij})$, $(i=\overline{1,2};\ j=\overline{1,2})$, або **визначником другого порядку**, називають число, яке обчислюється за формулою:

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Добутки $a_{11}a_{22}$ і $a_{12}a_{21}$ носять назву **члени визначника** другого порядку.

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=3\cdot 6-4\cdot 1=14.$$

Визначником матриці третього порядку $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

або **визначником третього порядку**, називають число:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

спосіб обчислення визначника третього порядку:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

| - - - + + +

закономірність – кожний доданок визначника є добуток елементів з кожного рядка і кожного стовпця – використано для означення визначника n-го порядку.

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

візьмемо усі можливі добутки з n елементів, що стоять у різних рядках і стовпцях матриці A, тобто по одному з кожного рядка і стовпця: $a_{\alpha_1 1} \cdot a_{\alpha_2 2} \cdot a_{\alpha_3 3} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_n n}$. **(*)**

За перший співмножник ми завжди можемо взяти елемент, що стоїть у першому стовпці матриці. Якщо позначити індексом α_1 номер рядка, у якому знаходиться цей елемент, то індекси цього елемента будуть α_1 і 1.

за другий співмножник можна взяти елемент, що стоїть у другому стовпці, його індекси будуть α_2 і 2. Тут α_2 – номер того рядка, де знаходиться другий елемент, і т.д.

індекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – це номери рядків, у яких знаходяться співмножники добутку відповідно до зазначеного порядку їх запису.

елементи $a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, a_{\alpha_3 3}, \ldots, a_{\alpha_n n}$ розташовані у різних рядках матриці по одному у кожному стовпці, числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ усі різні і утворюють деяку перестановку чисел 1, 2, ..., n.

у такій перестановці числа i та j утворюють інверсію, якщо $i > j$, але i стоїть у цій перестановці перед j. Перестановку називають **парна**, якщо число інверсій парне, і **непарна** у протилежному випадку.

Так, перестановка 2, 1, 3 буде непарна, бо існує одна інверсія 2, 1; перестановка 3, 2, 1 також непарна, бо тут три інверсії: 3, 2; 3, 1; 2, 1. Перестановка 1, 2, 3 парна, бо інверсія дорівнює нулеві.

Позначимо число інверсій у послідовності $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ символом $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Якщо число інверсій в цій послідовності парне, то у добутку (*) поставимо знак плюс. Якщо ж число інверсій непарне, то поставимо знак мінус. Іншими словами, умовимось перед кожним добутком вигляду (*) записувати знак, що визначається виразом

$$(-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$$

Число усіх добутків, які можна отримати з елементів матриці, дорівнює числу усіх можливих перестановок чисел 1, 2, ..., n, тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

визначником n-го порядку, що відповідає квадратній матриці, називають алгебраїчну суму з $n!$ добутків:

$$\Delta = \sum \ (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot a_{\alpha_1 1} \cdot a_{\alpha_2 2} \cdot \dots \cdot a_{\alpha_n n}$$

із зростанням n значно збільшується число членів визначника $(n!)$. Тому навіть для $n = 4$ використання цієї формули недоцільне (отримаємо 24 доданки).

МІНОР

У матриці n-го порядку виділимо довільний елемент a_{ij} і викреслимо i-й рядок і j-й стовпець, тоді елементи, що залишились, утворюють матрицю $(n-1)$-го порядку. Визначник цієї матриці називають:

мінор елемента a_{ij} даної матриці.

Наприклад, мінор елемента a_{12} матриці A третього порядку дорівнює:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} **елемента** a_{ij} **матриці** n**-го порядку** називають його мінор, що береться зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

алгебраїчне доповнення співпадає з мінором, якщо сума номерів рядка і стовпця $(i+j)$ – парне число, і відрізняється від мінору знаком, якщо $(i+j)$ – непарне число.

Наприклад, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$,

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

Теорема 1.1. *Визначник матриці n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

(розклад за елементами i-го рядка, $i = 1, 2, ..., n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

(розклад за елементами j-го стовпця, $j = 1, 2, ..., n$).

Особливо спрощується обчислення визначника матриці, якщо вона

трикутна (всі елементи цієї матриці, що стоять вище *або* нижче головної діагоналі, дорівнюють нулеві),

діагональна (всі елементи матриці за винятком елементів головної діагоналі, дорівнюють нулеві).

Властивості визначників

1. **Транспонування матриці не змінює значення визначника.**
2. Якщо у матриці поміняти місцями два стовпці, то абсолютна величина визначника цієї матриці не зміниться, але знак зміниться на протилежний.
3. **Якщо всі елементи деякого стовпця або рядка помножити на довільне число λ, то і сам визначник помножиться на це число λ.**
4. Якщо всі елементи деякого стовпця (рядка) визначника дорівнюють 0, то і визначник дорівнює нулеві.
5. Якщо визначник має два однакових стовпці (рядки), то дорівнює нулеві.

6. Якщо елементи двох стовпців матриці пропорційні, то визначник її дорівнює нулеві.
7. **Якщо всі елементи j-го стовпця матриці є суми двох доданків $(a_{ij} = b_i + c_i; \;\; i = 1, 2, ..., n)$, то визначник цієї матриці дорівнює сумі двох визначників, у яких всі стовпці, крім j-го, співпадають з стовпцями визначника заданої матриці, а j-й стовпець визначника одного з доданків має елементи b_i, іншого – c_i.**
8. **Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів будь-якого стовпця матриці додати відповідні елементи іншого стовпця, що помножені на деяке число λ.**
9. **Якщо один із стовпців матриці є лінійна комбінація інших стовпців, то визначник такої матриці дорівнює нулеві.**
10. **Визначник добутку декількох матриць n-го порядку дорівнює добутку визначників цих матриць:**

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

ДІЇ З МАТРИЦЯМИ

Оберненою до матриці A називають матрицю A^{-1} таку, що

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ - одинична матриця

Теорема 1.2. Квадратна матриця A має обернену, тоді і тільки тоді, коли визначник цієї матриці не дорівнює нулю: $d = |A| \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(A_{ij} - алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij})

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

Лекція № 2.

Системи лінійних рівнянь

1. **Загальний вигляд системи лінійних рівнянь**
2. **Розв’язування систем *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими за допомогою оберненої матриці.**
3. **Розв’язування систем *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими. Формули Крамера.**
4. **Розв’язування систем *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими. Метод Гауса.**

Система m рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases}$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі, які потрібно знайти;

$a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ – задані дійсні числа – **коефіцієнти системи**.

Кожний коефіцієнт має два індекси:
перший зазначає номер рівняння, у якому він знаходиться,
другий – номер невідомого, перед яким цей коефіцієнт стоїть.

Числа, що стоять у правих частинах рівностей –
вільними членами системи (вони вважаються відомими)

Розв’язком

системи лінійних рівнянь є така сукупність n чисел $c_1, c_2, ..., c_n$, яка, після підстановки їх у систему замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$, перетворює всі рівняння системи у тотожності.

сумісна система

якщо система лінійних рівнянь має один або декілька розв'язків

несумісна система - не має розв'язків.

Сумісна система може мати один або декілька розв'язків; будемо позначати їх індексами зверху в дужках: наприклад, перший розв'язок $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}$, другий розв'язок $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)}$ тощо. Розв'язки вважаються різними, якщо хоча б одне з чисел $c_i^{(1)}$ не співпадає з відповідним числом $c_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Визначена - якщо сумісна система має єдиний розв'язок.

невизначена - розв'язків більше одного

система у матричній формі

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де A – матриця з коефіцієнтів, що стоять перед невідомими, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів.

Через те, що число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці X, їх добуток

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

є матриця-стовпець. Елементами отриманої матриці будуть ліві частини системи.

система у матричній формі

систему лінійних рівнянь можемо записати, використовуючи умову рівності матриць, у вигляді:

$$AX = B$$

Якщо число рівнянь системи співпадає з числом невідомих, тобто $m = n$,
то матриця системи є квадратна матриця,
а її визначник $\Delta = |A|$ називають **визначник системи**.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МОЖУТЬ МАТИ:

I – **один розв'язок** – сумісна, визначена

II – **безліч розв'язків** – сумісна, невизначена

III – **0 розв'язків** – несумісна

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь $m = n$.

$$AX = B$$

матриця A невироджена,
тобто її визначник $\Delta = |A|$ не дорівнює нулеві

для матриці A існує обернена матриця A^{-1}

Помножимо обидві частини матричного рівняння на матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B,$$

Через те, що

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = \left(A^{-1} \cdot A\right)X = E \cdot X = X,$$

ми отримаємо розв'язок системи рівнянь у вигляді матриці-стовпця

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

у розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{n1}b_n\right)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь $m = n$.

ПЕРЕВАГИ:

- наявність формули
- можливість міняти праву частину, не перераховуючи обернену матрицю

НЕДОЛІКИ:

- можливість розв'язувати тільки квадратні системи
- неможливо розрізнити, коли система несумісна, коли невизначена (визначник головної матриці дорівнює нулю)

Метод Крамера

Система n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Складемо та обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Метод Крамера

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} b_1 a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} b_2 a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} b_n a_{2,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = \overline{1,n}$$

Цей визначник отримано шляхом заміни j-го стовпця визначника Δ стовпцем чисел: $b_{1,} b_{2,\dots} b_n$.

ТЕОРЕМА КРАМЕРА

Система n лінійних рівнянь з n невідомими

I має **єдиний розвязок**, якщо
головний визначник системи $\Delta \neq 0$.
Розв'язком системи буде сукупність значень невідомих:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

II **несумісна**, якщо головний визначник системи $\Delta = 0$ та існує хоча б один визначник $\Delta_k \neq 0$;

III має **безліч розв'язків** (сумісна , невизначена), якщо всі визначники дорівнюють нулю.

Метод Крамера

ПЕРЕВАГИ:

- наявність формул
- можливість знайти значення одної з невідомих

НЕДОЛІКИ:

- можливість розв’язувати тільки квадратні системи
- великий обсяг обчислень

Метод послідовного виключення невідомих, (метод Гауса)

Система залишається рівносильною початковій системі, якщо:

1. Переставити місцями два рівняння;
2. Помножити обидві частини рівняння на ненульовий множник;
3. Додати почлено до рівняння елементи іншого рівняння, помножені на одне й те саме число.

Процес розв'язання за методом Гауса складається з двох етапів. **Перший етап** (прямий хід) ґрунтується на **елементарних перетвореннях рядків системи**.

За допомогою таких перетворень систему зводять до трапецієподібного (або трикутного) вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \qquad \bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \qquad\quad \bar{a}_{33}x_3 + \ldots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad \bar{a}_{rs}x_s + \ldots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \end{cases}$$

На **другому етапі** (зворотній хід) послідовно визначають невідомі системи, рухаючись від останнього рівняння до першого.

Метод послідовного виключення невідомих, (метод Гауса)

ПЕРЕВАГИ:

- можливість розв'язувати системи будь-якого розміру
- можливість знайти безліч розв'язків

НЕДОЛІКИ:

- Немає формул, тільки алгоритм
-

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими у загальному вигляді
за допомогою елементарних перетворень систему рівнянь приводимо до рівносильної системи трикутного або ступінчастого вигляду

(1)

Нехай в системі коефіцієнт a_{11}, що стоїть перед невідомою x_1 у першому рівнянні, не дорівнює нулеві. Якщо $a_{11} = 0$, то ми можемо переставити рівняння у вихідній системі так, щоб перший коефіцієнт був відмінний від нуля.

(2)

Перетворимо систему виключивши невідому x_1 із усіх рівнянь, крім першого. Для цього обидві частини першого рівняння домножимо на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ і віднімемо від обох частин другого рівняння, потім обидві частини першого рівняння домножимо на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і віднімемо від обох частин третього рівняння і т. д.
нова системи m лінійних рівнянь з n невідомими, що буде еквівалентна початковій системі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases}$$

де $a'_{ij}, b'_j (i = 2,3,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ – нові коефіцієнти, які легко виразити через a_{ij} та b_{ij} :

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}; \quad b'_j = b_j - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1.$$

(3)

Перше рівняння залишаємо без змін, а ті рівняння, у яких всі коефіцієнти і вільні члени дорівнюють нулеві, відкинемо. Якщо ж у рівнянні з нульовими коефіцієнтами вільний член не дорівнює нулеві, то система – несумісна. Далі будемо вважати, що $a'_{22} \neq 0$. Перетворимо систему, віднімаючи від обох частин третього, четвертого і т. д. рівнянь обидві частини другого рівняння, що помножені відповідно на числа $\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \ldots, \frac{a'_{m2}}{a'_{22}}$.

виключимо x_2 з усіх рівнянь, крім першого та другого, і одержимо еквівалентну систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a''_{s3}x_3 + \ldots + a''_{sn}x_n = b''_s. \end{cases}$$

(4)

Ця система може мати s рівнянь, $s \le m$, бо деякі з них, можливо, було відкинуте. Процес виключення невідомих продовжимо далі, залишаючи незмінними перше, друге … рівняння системи. Він закінчиться або у випадку, коли всі коефіцієнти у лівій частині якогось рівняння будуть дорівнювати нулеві, а вільний член – ні, що означає, як ми вже знаємо, **несумісність** початкової системи, або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3k}x_k + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a^{(k-1)'}_{kk}x_k + \ldots + a^{(k-1)'}_{kn}x_n = b^{(k-1)'}_k, \end{cases}$$

причому $a_{11} \ne 0, a'_{22} \ne 0, a''_{33} \ne 0, \ldots, a^{(k-1)'}_{kk} \ne 0$, а значить, $k \le n$.

система сумісна.

визначена для $k = n$ і невизначена для $k < n$.

якщо $k=n$, то

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad a_{nn}^{(n-1)'} x_n = b_n^{(n-1)'}. \end{cases}$$

З останнього рівняння знайдемо певне значення невідомої величини x_n. Підставивши його в передостаннє рівняння, знайдемо певне значення невідомої величини x_{n-1}. Продовжуючи, знайдемо значення усіх невідомих.

Система має єдиний розв'язок.

Якщо ж $\boldsymbol{k < n}$, то невідомим $x_{k+1}, \ldots, x_n$ (їх називають "вільними" невідомими) надаємо довільні значення. Після цього з останнього рівняння визначимо x_k, з передостаннього – x_{k-1} і т. д. Значення "вільних" невідомих можна вибирати нескінченним числом способів, тому і розв'язків системи нескінченно багато.

Сумісна і невизначена

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

ЛЕКЦІЯ № 3

Ранг матриці

1. Поняття про лінійну незалежність.

2. Ранг матриці.

3. Методи обчислення рангу матриці

4. Теорема Кронекера – Капеллі

5. Фундаментальна система розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь

Лінійна залежність стовпців матриці.

Розглянемо об'єкти: матриця-рядок; матриця-стовпець; вектор.
В матриці виділяємо рядки або стовбці.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матриця має m рядків і n стовпців,
причому числа m і n ніяк не пов'язані між собою.

Візьмемо k перших стовпців, помножимо кожний елемент першого стовпця на деяке число λ_1, кожний елемент другого стовпця – на число λ_2, ..., кожний елемент останнього, k-го стовпця – на число λ_k і додаємо відповідні елементи одержаних стовпців. Отримаємо деякий новий стовпець, який є лінійною комбінацією вибраних стовпців; числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ **– коефіцієнти цієї лінійної комбінації.**

Лінійна залежність стовпців матриці.

Якщо коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ дорівнюють нулеві, то ми отримаємо нульовий стовпець, тобто стовпець, що складається із самих нулів. Але можливо, що нульовий стовпець можна отримати не тільки таким способом, а й за допомогою коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, які не всі одночасно дорівнюють нулеві. У цьому випадку кажуть, що стовпці **лінійно залежні**.

стовпці $A_1, A_2, ..., A_k$ лінійно залежні, якщо існують такі відмінні від нуля числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ для яких виконується рівність

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_k A_k = 0.$$

Лінійна залежність стовпців матриці.

Якщо один із стовпців, наприклад A_k, є лінійна комбінація інших:

$$A_k = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{k-1} A_{k-1},$$

то стовпці $A_1, A_2, \ldots, A_k$ лінійно залежні.

Лінійна залежність стовпців матриці.

Дійсно

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{k-1} A_{k-1} + (-1) A_k = 0.$$

існує лінійна комбінація стовпців $A_1, A_2, \ldots, A_k$, коефіцієнти якої не всі рівні нулеві (останній коефіцієнт дорівнює -1) і яка дає в результаті нульовий стовпець.

Навпаки, якщо між стовпцями $A_1, A_2, \ldots, A_k$ існує лінійна залежність, то можна стверджувати, що один із цих стовпців є лінійна комбінація інших. Дійсно, нехай у рівності

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k = 0$$

коефіцієнт λ_k не дорівнює нулеві.

Тоді $$A_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} A_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} A_2 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} A_{k-1},$$

тобто стовпець A_k є лінійна комбінація $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$.

стовпці $A_1, A_2, \ldots, A_k$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один з них є лінійна комбінація інших.

Лінійна залежність стовпців матриці

Якщо лінійна комбінація стовпців дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти λ_k дорівнюють нулеві, $(\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0)$, то стовпці $A_1, A_2, \ldots, A_k$ називають **лінійно незалежними**.

РАНГ МАТРИЦІ

Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці A називають ранг матриці.

Якщо зафіксувати деяке число k стовпців матриці A і таке ж число k її рядків, то елементи, що стоять на перетині цих стовпців і рядків утворюють квадратну матрицю k-го порядку, визначник якої називають **мінор k-го порядку матриці A**.

Особливу роль відіграють мінори, що відмінні від нуля і мають при цьому найвищий порядок.

РАНГ МАТРИЦІ

Зауваження

коли всі мінори k-го порядку матриці дорівнюють нулеві, то дорівнюють нулеві і всі мінори вищих порядків $k+l$ $(l \geq 1)$.

Застосовуючи l разів розкладання визначника $(k+l)$-го порядку, одержимо вираз цього визначника через мінори k-го порядку матриці A, які дорівнюють нулеві. Тому і сам мінор $(k+l)$-го порядку матриці A дорівнюватиме нулеві.

РАНГ МАТРИЦІ

Теорема

Найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці дорівнює

рангу цієї матриці.

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ

знаходження рангу матриці потребує обчислень хоча і скінченної, але доволі великої кількості мінорів цієї матриці. Тому для полегшення обчислень використовують перетворення, які не змінюють ранг матриці. Це **елементарні перетворення матриці**.

Елементарними називають такі перетворення матриці:

1. Перестановка місцями двох стовпців або двох рядків.
2. Множення стовпця або рядка на довільне число, що не дорівнює нулеві.
3. Додавання до елементів довільного стовпця або рядка відповідних елементів іншого стовпця або рядка, помножених на деяке число.
4. Відкидання стовпця або рядка, складеного з нулів.

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ

За допомогою елементарних перетворень матрицю можна привести до діагональної форми, у якої елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$ $\left(0 < r \le \min(m,n)\right)$ будуть дорівнювати одиниці, а всі інші – нулеві. Ранг такої матриці дорівнює кількості одиниць на головній діагоналі.

Матриці, одержані одна з іншої елементарними перетвореннями, називаються еквівалентними. Еквівалентні матриці не рівні одна одній, але при елементарних перетвореннях матриці її ранг не змінюється.

Теорема Кронекера - Капеллі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases}$$

візьмемо матрицю A з коефіцієнтів системи

і "розширену" матрицю $\overline{A}$, яку одержимо дописуванням до матриці A стовпця вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}$$

обчислимо ранги цих матриць

Теорема Кронекера - Капеллі

ранг розширеної матриці $\overline{A}$
або дорівнює рангові матриці A,
або на одиницю більший останнього.

Будь-яка максимальна система лінійно незалежних стовпців матриці A буде лінійно незалежною системою стовпців матриці $\overline{A}$.
Якщо ця система залишається максимальною і в $\overline{A}$,
то **ранги матриць A і $\overline{A}$ рівні між собою**.
У протилежному випадку до цієї системи може бути доданий стовпець вільних членів і тільки після цього система стовпців стане максимально лінійно незалежною у $\overline{A}$.
У такому випадку ранг матриці $\overline{A}$ буде **на одиницю більшим**, ніж ранг матриці A.

Теорема Кронекера - Капеллі

Теорема Кронекера-Капеллі.

Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює рангові матриці А.

Теорема Кронекера - Капеллі

- Теорема має декілька тверджень.

а). Припустимо, що система сумісна і $c_1, c_2, ..., c_n$ є один з розв'язків цієї системи. Підставляючи ці числа замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ в усі рівняння системи, отримаємо m рівностей. Ці рівності показують, що останній стовпець розширеної матриці $\overline{A}$ є лінійною комбінацією всіх інших стовпців цієї матриці з коефіцієнтами $c_1, c_2, ..., c_n$. Звідси: будь-яка максимальна система лінійно незалежних стовпців матриці A залишається максимальною і у матриці $\overline{A}$, а тому ранги матриць A і $\overline{A}$ рівні між собою.

Теорема Кронекера - Капеллі

б). Припустимо тепер, що ранг матриці A дорівнює рангові матриці $\overline{A}$. Це означає, що будь-яка максимальна лінійно незалежна система стовпців матриці A залишається максимальною лінійно незалежною системою і в матриці $\overline{A}$. Таким чином, через цю систему лінійно представлено останній стовпець матриці $\overline{A}$. Отже, існує така система чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, що сума стовпців матриці A, взятих з цими коефіцієнтами, дорівнює стовпцю з вільних членів, а тому числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ складають розв'язок системи. ◄

Теорема Кронекера - Капеллі

Теорема

Якщо ранг матриці сумісної системи дорівнює кількості невідомих, тобто $r = n$, то ця система має єдиний розв'язок. Якщо ж ранг матриці сумісної системи менший за кількість невідомих, тобто $r < n$, то ця система має безліч розв'язків.

Теорема Кронекера - Капеллі

► Нехай система сумісна і ранг матриці A дорівнює r. Тоді число r дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків матриці A. Припустимо, для визначеності, що перші r рядків матриці A лінійно незалежно, а інші рядки є їх лінійними комбінаціями. Звідси витікає, що перші r рядків розширеної матриці $\overline{A}$ також будуть лінійно незалежними, бо будь-яка лінійна залежність між ними викликала б лінійну залежність і між першими r рядками матриці A. З рівності рангів матриць A і $\overline{A}$ виходить, що перші r рядків матриці $\overline{A}$ складають максимальну лінійно незалежну систему рядків, тобто будь-який інший рядок цієї матриці буде їх лінійною комбінацією. Тому довільне рівнянням системи є лінійною комбінацією перших r рівнянь і, отже, будь-який розв'язок перших r рівнянь буде задовольняти усі рівняння системи. Достатньо знайти усі розв'язки системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

Теорема Кронекера - Капеллі

Рядки з коефіцієнтів при невідомих у рівняннях лінійно незалежні, тобто матриця з коефіцієнтів має ранг r. Тому $r \leq n$ і, крім того, хоча б один з мінорів r-го порядку цієї матриці не дорівнює нулеві.

Якщо $r = n$, то система буде системою з рівним числом рівнянь і невідомих та з відмінним від нуля визначником. Тому вона матиме єдиний розв'язок, який обчислюється за правилом Крамера.

Нехай тепер $r < n$ і, для визначеності, не дорівнює нулеві мінор r-го порядку, що складений з коефіцієнтів при перших r невідомих. Перенесемо у кожному рівнянні у праву частину всі члени з невідомими $x_{r+1},\dots,x_n$ і виберемо для цих невідомих деякі значення $c_{r+1},\dots,c_n$. Ми одержимо систему r рівнянь

Теорема Кронекера - Капеллі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n, \end{cases}$$

відносно r невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_r$. До цієї системи можна застосувати правило Крамера і тому вона має єдиний розв'язок $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Очевидно, що система чисел $c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n$ є розв'язком системи. Через те, що значення $c_{r+1}, \ldots, c_n$ невідомих $x_{r+1}, \ldots, x_n$, які називають **вільними невідомими**, можна вибирати довільним чином, ми одержимо нескінченно багато різних розв'язків системи ◄

системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

З теореми Кронекера-Капеллі випливає, що ця система завжди сумісна, бо додавання стовпця з нулів не може підвищити ранг матриці.

безпосередньо – система завжди має нульовий розв'язок (0,0,...,0).

системи лінійних однорідних рівнянь

Нехай матриця A з коефіцієнтів системи має ранг r.

Якщо $r = n$, то нульовий розв'язок буде єдиним розв'язком системи.

Якщо ж $r < n$, то система буде мати розв'язки, що відрізняються від нульового

Теорема.

Система n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими має розв'язки, що відмінні від нульового, тільки у тому випадку, коли визначник цієї системи дорівнює нулеві.

► Дійсно, рівність нулеві цього визначника рівносильна твердженню, що ранг матриці A менший від n. З іншого боку, **якщо в системи однорідних рівнянь число рівнянь менше, ніж число невідомих, то система неодмінно має розв'язки, що відмінні від нульового,** бо ранг у цьому випадку не може дорівнювати числу невідомих.◄

системи лінійних однорідних рівнянь

властивості розв'язків:

Якщо числа $c_1, c_2, ..., c_n$ є розв'язок системи, то для будь-якого *k* числа $kc_1, kc_2, ..., kc_n$ також будуть розв'язком цієї системи.

Якщо числа $b_1, b_2, ..., b_n$ – ще один розв'язок системи, то буде розв'язком і сума $c_1 + b_1, c_2 + b_2, ..., c_n + b_n$.

будь-яка *лінійна комбінація* розв'язків однорідної системи буде сама розв'язком цієї системи

у випадку неоднорідної системи це твердження не має місця

системи лінійних однорідних рівнянь

Будь-яку **максимальну** лінійно незалежну систему розв'язків однорідної системи рівнянь називають **фундаментальною системою розв'язків**

Кожний розв'язок системи є лінійна комбінація розв'язків, що утворюють фундаментальну систему.

Теорема

Якщо ранг r матриці з коефіцієнтів системи менший за число невідомих n, то будь-яка фундаментальна система розв'язків системи

має $n - r$ розв'язків.

системи лінійних однорідних рівнянь

Приклад.

Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 11x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

системи лінійних однорідних рівнянь

Знайдемо ранг матриці з коефіцієнтів цієї системи:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 5 \\ 2 & 9 & -11 & 1 \\ 4 & 6 & -14 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

системи лінійних однорідних рівнянь

Ранг матриці з коефіцієнтів дорівнює двом, число невідомих дорівнює чотирьом, тому будь-яка фундаментальна система розв'язків даної системи рівнянь складається з двох розв'язків (4-2=2). Розв'яжемо систему, користуючись двома лінійно незалежними рівняннями і вважаючи x_3, x_4 вільними невідомими. Маємо: $x_2 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$, $x_1 = \frac{5}{2}x_3 - 2x_4$.

Далі візьмемо два лінійно незалежних вектора {1;0} і {0,1}. Підставляючи компоненти кожного з них як значення вільних невідомих, і обчислюючи значення x_1, x_2, одержимо таку фундаментальну систему розв'язків даної системи рівнянь:

$$e_1 = \left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}, 1, 0\right),\ e_2 = \left(-2, \frac{1}{3}, 0, 1\right).$$

Загальний розв'язок системи має вигляд

$x = l_1 e_1 + l_2 e_2$, де l_1, l_2 – довільні сталі.

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

ЛЕКЦІЯ № 4

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

- **1.** Вектори на площині і у просторі. Дії над векторами.
- **2.** Декартові прямокутні координати.
- 3. Лінійний векторний простір. Лінійна залежність і незалежність векторів. Розклад векторів за базисом.
- **4.** Умови колінеарності і компланарності векторів.
- **5.** Координати точки поділу.
- **6.** Скалярний добуток векторів та його властивості.
- **7.** Векторний добуток векторів та його властивості.

- Визначається парою його кінцевих точок: перша точка – це початок вектора, друга – кінець; додатній напрям йде від початку до кінця.

Вектор - напрямлений відрізок прямої

Вектор, початок і кінець якого суміщаються,

- нульовий вектор.

Колінеарними називають два ненульові вектори $\overline{AB}$ *і* $\overline{CD}$, *якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих*

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Вектори, які лежать в одній або паралельних площинах, називають компланарними векторами.

Довжиною або модулем вектора $\overline{AB}$ називають довжину відрізка AB (у заданому масштабі), тобто відстань між його початком і кінцем.

Модуль нульового вектора дорівнює нулеві.

Вектори рівні, якщо вони колінеарні,

мають однакові напрями і рівні модулі.

в довільній точці M *простору можна побудувати тільки один вектор* $\overline{MN}$ *з початком в точці* M*, що дорівнює заданому вектору* $\vec{a}$*. Рівні вектори відрізняються між собою тільки положенням початку і можуть бути одержані один з одного паралельним перенесенням.*

Декартові прямокутні координати вектора і точки

Пряму з вибраним на ній додатним напрямом називають **орієнтована пряма** або **вісь**.

Вісь з вибраною на ній фіксованою точкою O (початком) і масштабною одиницею називають **координатна вісь**.

координатну вісь можна однозначно визначити віднесеним до її початку O ортом $\vec{i}$ (вектор, довжина якого одиниця) цієї осі.

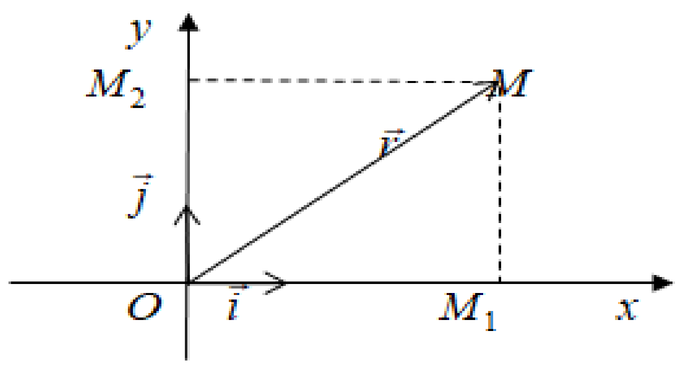
Положення довільної точки $M(\vec{r})$ на цій осі визначимо її радіусом-вектором $\overline{OM} = \vec{r}$. Вектор $\overline{OM}$ колінеарний орту $\vec{i}$ незалежно від положення точки M на осі $\overline{OM} = \vec{r} = \vec{i} \cdot x$,

де число x є відношення модулів колінеарних векторів $\vec{r} = \overline{OM}$ та $\vec{i}$. Це число буде додатним $(x > 0)$, якщо напрями векторів $\overline{OM}$ та $\vec{i}$ співпадають, від'ємним $(x < 0)$, якщо ці напрями протилежні, і $x = 0$, якщо точка M співпадає з точкою O.

Число x називають **координатою вектора** $\vec{r} = \overline{OM}$ **відносно базису** $(O;\vec{i})$. Положення точки M також буде визначене числом x – довжиною (модулем) вектора $\overline{OM}$. **координата точки** $M(x)$

Декартові прямокутні координати вектора і точки

Від довільно вибраної точки O в площині відкладемо упорядковану пару взаємно перпендикулярних одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$ та $\vec{j}$. Вектор $\vec{i}$, що визначає координатну вісь Ox (вісь абсцис), розташуємо горизонтально і напрям його виберемо зліва направо, а вектор $\vec{j}$, що визначає координатну вісь Oy (вісь ординат), – вертикально і напрям його виберемо знизу вгору



Декартові прямокутні координати вектора і точки

Кожний вектор площини, можна розкласти за базисними векторами $\vec{i}$ та $\vec{j}$, тобто подати у вигляді $\overline{OM} = \vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y$

Такий розклад **однозначний**, тобто кожному вектору площини можна поставити у відповідність два упорядкованих числа x і y – коефіцієнти при першому і другому базисних векторах, і навпаки, якщо задано два упорядкованих числа x і y, то можна однозначно побудувати відповідний їм вектор $\overline{OM} = \vec{r}$.

Числа x і y називають координатами вектора $\vec{r}$ у вибраному базисі $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

рівні вектори мають однакові координати, і, навпаки, **якщо відповідні координати векторів однакові, то вектори рівні.**

Декартові прямокутні координати вектора і точки

Будемо називати

базисом у просторі називають відповідну до вибраної точки O (початок координат) упорядковану трійку перпендикулярних некомпланарних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Розклад довільного вектора $\vec{r}$ за базисними векторами

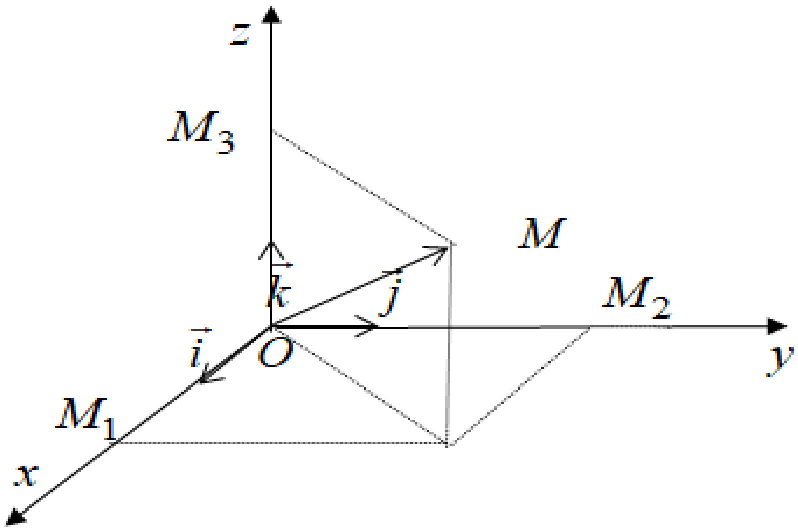
$$\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z$$

однозначно визначає для кожного вектора $\vec{r}$ три упорядковані числа x, y, z – коефіцієнти розкладу і, навпаки, вектор $\vec{r}$ цілком визначається упорядкованими числами x, y, z.

У вибраному базисі між векторами простору і впорядкованими трійками чисел встановлено взаємно однозначну відповідність.

Декартові прямокутні координати вектора і точки

у просторі рівні вектори мають однакові координати, і навпаки, якщо відповідні координати однакові, то вектори рівні.



кожний вектор, паралельний першому базисному вектору $\vec{i}$, має дві координатні точки y і z , рівні нулеві, тобто $\vec{r}_1 = \vec{i}\,x = \{x, 0, 0\}$.

вектор, паралельний $\vec{j}$: $\vec{r}_2 = \vec{j} \cdot y = \{0, y, 0\}$

вектор, паралельний $\vec{k}$: $\vec{r}_3 = \vec{k} \cdot z = \{0, 0, z\}$.

Положення кожної точки M простору визначає її радіус-вектор $\overline{OM}$ з координатами $\{x, y, z\}$.

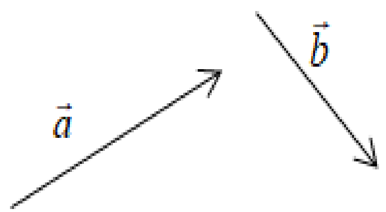
довільній точці M можна поставити у взаємно однозначну відповідність упорядковану трійку чисел x, y, z, - **координатами точки** $M(x, y, z)$.

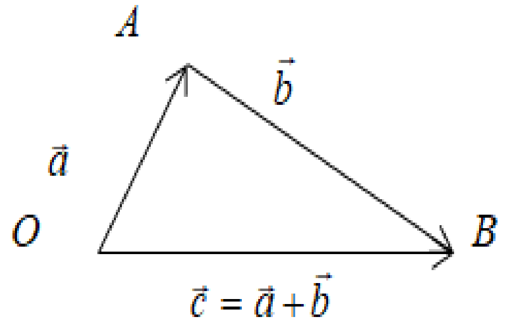
Кожна пара з трійки базисних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ визначає **координатну площину**.

У всіх точок координатної площини, що визначена парою $\vec{j}$ *і* $\vec{k}$ *базисних векторів (площина* Oyz*), перша координата, абсциса* $x = 0$, *у точок координатної площини, визначеної векторами* $\vec{i}, \vec{k}$ *(площина* Oxz*) – друга координата, ордината,* $y = 0$, *а у точок координатної площини, визначеної парою* $\vec{i}, \vec{j}$ *(площина* Oxy*), третя координата, апліката,*

Лінійні операції з векторами

1.Додавання двох векторів – це операція побудови за двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ третього вектора – вектора суми $\vec{c}$.





сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, що сполучає початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$.

Лінійні операції з векторами

2. Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, що у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}, \text{ якщо } \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}.$$

Лінійні операції з векторами

3. Добуток вектора $\vec{a}$ на число λ (скаляр)

Добутком $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$ вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ є вектор: 1) колінеарний вектору $\vec{a}$, 2) модуль (довжина) якого дорівнює добутку $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ модулів числа λ і вектора $\vec{a}$, 3) напрям його співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, або протилежний йому, якщо $\lambda < 0$.

властивості:

$$\alpha \cdot (\beta\vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$$

– асоціативність відносно числових множників;

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

– дистрибутивність відносно числового множника;

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

– дистрибутивність відносно векторного множника.

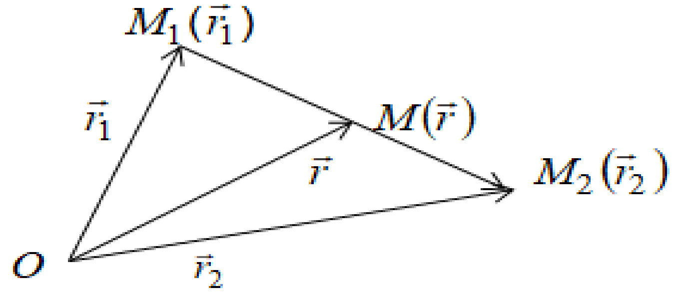
Лінійні операції з векторами

координати суми (різниці) двох векторів дорівнюють сумам (різницям) відповідних координат цих векторів, а координати добутку вектора на число дорівнюють добуткам відповідних координат вектора на це число.

Поділ відрізка у даному відношенні

Якщо задано дві точки $M_1(\vec{r}_1)$ і $M_2(\vec{r}_2)$, що визначають вектор $\overline{M_1M_2}$, то $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$,

довільний вектор $\overline{M_1M_2}$ дорівнює різниці радіуса-вектора його кінця і радіуса-вектора його початку.



знаходження радіуса-вектора точки M, що лежить на прямій M_1M_2, байдуже, де вона лежить – між точками M_1 і M_2 чи на продовженні відрізка M_1M_2 в той чи інший бік, –

і **ділить відрізок у заданому відношенні** λ $(\lambda = M_1M : MM_2)$.

$$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}\ , \quad \overline{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1 \text{ і } \overline{MM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}\ .$$

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}\,) \qquad \vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}\ .$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Поділ відрізка у даному відношенні

коли M є середина відрізка M_1M_2, $\lambda = 1$ - $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$.

координати середини відрізка, заданого його початком $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Лінійна залежність векторів

Суму $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+...+\nu\vec{n}$ добутків векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...,\vec{n}$ на числа $\alpha, \beta, \gamma, ..., \nu$ називають **лінійною комбінацією** векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...,\vec{n}$ з коефіцієнтами $\alpha, \beta, \gamma, ..., \nu$.

Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...,\vec{n}$ називають **лінійно залежними**, якщо існують такі числа $\alpha,\beta,\gamma,...,\nu$, з яких хоча б одне було відмінне від нуля, для яких лінійна комбінація цих векторів з коефіцієнтами $\alpha,\beta,\gamma,...,\nu$, дорівнює нуль-вектору:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+...+\delta\vec{n}=\vec{0}.$$

Лінійна залежність векторів

два лінійно залежних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

і хоча б один з коефіцієнтів α і β, наприклад, α, не дорівнює нулеві, то $\vec{a} = -\dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \vec{b} \Rightarrow$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **колінеарні.**

В координатній формі $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$.

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}.$$

$$x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad z_1 = \lambda z_2, \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda$$

координати колінеарних векторів пропорційні між собою.

вектори, що мають пропорційні координати, колінеарні.

Лінійна залежність векторів

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

Якщо, наприклад, $\alpha \neq 0$, то

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c},$$

або

$$\vec{a} = \mu\vec{b} + \nu\vec{c},$$

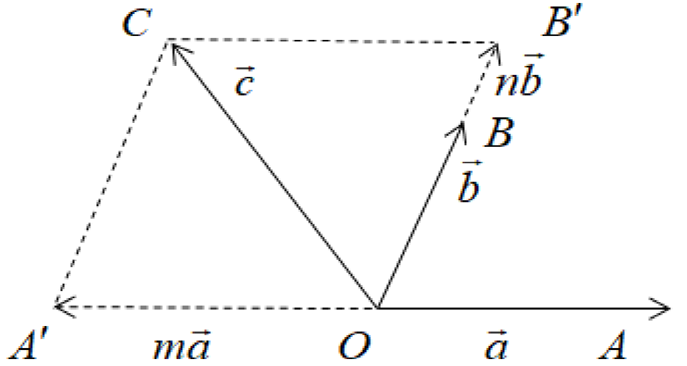
де $\mu = -\dfrac{\beta}{\alpha}, \nu = -\dfrac{\gamma}{\alpha}.$

Лінійна комбінація векторів $\mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ є вектор, що лежить у площині, в якій лежать вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Тому й рівний йому вектор $\vec{a}$ буде паралельний цій площині або лежати в ній. Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ **компланарні**.

Лінійна залежність векторів

у випадку трьох компланарних векторів один з них можна розкласти за двома іншими неколінеарними векторами.

$$\vec{c} = \overline{OA'} + \overline{OB'} .$$



Вектори $\overline{OA'}$ і $\overline{OB'}$ колінеарні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тому

$$\overline{OA'} = \lambda\vec{a}, \qquad \overline{OB'} = \mu\vec{b} ,$$

де λ і μ – відповідні відношення модулів цих пар колінеарних векторів $\quad \vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Умова компланарності трьох векторів. Якщо три вектори $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ і $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$ компланарні, то вони лінійно залежні $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$,
причому хоча б один з коефіцієнтів α,β,γ відмінний від нуля.

$$\begin{cases} \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3=0, \\ \alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3=0, \\ \alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3=0. \end{cases}$$

Ця система рівнянь відносно α,β,γ лінійна і однорідна. Для того, щоб вона мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулеві:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

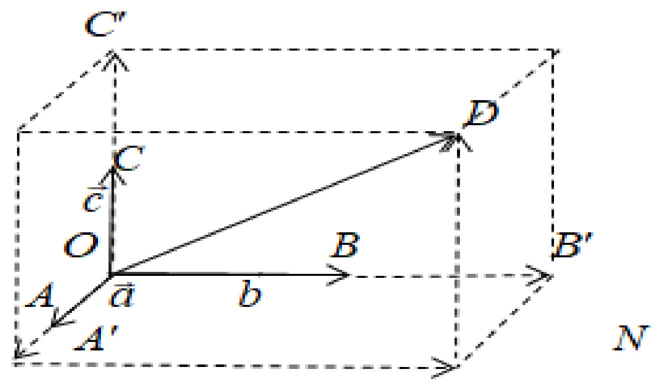
Лінійна залежність векторів

у випадку трьох некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будь-який четвертий вектор $\vec{d}$ можна надати у вигляді

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c},$$

тобто розкласти його за трьома компонентами (складовими), паралельними відповідно векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{d} = \overline{OD} = \overline{OA'} + \overline{A'N} + \overline{ND}.$$



Оскільки $\overline{OA'}$, $\overline{A'N}$, $\overline{ND}$ колінеарні відповідно векторам $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, то, припустивши, що $\overline{OA'} = \lambda\vec{a}$, $\overline{A'N} = \mu\vec{b}$, $\overline{ND} = \nu\vec{c}$ дістанемо шукану залежність: $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

Скалярний добуток

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

або, якщо позначити кут між векторами через $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю тільки тоді, коли вектори взаємно перпендикулярні (нуль-вектор перпендикулярний будь-якому вектору).

Скалярний добуток

властивості:

а) комутативна властивість

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

б) асоціативна властивість відносно множення на число:

$$\lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda\vec{b}\right),$$

в) дистрибутивна властивість відносно додавання:

$$\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Скалярний добуток

у координатній формі

$$\vec{a} = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1, \quad \vec{b} = \vec{i}x_2 + \vec{j}y_2 + \vec{k}z_2 .$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1\right)\cdot\left(\vec{i}x_2 + \vec{j}y_2 + \vec{k}z_2\right) = \vec{i}\cdot\vec{i}\cdot x_1x_2 + \vec{j}\cdot\vec{j}\cdot y_1y_2 +$$
$$+\vec{k}\cdot\vec{k}\cdot z_1z_2 + \vec{i}\cdot\vec{j}(x_1y_2 + y_1x_2) + \vec{i}\cdot\vec{k}(x_1z_2 + z_1x_2) + \vec{j}\cdot\vec{k}(y_1z_2 + z_1y_2).$$

Вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – попарно ортогональні орти:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 .$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 .$$

скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, дорівнює сумі попарних добутків відповідних координат.

Векторний добуток

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, що проходить перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, має напрям у той бік, звідки найкоротший поворот
від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ навколо $\vec{c}$ відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця вектора $\vec{c}$,
і довжина його чисельне
дорівнює площі паралелограма, побудованого
на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Векторний добуток

модуль (довжина), = добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \ .$$

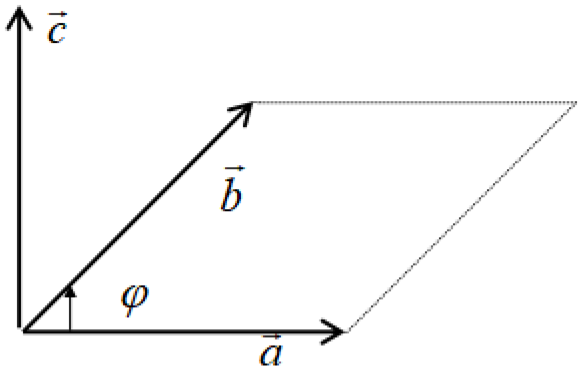


Рис. 6.18

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нулю тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні

Векторний добуток

властивості:

а) Не комутативність множення

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$$

тобто векторний добуток $\vec{a}$ на $\vec{b}$ є вектор, протилежний векторному добутку $\vec{b}$ на $\vec{a}$;

б) Асоціативна властивість відносно скалярного множника:

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \left(\mu \vec{b}\right) = \mu \left(\vec{a} \times \vec{b}\right),$$

тобто числовий (скалярний) множник λ (або μ), що стоїть при одному з множників векторного добутку, можна виносити за знак добутку;

в) Розподільна властивість відносно додавання:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Векторний добуток у координатній формі.

$$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}=\vec{i}x_1+\vec{j}y_1+\vec{k}z_1,\qquad \vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}=\vec{i}x_2+\vec{j}y_2+\vec{k}z_2.$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\vec{i}x_1+\vec{j}y_1+\vec{k}z_1\right)\times\left(\vec{i}x_2+\vec{j}y_2+\vec{k}z_2\right)=\vec{i}\times\vec{i}\cdot x_1x_2+\vec{i}\times\vec{j}\cdot x_1y_2+$$
$$+\vec{i}\times\vec{k}\cdot x_1z_2+\vec{j}\times\vec{i}\cdot y_1x_2+\vec{j}\times\vec{j}\cdot y_1y_2+\vec{j}\times\vec{k}\cdot y_1z_2+\vec{k}\times\vec{i}\cdot z_1x_2+$$
$$+\vec{k}\times\vec{j}\cdot z_1y_2+\vec{k}\times\vec{k}\cdot z_1z_2.$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\qquad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\qquad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\qquad \vec{j}\times\vec{j}=0,\qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\qquad \vec{k}\times\vec{k}=0.$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{k}\cdot x_1y_2-\vec{j}\cdot x_1z_2-\vec{k}y_1x_2+\vec{i}\cdot y_1z_2+\vec{j}\cdot z_1x_2-\vec{i}\cdot z_1y_2=$$
$$=\vec{i}\cdot(y_1z_2-z_1y_2)-\vec{j}\cdot(x_1z_2-z_1x_2)+\vec{k}\cdot(x_1y_2-y_1x_2).$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

ЛЕКЦІЯ 5.1

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

1. Лінії на площині.
2. Пряма на площині.
3. Різні форми рівнянь прямої.
4. Кут між двома прямими.
5. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих.
6. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

На відміну від елементарної геометрії, де вивчаються лише деякі лінії – пряма, коло, ламана, – аналітична геометрія вивчає різні лінії, що відрізняються як своєю формою, так і своїми властивостями. Загальний метод дослідження таких ліній базується на алгебрі і математичному аналізі. В основу всіх цих методів покладено спосіб визначення ліній за допомогою рівнянь.

Нехай на площині нам задано декартову прямокутну систему координат і довільну лінію L. Розглянемо деяке рівняння, що пов'язує між собою дві змінні величини x і y:

$$F(x,y)=0.$$

Означення. **Рівняння $F(x,y)=0$ називають рівнянням лінії L (відносно заданої системи координат), якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії і не задовольняють координати точок, які цій лінії не належать.**

Якщо відомо рівняння лінії, то про кожну точку площини можна сказати: належить вона цій лінії, чи не належить. Якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка належить їй, якщо не задовольняють – не належить.

Змінні x і y у рівнянні лінії називають змінними координатами її точок.

лінія L є геометричне місце точок,
координати яких задовольняють рівняння.

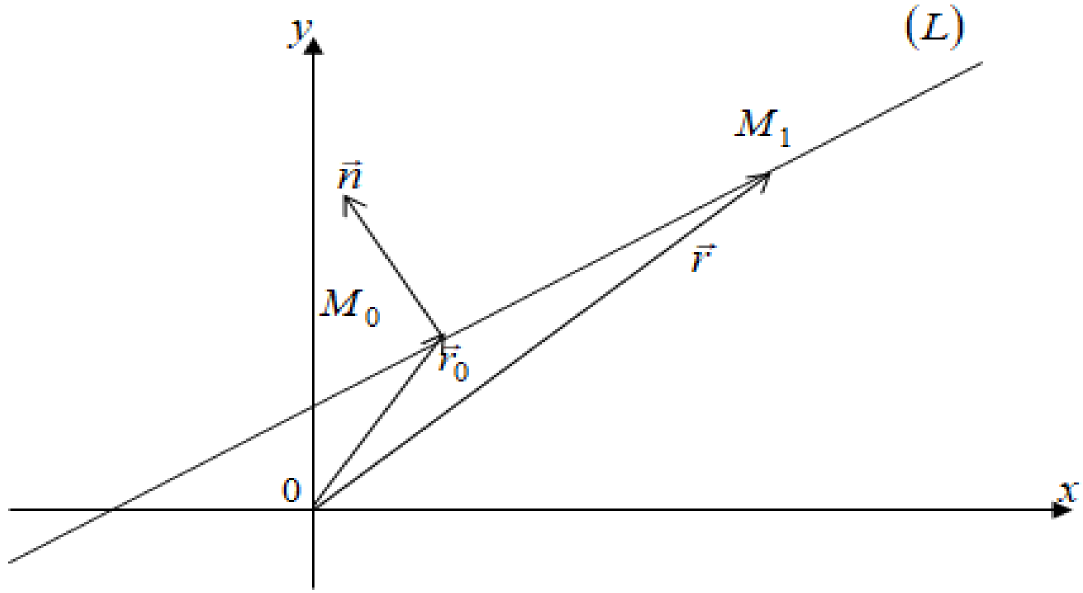
Зауваження.

Таке поняття змушує нас іноді відхилятись від первісного наочного уявлення про лінію.

Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = 0$ задовольняє лише одна пара чисел $x = 0, \quad y = 0$. Але, додержуючись означення лінії як геометричного місця точок, ми кажемо, що це рівняння визначає лінію, вироджену у точку.

Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння прямої.

Нехай на площині задано пряму L. Складемо її рівняння відносно декартової прямокутної системи координат.



Візьмемо на прямій точку $M_0(x_0, y_0)$, а на площині вектор $\vec{n} = \{A, B\}$, перпендикулярний до L. Відомо, що через кожну точку площини проходить одна і тільки одна пряма перпендикулярно до даного вектора. Тому точкою M_0 та вектором $\vec{n}$ пряму L задано, і ми маємо достатню кількість даних для складання її рівняння.

Позначимо довільну точку прямої L через $M(x, y)$. Вектори $\overline{M_0M}$ та $\vec{n}$ взаємно перпендикулярні, отже скалярний добуток їх дорівнює нулеві: $\overline{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$, або $(\vec{r} - r_0) \cdot \vec{n} = 0$, де

$$\vec{r} = \overline{OM} = \{x, y\}, \quad \vec{r}_0 = \overline{OM_0} = \{x_0, y_0\}, \quad \overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0\}.$$

Записуючи скалярний добуток у координатній формі, отримаємо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Маємо лінійне рівняння прямої L.

кожне лінійне рівняння на площині визначає пряму лінію відносно декартової системи координат

Розглянемо довільне лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0 \qquad (8.2).$$

і нехай $M_0(x_0, y_0)$ є одна з точок визначеної рівнянням лінії.

Підставляючи координати точки M_0 у рівняння (8.2), отримаємо тотожність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 .$$

Коли віднімемо цю тотожність від рівняння (8.2), то дістанемо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \qquad (8.2')$$

яке визначає ту ж **лінію**, що й рівняння (8.2) і є рівнянням прямої.

Позначимо через $M(x, y)$ довільну точку цієї лінії, а через $\vec{r}$ і $\vec{r}_0$ радіуси – вектори точок M і M_0. Вектор $\vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0\}$ сполучає точку M_0 з точкою M.

Розглянемо вектор $\vec{n} = \{A, B\}$. Такий вектор існує в площині, бо кожну пару чисел можна розглядати як координати певного вектора. Ліва частина рівняння (8.2') є не що інше, як записаний в координатах скалярний добуток векторів $\overline{M_0M}$ і $\vec{n}$, а рівняння (8.2') є умова перпендикулярності цих векторів. У векторній формі:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Отже, для будь-якого положення точки M на лінії (8.2) вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярний до сталого вектора $\vec{n}$. Але це можливо лише тоді, коли лінія (8.2) пряма.

Рівняння $Ax + By + C = 0$

називають

загальним рівнянням прямої на площині.

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярний до прямої L, називають вектором її нормалі.

Рівняння $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$

називають

векторним рівнянням прямої L.

Дослідження неповного рівняння прямої

а) Вільний коефіцієнт C дорівнює нулеві.

$$Ax + By = 0.$$

Пряма лінія проходить через початок координат, бо координати точки $O(0;\,0)$ задовольняють це рівняння.

б) Коефіцієнт $B = 0$.

Пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy.

Рівняння $x = -\dfrac{C}{A}$ визначає геометричне місце точок, які мають одну й ту саму абсцису $-\dfrac{C}{A}$.

в) Аналогічно, якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox.

г) Якщо $B = C = 0$, то пряма $Ax = 0$ суміщається з віссю Oy. Отже, $x = 0$ є рівняння осі Oy.

д) Якщо $A = C = 0$, то пряма $By = 0$ суміщається з віссю Ox. Отже $y = 0$ є рівняння осі Ox.

Рівняння прямої у відрізках на осях.

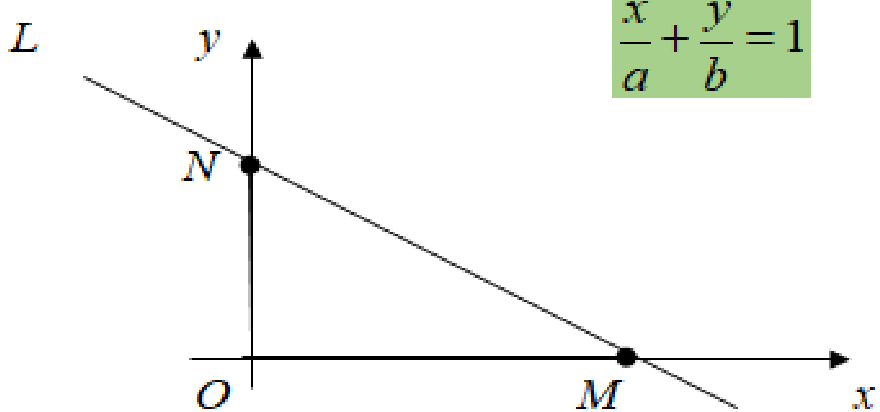
У загальному випадку, тобто коли коефіцієнти A, B, C відмінні від нуля, пряма перетинає обидві координатні осі. Позначимо точки перетину прямої L з координатними осями Ox та Oy відповідно через M і N, а відрізки OM та ON – через a і b. Точки M та N мають координати: $M(a;\,0)$, $N(0;\,b)$.

Підставимо координати точки M, дістанемо: $Aa + C = 0$, звідки $a = -\dfrac{C}{A}$

підставляючи координати точки N матимемо, $Bb + C = 0$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

Навпаки, коли відомі відрізки a і b, які пряма відтинає від координатних осей, то можна написати рівняння цієї прямої через a і b (припускаємо, що $C \neq 0$)

$$A = -\frac{C}{a}, \quad B = -\frac{C}{b}$$



$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Перетин двох прямих на площині.

Нехай на площині задано дві прямі L_1 та L_2 загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Треба визначити їх точку перетину. Вираз "знайти точку перетину" слід розуміти так: "визначити координати спільної точки прямих". Очевидно, що координати цієї точки задовольняють обидва рівняння (8.5) отже, щоб їх визначити, треба розв'язати систему (8.5). Матимемо:

$$x = \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{A_1B_2 - B_1A_2}, \ y = \frac{C_1A_2 - A_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2}. \tag{8.6}$$

Дослідимо знайдений розв'язок. Можливі такі випадки:

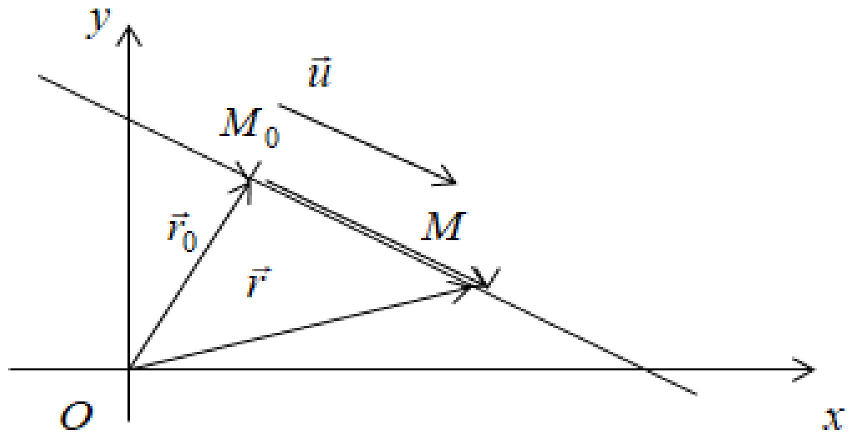
а) Знаменник $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$. Це означає, що система (8.5) сумісна і має один розв'язок. Координати точки перетину прямих L_1 і L_2 визначаються за формулою (8.6).

б) Знаменник $A_1B_2 - B_1A_2 = 0$, але принаймні один з чисельників (8.6) відмінний від нуля. Система (8.5) несумісна. Прямі L_1 і L_2 паралельні, бо з умови $A_1B_2 - B_1A_2 = 0$ випливає, що $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

в) $A_1B_2 - B_1A_2 = 0$ і один з чисельників, наприклад $B_1C_2 - C_1B_2 = 0$. Тоді і $C_1A_2 - A_1C_2 = 0$. Прямі співпадають.

Розглянемо пряму, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{u} = \{l, m\}$. Точка $M_0(x_0, y_0)$ і вектор $\vec{u}$ цілком визначають пряму, адже через задану точку можна провести одну і лише одну пряму, паралельну цьому вектору.

Вектор $\vec{u}$ має однаковий напрям з прямою, і тому його називають ***напрямним вектором***.



Позначимо через $\vec{r}_0$ радіус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, а через $\vec{r}$ радіус-вектор довільної прямої $M(x, y)$. Вектори $\overline{M_0M} = \vec{r} - r_0$ і $\vec{u}$ колінеарні:

$$\vec{r} - r_0 = t \cdot \vec{u} \quad \text{(векторне рівняння прямої)} \tag{8.7}$$

Отже, коефіцієнти векторів пропорційні

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$ **(канонічне рівняння прямої)** (8.8)

параметричне рівняння

$$x=x_0+lt,$$
$$y=y_0+mt. \qquad (8.9)$$

Параметр t є змінним параметром прямої. Коли точка M рухається по прямій, то t змінюється за абсолютною величиною і напрямом.

Знак t залежить від того, однаковий чи протилежний напрям мають вектори $\overline{M_0M}$ і $\vec{u}$. Абсолютна величина t пропорційна відстані точки M від точки M_0. В окремому випадку, коли вектор $\vec{u}$ є орт, $|t|$ дорівнює відстані між точками M_0 і M. Отже, якщо $|\vec{u}|=1$, то $|\vec{r}-\vec{r}_0|=|t|$. Крім того, в цьому випадку $l=\cos\varphi;\ m=\sin\varphi$, де φ – кут між вектором $\vec{u}$ і віссю Ox.

Найчастіше пряму на площині задають двома точками.

Нехай $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ – дві точки прямої L. Легко побачити, що двома точками прямої визначається її напрямний вектор, який в цьому випадку лежить на прямій L: $\vec{u} = \overline{M_1M_2}$, і тому координати вектора $\vec{u}$ визначаються за формулами: $l = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$.

Підставивши значення l і m у рівняння (8.8), отримаємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{8.10}$$

– **рівняння прямої, що проходить через дві задані точки**.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай пряму задано точкою $M_0(x_0, y_0)$ і кутом φ, який вона утворює з додатним напрямом осі Ox. Позначимо $tg\ \varphi$ через k: $k = tg\ \varphi$.

Тангенс кута φ нахилу прямої L до осі Ox називають кутовим коефіцієнтом прямої.

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k, легко отримати з рівняння (8.8). Якщо вектор $\vec{u}$ є орт, то $l = \cos\varphi$, $m = \sin\varphi$. Тому $\dfrac{m}{l} = tg\ \varphi = k$.

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{8.11}$$

Часто пряму на площині задають кутом φ і відрізком b, який вона відтинає на осі Oy. Легко бачити, що такий спосіб задання прямої зводиться до попереднього. Точка $M_0(0; b)$ є точкою перетину прямої L з віссю Oy. Підставляючи координати точки M_0 у рівняння (8.11), дістанемо:

$$y - b = kx,$$

або

$$y = kx + b \tag{8.12}$$

Якщо пряму L задано загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$,

то її кутовий коефіцієнт $k = -\dfrac{A}{B}$.

Кут між двома прямими.

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їх напрямними векторами.

Позначимо напрямні вектори двох прямих через $\vec{u}_1 = \{l_1; m_1\}$ та $\vec{u}_2 = \{l_2; m_2\}$, а кут між прямими – через θ. Під кутом θ маємо га увазі той кут, на який треба повернути (проти руху годинникової стрілки) пряму L_1 навколо точки їх перетину, щоб вона співпала з прямою L_2. Отже, матимемо

$$\cos\theta = \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}, \quad \text{або} \quad \cos\theta = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \quad (8.13)$$

Знаки "плюс" або "мінус" у формулі (8.13) дають можливість визначити кожний із суміжних кутів, утворених перетином прямих.

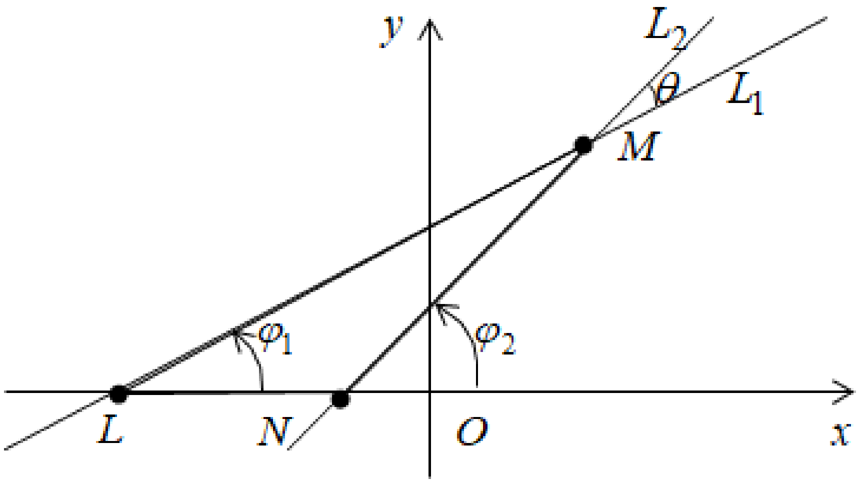
Кут θ між двома прямими, що не паралельні осі Oy, можна визначити також і за формулою

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (8.14)$$

Доведення. Розглянемо дві прямі, що не паралельні осі Oy. Точку перетину цих прямих позначимо через M; точки перетину їх з віссю Ox – через L і N, а кути нахилу до осі Ox – через φ_1 і φ_2.

З трикутника LMN дістанемо $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$, отже

$$tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}$$



Але $tg\varphi_1 = k_1,$ $tg\varphi_2 = k_2.$ Тому $tg\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$

Відмітимо, що коли принаймні одна пряма паралельна осі Oy, то формула (8.14) втрачає смисл. Отже, формула (8.13) є більш загальна, ніж формула (8.14).

Якщо дві прямі, між якими треба визначити кут, задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то зручно користуватися формулою

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{8.15}$$

Цю формулу легко отримати, враховуючи, що кут θ між двома прямими дорівнює куту між векторами їх нормалей $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ та $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$.

8. ***Умова паралельності і перпендикулярності двох прямих.*** Якщо дві прямі паралельні, то кут θ між ними дорівнює нулеві: θ=0. Згідно з формулою (8.14) маємо $tg\theta = 0$ і, відповідно,

$$k_1 = k_2 \tag{8.16}$$

Якщо дві прямі перпендикулярні, то $\theta = \frac{\pi}{2}$ і, отже, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Звідси умова перпендикулярності двох прямих буде такою:

$$k_1 k_2 = -1. \tag{8.17}$$

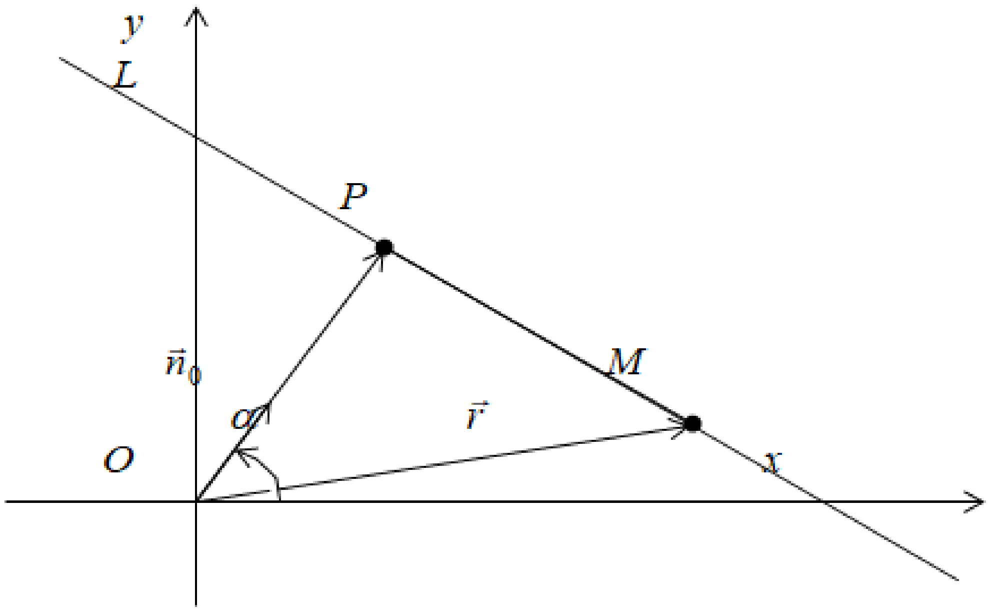
Якщо дві прямі на площині задано загальними рівняннями, то для отримання умови перпендикулярності краще використати формулу (8.15). Дві прямі перпендикулярні $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, якщо

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0,$$

або

$$\frac{A_1}{B_2} = -\frac{B_1}{A_2}.$$

Нормальне рівняння прямої. Нехай задано пряму L. Через початок координат декартової прямокутної системи координат проведемо нормаль до неї і позначимо кут нахилу нормалі до осі Ox через α, точку її перетину з прямою L – через P, а довжину відрізка OP – через p. Напрям від O до P будемо вважати додатним. Величини α і p цілком визначають положення прямої L на площині.



Позначимо через M довільну точку прямої L і спроектуємо радіус-вектор $\vec{r}$ точки M на нормаль.

Орт нормалі позначимо через $\vec{n}_0 = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$. Тоді

$$np_{\vec{n}_0}\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{n}_0)$$

З іншого боку $np_{\vec{n}_0}\vec{r} = p$. Отже, $\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = p$.

Виразимо скалярний добуток $(\vec{r} \cdot \vec{n}_0)$ двох векторів через їх координати. Отримаємо рівняння $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ (8.18)

Це рівняння називають **нормальним рівнянням прямої**.

Зауважимо, що завжди $p \geq 0$, бо p визначає відстань прямої від початку координат.

Тепер зведемо загальне рівняння прямої (8.2) до нормального (8.18). Рівняння (8.2) і (8.18) – це дві різні форми рівняння тієї самої прямої, отже, коефіцієнти рівнянь (8.2) і (8.18) пропорційні:

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = -\frac{p}{C} = \mu,$$

або $\cos\alpha = A \cdot \mu, \quad \sin\alpha = B \cdot \mu, \quad -p = C \cdot \mu.$ (8.19)

Визначимо коефіцієнт пропорційності:

$$A^2\mu^2 + B^2\mu^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак μ за умови $C\mu = -p$ має бути протилежний знаку C. Отже, на підставі (8.19) очевидно, що, помноживши загальне рівняння прямої (8.2) на μ, одержимо її нормальне рівняння:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (8.20)$$

Число μ називають **нормуючим множником** рівняння (8.2).

Відстань від точки до прямої. Нехай у площині задано пряму L і точку M. Позначимо відстань точки M_0 від прямої через d.

Означення. Відхиленням точки M від прямої L називають додатне число $\delta = d$, якщо точка M і початок координат лежать по різні боки від прямої, і від'ємне число $\delta = -d$, якщо вони лежать з одного боку.

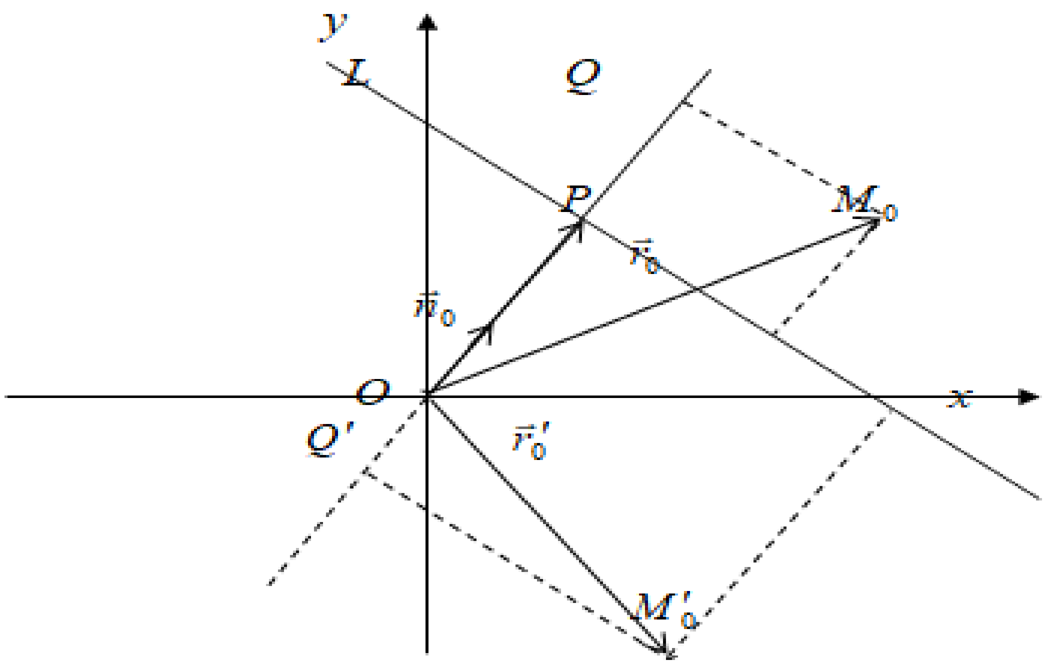
Проведемо через початок координат нормаль до прямої і позначимо точку перетину її з прямою через P. За додатний напрям нормалі приймемо напрям вектора $O\dot{P}$. Отже, якщо $\delta > 0$, то точка M відхилена від прямої в бік додатного напряму нормалі (на рис. 7.6 положення точки M_0), а якщо $\delta < 0$, то точка M відхилена в протилежному напрямі (положення M_0').

Покажемо, що відхилення точки M_0 від прямої дорівнює результату підстановки координат точки M_0 у ліву частину нормального рівняння прямої.

Дійсно, нехай пряму L задано нормальним рівнянням

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (8.18)$$

а точку M – координатами (x_0, y_0). Орт $\vec{n}_0 = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$.



Спроектуємо радіус-вектор $\vec{r}_0$ точки M_0 на нормаль

$$np_{\vec{n}_0}\vec{r}_0 = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha \tag{8.21}$$

З іншого боку, незалежно від положення точки M (вище або нижче прямої),

$$np_{\vec{n}_0}\vec{r}_0 = p + \delta, \tag{8.22}$$

Дійсно, в обох випадках $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$, де Q – проекція точки M на нормаль; $\left|\vec{OP}\right| = p$, але для випадку, коли точка M має положення M_0 (рис. 7.6) напрями векторів $\vec{OQ}$ і $\vec{PQ}$ суміщаються з напрямом $\vec{n}_0$, отже вектори $\vec{OQ}$ і $\vec{PQ}$ на осі проектування визначаються додатними числами $\left(\vec{r}_0 \vec{n}_0\right)$ і δ, а для положення M_0' напрям векторів $\vec{OQ'}$ і $\vec{PQ'}$ протилежний до напрямку $\vec{n}_0$, отже $\left(\vec{r}_0 \vec{n}_0\right)$ і δ від'ємні. Порівнюючи (7.21) і (7.22), дістанемо:

$$x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha = p + \delta, \quad \text{звідки}$$

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \tag{8.23}$$

Відстань точки від прямої $d = |\delta|$. Отже,

$$d = \left|x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p\right|. \tag{8.24}$$

Якщо рівняння прямої задано в загальному вигляді, то, щоб визначити δ або d, слід його нормувати, а потім підставити в його ліву частину координати заданої точки

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (8.25)$$

$$\boldsymbol{d} = \left| \frac{\boldsymbol{Ax_0 + By_0 + C}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2}}} \right| \qquad (8.26)$$

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

- **Лекція № 5.2**

Площина у просторі

- 1 ***Поняття про поверхні***
- ***2 Площина як поверхня першого порядку***
- ***3 Дослідження неповного рівняння площини***
- *4 Рівняння площини у відрізках на осях*
- *5 Рівняння площини, яка проходить через три задані точки*
- *6 Кут між двома площинами*
- *7 Нормальне рівняння площини*

Поняття про поверхні

припустимо, що x, y і z є довільні змінні величини. Рівнянням з трьома змінними x, y, z називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, z) = 0$$

де $F(x, y, z)$ є певним аналітичним виразом, який містить x, y, z, за умови, що рівність виконується лише для деяких значень трійок (x, y, z).

Якщо ця рівність справедлива для всіх значень x, y, z, то її називають тотожністю.

Рівнянням поверхні відносно заданої системи координат називають рівняння з трьома змінними, яке задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежать на ній.

Поняття про поверхні

Поверхні завжди визначають їх рівняннями. Якщо поверхню задано геометрично, то можна знайти її рівняння. І навпаки, поверхню у просторі можна задати її рівнянням. Наявність саме поняття поверхні в аналітичній геометрії визначають за допомогою її рівняння.

Поверхню, яку задано рівнянням відносно певної декартової системи координат, називають *геометричне місце точок*, координати яких задовольняють це рівняння.

Зауважимо, що положення точки на самій поверхні можна визначити двома числами, як і на площині. Дійсно, розв'язуючи рівняння відносно z (якщо це можливо), дістанемо: $z = f(x, y)$. Надаючи довільні значення змінними x і y, ми знаходимо значення z, тобто визначаємо положення точок на поверхні.

Поняття про поверхні

В аналітичній геометрії лінію розглядають як лінію перетину двох поверхонь. Отже, лінію в просторі задають системою двох рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

або в параметричному вигляді

$$x = f_1(t),$$
$$y = f_2(t),$$
$$z = f_3(t).$$

В останньому випадку, виключаючи змінний параметр t з рівнянь, отримаємо систему з двох рівнянь виду.

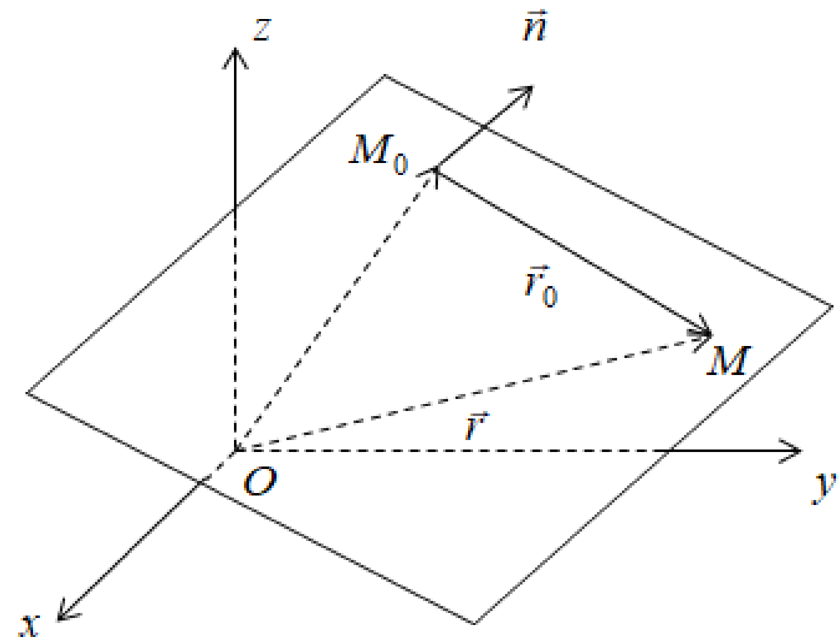
Площина як поверхня першого порядку

Теорема. ***Кожну площину можна визначити лінійним рівнянням відносно декартової прямокутної системи координат у просторі, і, навпаки, кожне лінійне рівняння відносно декартової системи координат у просторі визначає площину.***

►Нехай у просторі задано довільну площину P. Позначимо одну з її точок через M_0, а перпендикулярний до площини вектор – через $\vec{n}$. Точка M_0 і вектор $\vec{n}$ цілком визначають площину P, бо, як відомо, через задану точку M_0 можна провести тільки одну площину, що перпендикулярна до заданого вектора $\vec{n}$.

Площина як поверхня першого порядку

Декартова прямокутна
 систему координат
 точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$,
а (x, y, z) – координати
довільної точки M.
Радіуси-вектори точок M_0 і M
- $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$, а координати
 вектора $\vec{n}$ – через A, B, C .
Вектор $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ для
 будь-якого положення
точки M на площині P
перпендикулярний до вектора



Площина як поверхня першого порядку

скалярний добуток цих векторів дорівнює нулеві:

$$\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\cdot\vec{n}=0$$

- це векторне рівняння площини P. Виразимо його через координати векторів $\vec{r}-\vec{r}_0$ і $\vec{n}$.

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

Бачимо, що рівняння площини P лінійне.

Першу частину теореми доведено.

Площина як поверхня першого порядку

Нехай тепер задано довільне лінійне рівняння:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Щоб встановити, яку поверхню визначає це рівняння, підставимо координати будь-якої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у рівняння $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ і віднімемо тотожність від рівняння.

Дістанемо: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Ясно, що це рівняння визначає ту ж поверхню.

Позначимо через $M(x, y, z)$ довільну точку цієї поверхні і розглянемо вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, що сполучає точки M_0 і M. Легко бачити, що рівняння дає умову перпендикулярності вектора M_0M до сталого вектора $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Геометричне місце векторів M_0M є, очевидно, площина, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$.

Теорему доведено. ◄

Площина як поверхня першого порядку

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

загальне рівняння площини

коефіцієнти A, B, C в загальному рівнянні площини дорівнюють координатам вектора її нормалі.

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \cdot \vec{n} = 0$$

векторне рівняння площини,

яку задано однією з її точок і вектором нормалі.

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$$

рівняння площини, що проходить через задану точку.

Дослідження неповного рівняння площини

координатного базису.

$$Ax + By + Cz = 0$$

Якщо вільний член загального рівняння дорівнює нулеві $(D = 0)$, то площина проходить через початок координат.

координати точки $O(0;\,0;\,0)$ задовольняють рівняння.

Дослідження неповного рівняння площини

$$Ax + By + D = 0$$

Якщо у рівнянні $C = 0$, то площина паралельна осі Oz.

вектор нормалі $\vec{n} = \{A;\, B;\, 0\}$ площини перпендикулярний до осі Oz.

площина $Ax + Cz + D = 0$ паралельна осі Oy

площина $By + Cz + D = 0$ паралельна осі Ox

якщо один з коефіцієнтів при змінних у рівнянні площини дорівнює нулеві, то площина паралельна відповідній осі

Дослідження неповного рівняння площини

Якщо $C = D = 0$, то площина проходить через вісь Oz

$$Ax + By = 0$$

площина $Ax + Cz + D = 0$ проходить через вісь Oy

площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Ox

якщо у рівнянні площини один з коефіцієнтів при змінних і вільний члени дорівнюють нулеві, то площина проходить через відповідну координатну вісь

Дослідження неповного рівняння площини

Якщо $B = C = 0$, то площина паралельна координатній площині yOz.

$$Ax + D = 0$$

паралельна осям Oy і Oz, вона паралельна площині yOz

площина $By + D = 0$ - координатній площині xOz

площина $Cz + D = 0$ – координатній площині xOy

якщо у рівнянні площини два коефіцієнти при змінних дорівнюють нулеві, то площина паралельна одній з координатних площин

Дослідження неповного рівняння площини

Якщо $B = C = D = 0$,

то площина $Ax = 0$ суміщається з координатною площиною $x = 0$, тобто з площиною yOz

площина $By = 0$ суміщається з координатною площиною $y = 0$, тобто xOz

площина $Cz = 0$ – з координатною площиною $x = 0$, тобто з площиною yOz .

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

- **Лекція № 5.3**

Площина у просторі

- 1 *Поняття про поверхні*
- *2 Площина як поверхня першого порядку*
- *3 Дослідження неповного рівняння площини*
- ***4 Рівняння площини у відрізках на осях***
- **5 *Рівняння площини, яка проходить через три задані точки***
- ***6 Кут між двома площинами***
- ***7 Нормальне рівняння площини***

Рівняння площини у відрізках на осях

коли рівняння повне, то площина

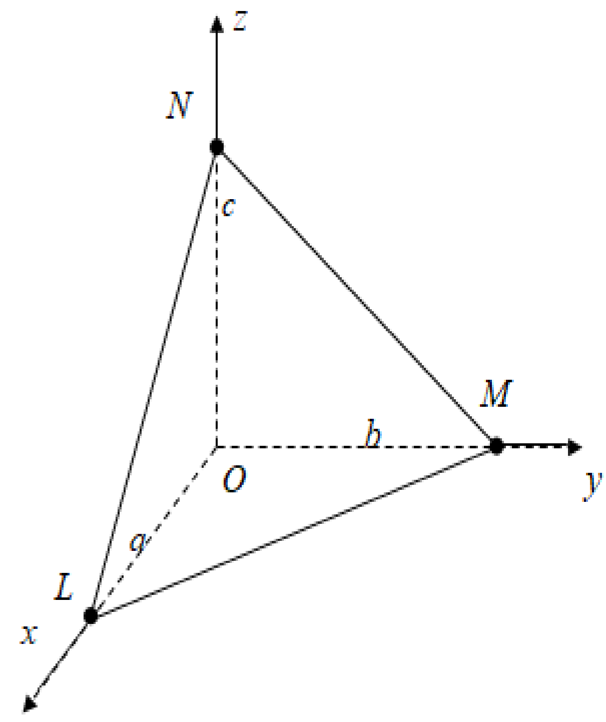
$$Ax+By+Cz+D=0$$

перетинає всі три координатні осі.
Позначимо відрізки, які вона відтинає від осей, через a, b, c
точки перетину з осями Ox, Oy, Oz є
$L(a;0;0),\ M(0;b;0),\ N(0;0;c).$
Координати цих точок задовольняють рівняння площини.

$$Aa+D=0, \qquad a=-\frac{D}{A},$$

$$Bb+D=0, \quad b=-\frac{D}{B},$$

$$Cc+D=0, \qquad c=-\frac{D}{C}.$$



Рівняння площини у відрізках на осях

Навпаки, якщо відомі відрізки, які площина відтинає від координатних осей, то можна написати рівняння площини.

$$A = -\frac{D}{a}, \qquad B = -\frac{D}{b}, \qquad C = -\frac{D}{c}$$

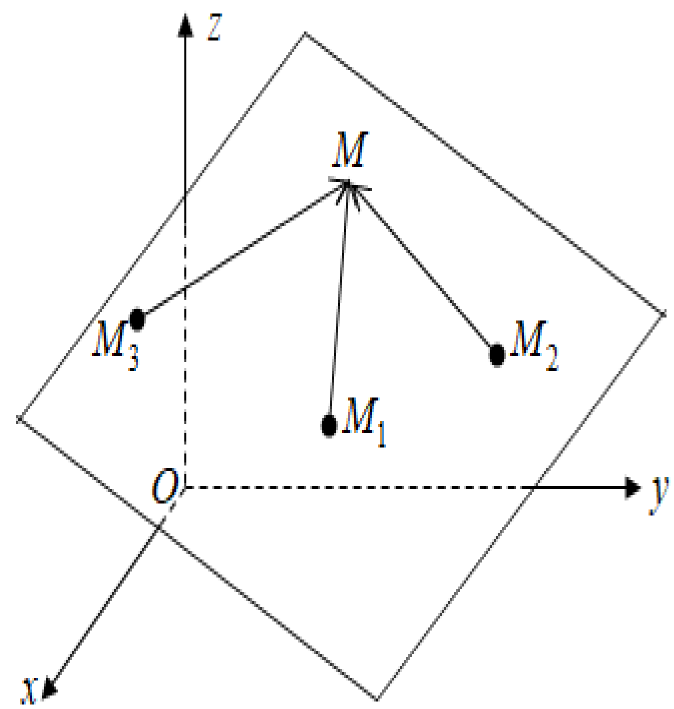
Підставляючи значення коефіцієнтів A, B, C в рівняння та скорочуючи на D $(D \neq 0)$, отримаємо:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

рівняння площини у відрізках на осях

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Нехай площину P задано трьома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Візьмемо довільну точку площини M з координатами x, y, z.



Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Три вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_2M}$, $\overline{M_3M}$ компланарні для будь-якого положення точки M у площині.

Умова компланарності $\left(\overline{M_1M},\ \overline{M_2M},\ \overline{M_3M}\right)=0$

Виразимо мішаний добуток трьох векторів через координати цих векторів:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

умова того, що чотири точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ \ M_2(x_2, y_2, z_2),\ \ M_3(x_3, y_3, z_3), M_4(x_4, y_4, z_4)$$

лежать в одній площині:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Кут між двома площинами

Знайдемо кут між площинами

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Як відомо, двогранний кут між двома площинами вимірюється лінійним кутом, який на підставі теореми про рівність кутів із взаємно перпендикулярними сторонами, буде дорівнювати куту між векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ двох заданих площин. Кут між $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:

$$\cos\theta = \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Кут між двома площинами

Враховуючи, що $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, визначимо косинус кута між двома площинами через коефіцієнти їх загальних рівнянь:

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Знаки “плюс” і “мінус” відповідають косинусам двох суміжних двогранних кутів, утворених площинами при перетині.

Кут між двома площинами

Якщо площини взаємно перпендикулярні $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$,

то $\cos\theta = 0$.

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

умова перпендикулярності двох площин у просторі

Умова паралельності двох площин

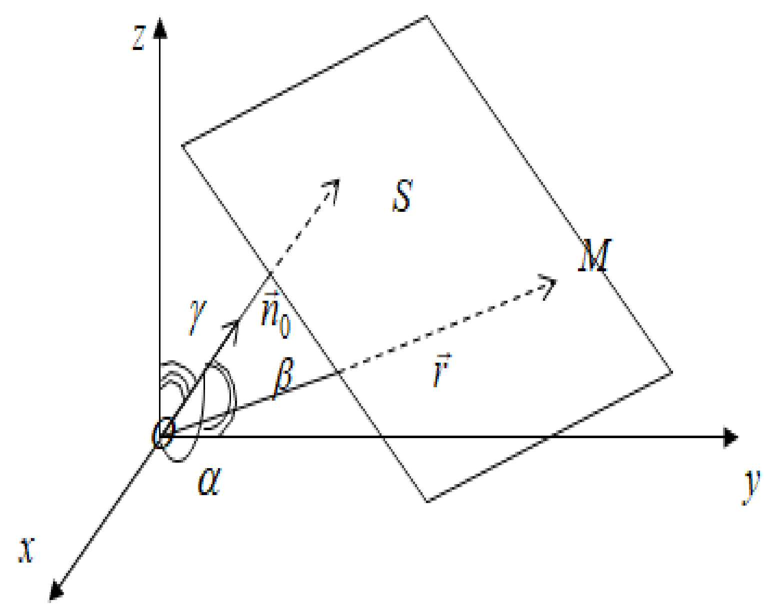
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

бо вектори нормалей двох паралельних площин колінеарні.

Нормальне рівняння площини

у просторі задано площину P
Через початок координат проведемо перпендикуляр до площини P і позначимо точку його перетину з площиною через S.
Відстань початку координат O від площини P позначимо через p.
Додатним напрямом вектора нормалі до площини вважатимемо напрям від O до S. Кути, які він утворює з координатними осями Ox, Oy, Oz - через α, β, γ тоді координати орта нормалі будуть

$$\vec{n}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}.$$



Нормальне рівняння площини

Позначимо довільну точку площини через $M(x, y, z)$ і спроектуємо її радіус-вектор на нормаль до площини

$$\text{пр.}_{\vec{n}_0}\vec{r} = (\vec{r}\cdot\vec{n}_0) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

З іншого боку видно, що для довільної точки M площини

$$\text{пр.}_{\vec{n}_0}\vec{r} = p.$$

Отже,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

зведення загальне рівняння площини до нормального

$$Ax+By+Cz+D=0$$

загальне і нормальне рівняння однієї і тієї ж площини є двома різними формами рівнянь однієї площини, то їх коефіцієнти будуть пропорційні:

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{-p}{D}=\mu.$$

Користуючись співвідношенням $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$

визначимо коефіцієнт пропорційності μ

$$\cos\alpha=\mu A,\quad \cos\beta=\mu B,\quad \cos\gamma=\mu C.$$

$$(\mu A)^2+(\mu B)^2+(\mu C)^2=1,$$

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Знак μ визначаємо з умови $-p=\mu D.$

знак μ має бути **протилежним** знаку вільного члена.

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

Відстань точки від площини

.

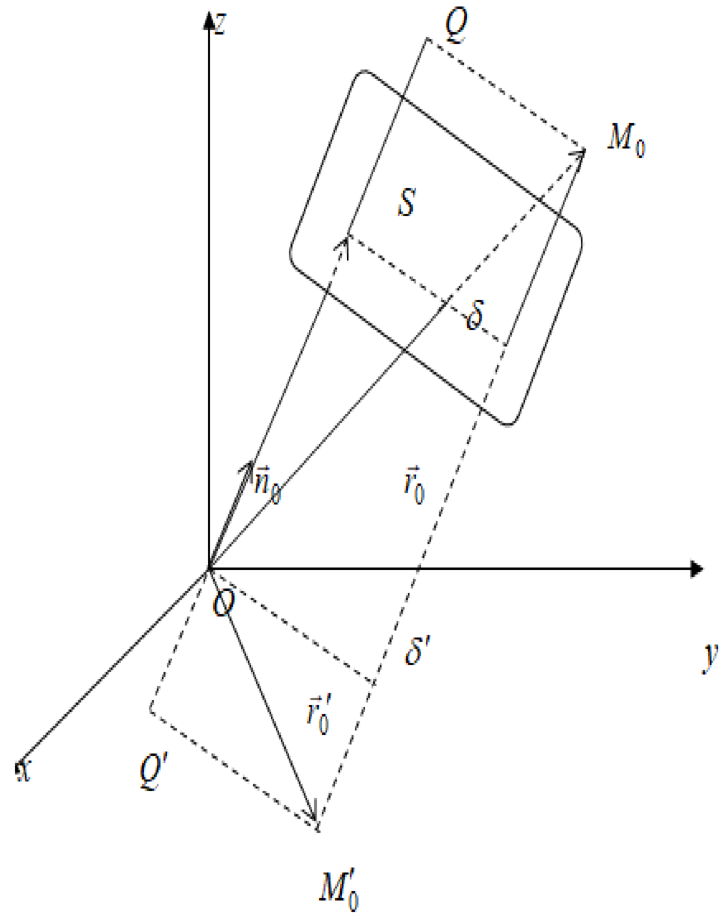
у просторі задано площину P і точку M.
Позначимо відстань точки від площини через d.

Означення. **Відхиленням точки M від площини P назвемо число $\delta = d$, якщо точка і початок координат лежать по різні боки від площини, і число $\delta = -d$, якщо вони лежать по один бік від неї.**

відхилення точки від площини дорівнює результату підстановки координат точки в ліву частину нормального рівняння площини

Відстань точки від площини

Проведемо через початок координат нормаль до площини, S - точка її перетину з площиною. За додатний напрям візьмемо напрям вектора $\overline{OS}$ точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, для якої $\delta > 0$, відхилена від площини в бік додатної нормалі, точка M_0', $\delta' < 0$, відхилена в протилежний бік.



площину задано

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$

Орт нормалі до площини є

$\vec{n}_0 = \{\cos\alpha; y\cos\beta; z\cos\gamma\},$

відстань від початку координат до площини $OS = p$.

Відстань точки від площини

Спроектуємо радіус-вектор $\vec{r}_0$ точки M на нормаль до площини: пр$_{\vec{n}_0}\vec{r}_0 = (\vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma$.

З іншого боку пр.$_{\vec{n}_0}\vec{r}_0 = p + \delta$

$$\overline{OQ} = \overline{OS} + \overline{SQ}$$

незалежно від того, з якого боку від площини лежить точка M.

Якщо точка M знаходиться у положенні M_0, то вектори $\overline{OQ}$ і $\overline{SQ}$ мають однаковий напрям з ортом нормалі $\vec{n}_0$. Отже, визначаються на осі проектування додатними числами $(\vec{r}_0 \cdot \vec{n}_0)$ і δ. Якщо точка M знаходиться у положенні M_0', то для неї вектори OQ' і SQ' мають напрям, протилежний напряму $\vec{n}_0$, отже, визначається від'ємними числами $(\vec{r}_0' \cdot \vec{n}_0)$ і δ'.

Прирівнюючи, дістанемо:

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma = p + \delta,$$
$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p.$$

Відстань точки від площини

Відстань точки M_0 від площини P дорівнює $d = |\delta|$.

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|.$$

Якщо площину задано загальним рівнянням, то

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОМІСТІВ

- **Лекція № 5.4**

Пряма у просторі

- 1. *Параметричні рівняння прямої*
- 2. *Канонічне рівняння прямої*
- 3. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*
- 4. *Задання прямої системою двох загальних лінійних рівнянь*
- 5. *Кут між двома прямими*
- 6. *Взаємне розміщення двох прямих у просторі*
- 7. *Розміщення прямої відносно площини.*
- 8. *Кут між прямою і площиною*
- 9. *Умови, за яких пряма лежить на площині*

Параметричні рівняння прямої

Нехай пряму L у просторі

задано точкою M_0 і

паралельним вектором $\vec{u}$,

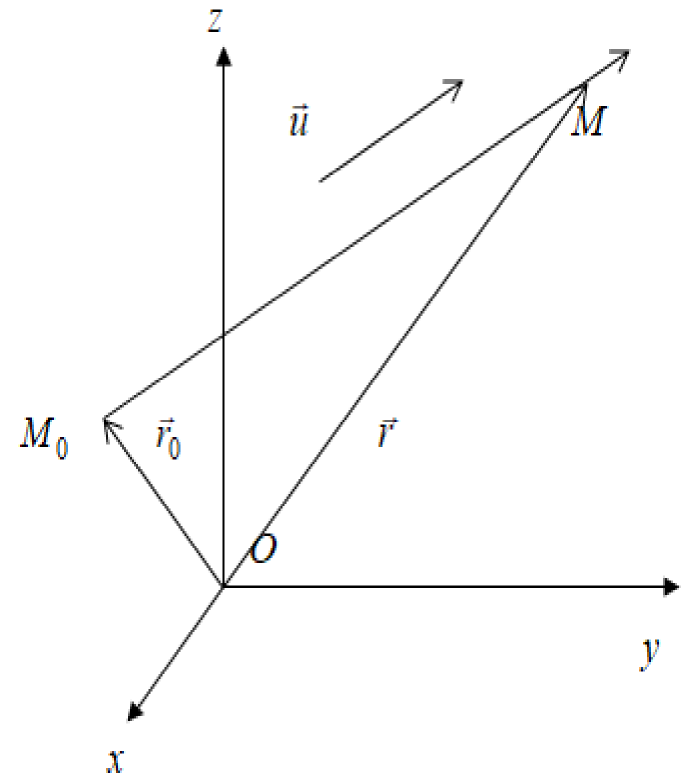
M довільна точка прямої,

$\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ радіуси-вектори точок M_0 і M.

вектори $\vec{r}_0 - \vec{r}$ і $\vec{u}$ колінеарні

у векторній формі:

$$\vec{r}_0 - \vec{r} = t \cdot \vec{u}$$



Параметричні рівняння прямої

відносно декартової прямокутної системи координат в просторі координати: точок $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$,

напрямного вектора - (l, m, n) (*напрямні коефіцієнтами прямої*).

Якщо вектор $\vec{u}$ є орт, то $l = \cos\alpha,\ \ m = \cos\beta,\ \ n = \cos\gamma$,

де α, β, γ – кути, які пряма утворює з координатними осями.

лінійне векторне рівняння еквівалентне трьом рівнянням, записаним у координатах векторів, що входять до його складу:

$$\begin{cases} x - x_0 = l \cdot t, \\ y - y_0 = m \cdot t, \\ z - z_0 = n \cdot t, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t. \end{cases}$$

Як і для прямої на площині, t змінюється пропорційно відстані між точками M_0 і M, а у випадку, коли вектор $\vec{u}$ є орт $|t|$ дорівнює відстані між цими точками.

Канонічне рівняння прямої

пряму у просторі задано точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ і напрямним вектором $\vec{u} = \{l, m, n\}$, $M(x, y, z)$ довільна точку прямої L

умова колінеарності векторів $\overline{M_0M}$ і $\vec{u}$ в координатах:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Зауваження: *До складу отриманої системи рівнянь входять три рівняння, але незалежних між ними лише два.*

Канонічне рівняння прямої

Параметри l, m, n, або напрямні коефіцієнти прямої пропорційні косинусам кутів α, β, γ, які пряма L утворює з осями координат, а якщо вектор $\vec{u}$ є орт, то $l = \cos\alpha,\ \ m = \cos\beta,\ \ n = \cos\gamma$.

Тому, коли $l = 0$, то пряма L перпендикулярна до осі Ox;

коли $m = 0$, то пряма L перпендикулярна до осі Oy;

коли $n = 0$, то пряма L перпендикулярна до осі Oz.

Рівняння координатних осей в канонічній формі:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \qquad \text{осі } Ox$$

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} \qquad \text{осі } Oy$$

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1} \qquad \text{осі } Oz.$$

Канонічне рівняння прямої

Випишемо кожне з рівнянь канонічної форми окремо:

$$\begin{cases} m(x-x_0)-l(y-y_0)=0, \\ n(y-y_0)-m(z-z_0)=0, \\ l(z-z_0)-n(x-x_0)=0. \end{cases}$$

Система містить рівняння трьох площин, які перетинаються по прямій L. Кожна з площин паралельна одній з координатних осей, отже, перпендикулярна до відповідної координатної площини. Ці площини проектують пряму L на три координатні площини.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Рівняння прямої L, яка проходить через дві задані точки M_1 і M_2 можна розглядати як окремий випадок її канонічних рівнянь.

пряму L задано в просторі двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Тоді вектор $\overline{M_1M_2}$ є напрямним вектором $\vec{u}$ заданої прямої: $l = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$, $n = z_2 - z_1$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Задання прямої системою двох загальних лінійних рівнянь

Пряму у просторі відносно декартової прямокутної системи координат можна задати рівняннями двох площин, які перетинаються по цій прямій, тобто системою двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Щоб звести систему до канонічного виду потрібно

(1) визначити координати однієї з точок прямої

(2) визначити відношення її напрямних коефіцієнтів.

(Ctrl)

Задання прямої системою двох загальних лінійних рівнянь

(1)надамо одній змінній, наприклад z, довільного значення z_0 і розв'яжемо систему відносно двох інших змінних, координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ підставимо у рівняння.

(2) знайдемо векторний добуток векторів - нормалей площин $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(B_1C_2 - C_1B_2) + \vec{j}(C_1A_2 - A_1C_2) + \vec{k}(A_1B_2 - B_1A_2)$$

Задання прямої
системою двох загальних лінійних рівнянь

Напрямний вектор $\vec{u} = \{l, m, n\}$ прямої перетину двох площин перпендикулярний до векторів їх нормалей $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, отже, колінеарний їх векторному добутку:

$\vec{u} = \lambda \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$, де λ – коефіцієнт пропорційності.

$$l : m : n = (B_1C_2 - C_1B_2) : (C_1A_2 - A_1C_2) : (A_1B_2 - B_1A_2).$$

$$\frac{x - x_0}{B_1C_2 - C_1B_2} = \frac{y - y_0}{C_1A_2 - A_1C_2} = \frac{z - z_0}{A_1B_2 - B_1A_2}.$$

– рівняння прямої в канонічній формі.

Кут між двома прямими

у просторі задано дві прямі рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Кут між ними дорівнює куту між їх напрямними векторами $\vec{u}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$ і $\vec{u}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$.

$$\cos\theta=\frac{(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}.$$

виразивши скалярний добуток і модулі векторів $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ через координати:

$$\cos\theta=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

Кут між двома прямими

Умовою паралельності двох прямих, тобто колінеарності їх напрямних векторів, є

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Якщо прямі перпендикулярні, то $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

- ***умова перпендикулярності*** двох прямих.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Дві прямі у просторі можуть **перетинатися**,

бути **мимобіжними**,

паралельними,

суміщатися.

Умова паралельності двох прямих – колінеарність їх напрямних векторів.

якщо дві прямі у просторі не паралельні і не суміщаються то вони або перетинаються, або мимобіжні. В обох випадках їх

напрямні коефіцієнти не пропорційні.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Нехай дві непаралельні прямі перетинаються.

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Розглянемо вектор $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$, який сполучає точку M_1 першої прямої з точкою M_2 другої прямої, і напрямні вектори $\vec{u}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$ і $\vec{u}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$.

Якщо дві прямі у просторі перетинаються, то вектори $\overline{M_1M_2}$, $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ компланарні: $\left(\overline{M_1M_2}\cdot\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\right)=0$.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

умова того, що прямі у просторі **ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ**:

- їх ***напрямні коефіцієнти не пропорційні***
- $$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

умова того, що прямі у просторі **МІМОБІЖНІ**:

- їх ***напрямні коефіцієнти не пропорційні***
- $$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Розміщення прямої відносно площини

Пряма у просторі може

перетинати площину *(одна точка перетину)*,

бути до неї ***паралельною*** *(немає точок перетину)*

або ***лежати на ній*** *(безліч точок перетину)*.

пряму L задано системою рівнянь

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

площину P - рівнянням $Ax+By+Cz+D=0.$

Розміщення прямої відносно площини

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Якщо система лінійних рівнянь сумісна і визначена, то існує єдина точка перетину:

Підставимо отримані вирази x, y, z *параметричного рівняння прямої в рівняння площини і знайдемо значення параметра* t *, яке відповідає шуканій точці перетину*

$$A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0,$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Розміщення прямої відносно площини

координатами точки перетину прямої L з площиною P :

$$x = x_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot l,$$

$$y = y_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot m,$$

$$z = z_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot n.$$

Розміщення прямої відносно площини

Якщо вектор нормалі площини і направляючий вектор прямої перпендикулярні, тобто $Al + Bm + Cn = 0$, то

Пряма паралельна площині

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{0}, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

Пряма лежить на площині

$$t = -\frac{0}{0}, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Кут між прямою і площиною

Кут між прямою і площиною

у просторі вимірюється кутом

між прямою та її проекцією

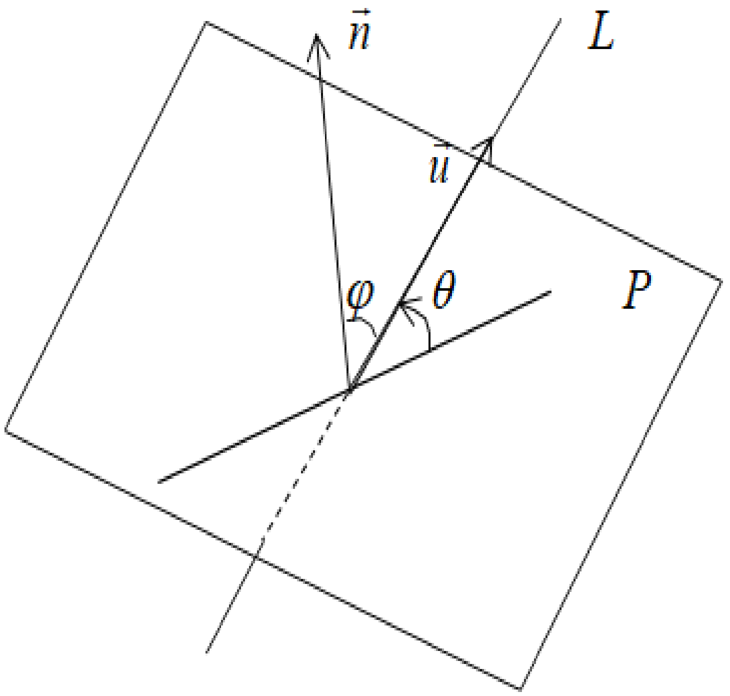
на площину.

Кут φ між нормаллю $\vec{n}$ до

площини P і прямою L

доповнює шуканий кут θ

між прямою і площиною до $\dfrac{\pi}{2}$.



Кут між прямою і площиною

кут φ як кут між двома векторами

$\vec{n}$ і $\vec{u}$ (– напрямний вектор прямої L)

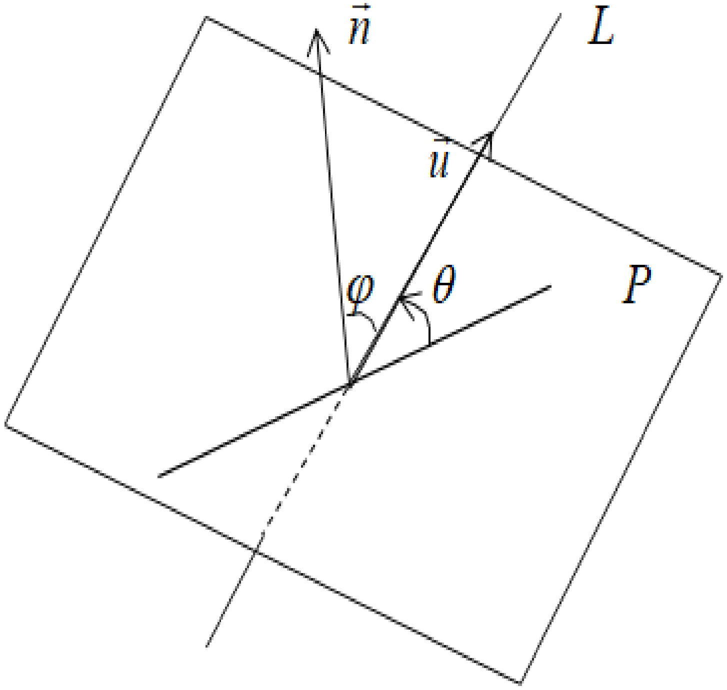
$$\cos\theta = \frac{(\vec{n}\cdot\vec{u})}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|}.$$

враховуючи

$\vec{n} = \{A, B, C\}, \ \vec{u} = \{l, m, n\},$

$$\cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta,$$

$$\sin\theta = \pm\frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$



Кут між прямою і площиною

Якщо пряма L паралельна площині P, то кути $\theta=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

$$Al+Bm+Cn=0$$

- умова паралельності прямої і площини

Якщо ж пряма L перпендикулярна до площини P, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{u}$ колінеарні.

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

- умова перпендикулярності прямої і площини

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

Лекція № 6

ГРАНИЦІ

- 1. Означення границі послідовності
- 2. Означення границі функції
- 3. Властивості границь
- 3. Нескінченно малі та нескінченно великі величини
- 4. Перша важлива границя
- 5. Друга важлива границя
- 6. Невизначені вирази

Функція однієї змінної

Означення

Розглянемо дві змінні величини x і y з областями їх зміни X і Y.
Змінній величині x задано довільне значення з області X без якихось обмежень.

змінну величину y називають функцією змінної x

(в області зміни X), якщо

за певним правилом або законом

кожному значенню x з X

поставлено у відповідність значення y з Y.

Незалежну змінну x називають **аргументом функції**.

Способи задання функції

Аналітичний спосіб

– це спосіб задання функції за допомогою формули.

$$y = 2x,\ \ y = x^2,\ \ y = \sqrt{1 - x^2},\ \ y = \sin x.$$

Табличний спосіб

- за допомогою таблиці, яка містить ряд окремих значень аргумента x і відповідні їм значення функції y.

Для знаходження функції для певного значення аргумента не потрібно виконувати обчислення. Проте маємо значення функції тільки для окремих значень аргумента.

Графічний спосіб

- функцію представляють у вигляді певної лінії (графіка) на малюнку.

Графічне зображення функції цінне своєю наочністю. Тому досить часто функцію, задану аналітично, подають на малюнку у вигляді кривої і називають цю криву графіком функції.

Суперпозиція функцій

операція утворення **складної** функції, тобто **функції від функції**

Означення.

Якщо задано дві функції $y = f(u)$ **і** $u = \varphi(x)$,

то складною функцією $y = F(x)$,

утвореною суперпозицією функцій $y = f(u)$ **та** $u = \varphi(x)$,

називатимемо функцію

$y = f(\varphi(x))$, **тобто** $F(x) = f(\varphi(x))$.

Основні елементарні функції

1) степенева функція: $y = x^{\mu}$, де μ – дійсне число;

2) показникова функція: $y = a^{x}, \ a \neq 1, \ a > 0$;

3) логарифмічна функція: $y = \log_a x, \ a \neq 1, \ a > 0$;

4) тригонометричні функції:

$$y = \sin x, \ y = \cos x, \ y = tg\, x, \ y = ctg\, x;$$

5) обернені тригонометричні функції:

$$y = \arcsin x, \ y = \arccos x, \ y = arctg\, x, \ y = arcctg\, x.$$

Означення.

Функцію $y = f(x)$ називають елементарною, якщо її задано аналітичним виразом, складеним з основних елементарних функцій і сталих величин за допомогою скінченного числа дій додавання, віднімання, множення, ділення і суперпозиції.

Класифікація функцій

(1) Раціональні функції

(1.1) ціла раціональна функція

Функція, представлена цілим відносно x поліномом

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – це дійсні числа, а показник степеня n – ціле додатне число або нуль.

Областю визначення функції є значення аргумента x від $-\infty$ до $+\infty$

(1.2) дробове раціональна функція

Відношення двох цілих раціональних функцій

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + a_1 b^{m-1} + \ldots + b_m}$$

визначена для всіх значень x за винятком тих значень, що перетворюють знаменник у нуль.

Класифікація функцій

(2) Ірраціональні функції

Степенева функція: $y = x^{\mu}$, де μ – будь-яке стале дійсне число.

Якщо μ – ціле число, то отримаємо цілу раціональну функцію.

Якщо μ – дробове число, то будемо мати **радикал.**

Наприклад, $\mu = \dfrac{1}{m}$ (m – ціле число). $y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$.

($x = 0$ можливе лише у випадку, коли μ – **ірраціональне** число).

Класифікація функцій

(3) Алгебраїчні функції

(3.1) **Показникові функції** $y = a^x$

де a – додатне число, що не дорівнює одиниці, а x може приймати будь-яке дійсне значення

Якщо $a > 1$, то $a^x > 1$ для $x > 0$ і $a^x < 1$ для $x < 0$
(для $0 < a < 1$ – навпаки).

Функція a^x зростаюча для $a > 1$ і спадна для $0 < a < 1$.

Класифікація функцій

(3.2) Логарифмічна функція – $y = \log_a x$,

де $a > 0$ і $a \neq 1$, а x приймає тільки додатні значення ($x > 0$).

Для $a > 1$ функція зростаюча, а для $0 < a < 1$ – спадна.

Якщо $a > 1$, то $\log_a x < 0$ для $x < 1$ і $\log_a x > 0$ для $x > 1$.

Якщо ж $a < 1$, то $\log_a x > 0$ для $x < 1$ і $\log_a x < 0$ для $x > 1$.

(3.3) Тригонометричні функції.

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = tg\, x, \qquad y = ctg\, x,$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{і} \quad y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

(3.4) Обернені тригонометричні функції.

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx.$$

Означення

Числовою послідовністю

називають послідовність чисел

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

кожному із яких присвоєно певний номер,

і розташованих у порядку зростання номерів.

$$\{1, 2, 3, \ldots, 100, \ldots, n, \ldots\}$$

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$$

$$\{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\ldots\}$$

Означення

Число a називають **границею числової послідовності**

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

якщо для будь – якого, як завгодно малого наперед заданого $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$

і позначають: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ випливає

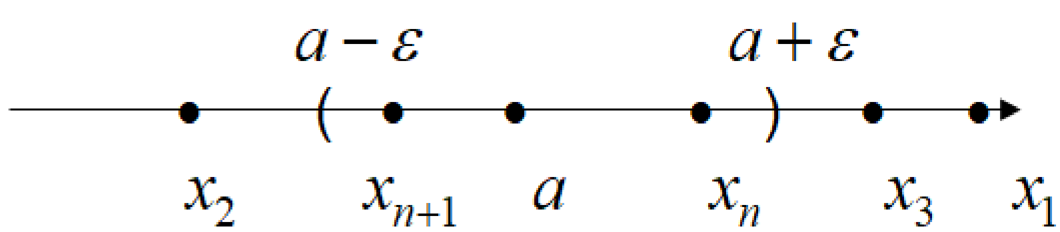
$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Відкритий проміжок $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ з центром у точці a називають **околом** цієї точки,

для будь-якого малого окола точки a всі значення x_n, починаючи з деякого, повинні лежати в цьому околі

(за межами може бути лише скінченна кількість значень).

Якщо зобразити числа точками числової осі то точка a буде **згустком** точок x_n.



Означення

Число A називають **границею функції** $f(x)$

при x прямуючому до a,

якщо для будь – якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$

існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що

як тільки виконується нерівність $|x - a| < \delta$

то виконується і нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$

і позначають: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Означення

Змінну $\alpha = \alpha(x)$ називають **нескінченно малою**

при $x \to a$ або $x \to \infty$,

якщо виконується рівність

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0.$$

Означення

Функцією $y = f(x)$ називають

нескінченно великою величиною при $x \to x_0$,

якщо для всіх x, які достатньо мало відрізняються від x_0, відповідні значення функції $f(x)$ за абсолютною величиною переважають (більше) будь – яке наперед задане як завгодно велике додатне число:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Якщо $x \to a$ залишаючись весь час меншим a,

то пишуть $x \to a-0$ і границю $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$

називають **границею зліва функції** $f(x)$ в точці a.

Якщо ж $x \to a$ і $x > a$, то записують $x \to a+0$

і границю $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$

називають **границею справа** функції $f(x)$ в точці a.

Для того щоб існувала

границя функції $f(x)$ при $x \to a$,

необхідно і достатньо, щоб $A_1 = A_2$

(1) **існували границі функції $f(x)$ в точці a зліва і справа**

(2) **ці границі були рівні між собою.**

НЕПЕРЕВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. КЛАСИФІКАЦІЯ РОЗРИВІВ

Функцію називають **неперервною в точці** x_0, якщо границі функції зліва і справа в точці x_0 рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці.

Точкою розриву першого роду функції $f(x)$ називають таку точку x_0, в якій функція має скінченні ліву і праву границю, не рівні між собою.

Якщо принаймні одна із односторонніх границь в точці x_0 не існує (або дорівнює безмежності), то таку точку називають **точкою розриву другого роду**.

Якщо односторонні границі в точці x_0 рівні між собою, а функція в цій точці не існує, то точку x_0 називають точкою **усувного розриву.**

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ, ЯКІ МАЮТЬ ГРАНИЦІ

існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\pm\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$

Нескінченно малі величини

Змінну x_n, яка має своєю границею нуль, називають нескінченно малою величиною або просто нескінченно малою.

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \text{ (для } n > N_\varepsilon)$$

<u>Означення</u>

Змінну x_n називають нескінченно малою, якщо вона для достатньо великих номерів стає і залишається за абсолютним значенням меншою як завгодно малого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$.

суть поняття

"нескінченно мала величина" :

це – змінна величина, яка лише у процесі своєї зміни може стати меншою довільно вибраного числа ε .

Нескінченно малі величини

У загальному випадку змінна x_n, яка має границю a, то різниця $x_n - a = \alpha_n$ буде нескінченно малою, бо $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ (для $n > N_\varepsilon$).

Навпаки, якщо α_n – нескінченно мала, то $x_n \to a$.

Для того, щоб змінна x_n мала своєю границею стале число a, необхідно і достатньо, щоб різниця $\alpha_n = x_n - a$ була нескінченно малою.

Нескінченно великі величини

Означення

Змінну x_n називають нескінченно великою, якщо вона для достатньо великих значень n стає і залишається за абсолютною величиною більше як завгодно великого наперед заданого числа $E > 0$:

$$|x_n| > E \ (\textbf{для } n > N_E).$$

маємо справу зі змінною величиною,
яка в процесі своєї зміни здатна стати більшою, ніж
задане число E .

Особливо важливі ті випадки, коли нескінченно велика величина x_n (для достатньо великих n) зберігає сталий знак (+ або –):

$$\lim x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty; \qquad \lim x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty.$$

зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами

Якщо змінна x_n є нескінченно велика, то її обернена величина $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$ буде нескінченно мала.

► Візьмемо число $\varepsilon > 0$. За означенням нескінченно великої, для $E = \dfrac{1}{\varepsilon}$ знайдеться такий номер N, що $|x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ лише тільки $n > N$.

Тоді для тих же значень n: $|\alpha_n| < \varepsilon$ ◄

Якщо змінна α_n, (що не набуває значень, рівних нулеві) є нескінченно мала, то обернена до неї величина $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ є нескінченно велика.

Порівняння нескінченно малих *величин*

Розглянемо одночасно кілька нескінченно малих величин, визначених в однакових умовах, тоді може виникнути необхідність порівняти їх між собою.

Одна з нескінченно малих може прямувати до нуля швидше, ніж інша.

Кажуть, що $\alpha(x)$ порівняно з $\beta(x)$ є нескінченно мала

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases} 0, & \textit{вищого\_порядку} \\ \infty, & \textit{нижчого\_порядку} \\ const\neq 0, & \textit{одного\_порядку} \\ 1, & \textit{\_еквівалентна\_} \end{cases}$$

Порівняння нескінченно малих *величин*

Для еквівалентних (позначають $\alpha(x) \sim \beta(x)$),

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \qquad \text{або} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \gamma,$$

де γ – нескінченно мала. Тоді

$$\alpha = \beta(1+\gamma) \quad \text{і} \quad \alpha - \beta = \beta\gamma.$$

різниця двох еквівалентних нескінченно малих величин є величиною вищого порядку малості порівняно з будь-якою з них

заміна однієї нескінченно малої іншою, їй еквівалентною, призводить до нескінченно малої похибки, як абсолютної $\alpha - \beta$, *так і відносної* $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ *або* $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$.

ПЕРША ВАЖЛИВА ГРАНИЦЯ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Наслідки: 1) $\lim\limits_{x \to a} \frac{tgx}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\arcsin\ x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{arctgx}{x} = 1$

ДРУГА ВАЖЛИВА ГРАНИЦЯ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

де e – число, що задовольняє нерівність $2 < e < 3$. Його значення таке: $e = 2{,}718281828459\ldots\ldots$.

Число e є границею змінної, яка залежить від натурального показника.

Але можна встановити більш загальний результат:

$$e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \text{або} \quad e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Невизначені вирази

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad \infty-\infty;\quad 0\cdot\infty;\ 1^{\infty}$$

Розглядаючи вирази $x_n \pm y_n$, $x_n \cdot y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$, вважали, що x_n, y_n мають скінченні границі.

розглянемо випадки, коли границі x_n, y_n нескінченні, або, границя знаменника є нуль.

а). Треба знайти границю частки $\dfrac{x_n}{y_n}$, коли $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. Ця границя, залежно від законів зміни x_n, y_n, може приймати різні значення або може не існувати.

Невизначені вирази

Приклади

- Нехай $x_n = \frac{1}{n^2},\ y_n = \frac{1}{n};$ обидві змінні прямують до нуля. Їх відношення $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$. Якщо ж навпаки, $x_n = \frac{1}{n},\ y_n = \frac{1}{n^2},$ то $\frac{x_n}{y_n} = n \to +\infty$.
- Для $x_n = \frac{a}{n},\ y_n = \frac{1}{n},$ маємо $\frac{x_n}{y_n} = a$, тобто границя є стале число.
- Якщо $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ y_n = \frac{1}{n}$, то відношення $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ не має границі.

Невизначені вирази

б). У випадку, коли $x_n \to \pm\infty$, $y_n \to \pm\infty$, не знаючи законів зміни x_n, y_n, нічого не зможемо сказати про границю виразу $\frac{x_n}{y_n}$.

приклади:

- $x_n = n \to \infty,\quad y_n = n^2 \to \infty,\quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$
- $x_n = n^2 \to \infty,\quad y_n = n \to \infty,\quad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty;$
- $x_n = an \to \pm\infty\ (a > 0, a < 0), y_n = n \to \infty,\quad \frac{x_n}{y_n} = a \to a;$
- $x_n = [2 + (-1)^{n+1}] \cdot n \to \infty,\quad y_n = n \to \infty,\quad \frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1}$ – немає границі.

Невизначені вирази

в). Якщо $x_n \to 0$, $y_n \to \pm\infty$, то дослідження поведінки добутку $x_n \cdot y_n$ також призводить до особливостей. Наприклад:

- $x_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0,\ y_n = n \to \infty;\ x_n y_n = \dfrac{1}{n} \to 0;$
- $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0,\ y_n = n^2 \to \infty;\ x_n y_n = n \to \infty;$
- $x_n = \dfrac{a}{n} \to 0,\ y_n = n \to \infty;\ x_n y_n = a \to a;$
- $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0,\ y_n = n \to \infty;\ x_n y_n = (-1)^n$ – немає границі.

Невизначені вирази

г). Розглянемо суму $x_n + y_n$. Особливим тут є випадок, коли x_n та y_n прямують до нескінченності з різними знаками.

- $x_n = 2n \to +\infty, \; y_n = -n \to -\infty; \; x_n + y_n = n \to +\infty;$
- $x_n = n \to +\infty, \; y_n = -2n \to -\infty; \; x_n + y_n = -n \to -\infty;$
- $x_n = n + a \to +\infty, \; y_n = -n \to -\infty; \; x_n + y_n = a \to a;$
- $x_n = n + (-1)^n \to +\infty, \; y_n = -n \to -\infty; \; x_n + y_n = (-1)^n$ – немає границі.

Методи обчислення границь І правило

$$\frac{1}{\infty} \to 0 \qquad \frac{1}{0} \to \infty$$

І правило трьох нескінченостей

Розкриття невизначеності вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ коли змінна прямує до нескінченості.

Для того щоб розкрити невизначеність такого виду, необхідно чисельник і знаменник дробу поділити на n^k, k - найбільший степінь чисельника і знаменника:

Приклад 6.1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n^5}{4-2n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2}{n^5}+\frac{n^5}{n^5}}{\frac{4}{n^5}-\frac{2n^5}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^3}+1}{\frac{4}{n^5}-1}=\frac{0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

Методи обчислення границь I правило

Приклад 6.2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n^2+3\right)^4+n^7}{\sqrt[3]{27n^{24}+3}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left(2n^2+3\right)^4}{n^8}+\dfrac{n^7}{n^8}}{\dfrac{\sqrt[3]{27n^{24}+3}}{n^8}+\dfrac{n}{n^8}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2n^2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}\right)^4+\dfrac{1}{n}}{\sqrt[3]{\dfrac{27n^{24}}{n^{24}}+\dfrac{3}{n^{24}}}+\dfrac{1}{n^7}}=\frac{(2+0)^4+0}{\sqrt[3]{27+0}+0}=\frac{16}{3}.$$

Методи обчислення границь I правило

Приклад 6.3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4+5x^2-3}{3x-5x^4}.$$

Розділимо чисельник і знаменник дробу на x^4 і до одержаного дробу застосуємо теорему про границю частки:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4+5x^2-3}{3x-5x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4}}{\frac{3}{x^3}-5}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(8+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^4})}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3}{x^3}-5)}=-\frac{8}{5}.$$

Методи обчислення границь ІІ правило

ІІ правило. Розкриття невизначеності вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$ коли змінна прямує до числа, функції раціональні.

необхідно чисельник і знаменник дробу розкласти на множники і скоротити множник, який прямує до 0.

використовуємо формули:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
3) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

Методи обчислення границь II правило

Приклад 6.4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x^2+x-14}=\frac{2^2-4}{3\cdot 2^2+2-14}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

$3x^2+x-14=0\Rightarrow \quad x_1=2; x_2=\frac{7}{3}\Rightarrow$

$3x^2+x-14=3(x-2)\left(x+\frac{7}{3}\right)$

Отже

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x^2+x-14}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)\left(x+\frac{7}{3}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3\left(x+\frac{7}{3}\right)}=\frac{4}{13}.$$

Методи обчислення границь II правило

Приклад 6.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x-2}{x^3-1}=\dfrac{1^4+1-2}{1^3-1}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

Для того щоб розкласти чисельник на множники поділимо його на $(x-1)$ за правилом ділення многочленів:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4+x-2 & x-1 \\ \cline{3-3}
 & x^4-x^3 & x^3+x^2+x+2 \\ \cline{2-2}
- & x^3+x-2 & \\
 & x^3-x^2 & \\ \cline{2-2}
- & x^2+x-2 & \\
 & x^2-x & \\ \cline{2-2}
- & 2x-2 & \\
 & 2x-2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Методи обчислення границь II правило

Таким чином, $$x^4+x-2=(x-1)(x^3+x^2+x+2)$$

Отже,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x+2}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1^3+1^2+1+2}{1^2+1+1}=\frac{5}{3}$$

Методи обчислення границь II правило

Приклад 6.6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{12x^2 + x - 13}{x^2 - 1}$.

У цьому випадку $\lim\limits_{x \to 1}(12x^2 + x - 13) = 0$ і $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1) = 0$, тобто має місце невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

$$12x^2 + x - 13 = 0; \quad x_1 = 1, x_2 = -\frac{13}{12}; \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{12x^2 + x - 13}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{12(x-1) \cdot \left(x + \dfrac{13}{12}\right)}{(x-1) \cdot (x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{12\left(x + \dfrac{13}{12}\right)}{x+1} = \frac{25}{2}.$$

Методи обчислення границь ІІІ правило

ІІІ правило. Розкриття невизначеності вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ коли змінна прямує до числа, функції ірраціональні.

Методи обчислення границь III правило

Приклад 6.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{x-1}$.

Коли $x \to 1$, чисельник і знаменник дробу мають границю, що дорівнює нулю. Домножимо чисельник і знаменник на

спряжений до чисельника вираз $(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1})(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}{(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8-8x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=\lim_{x\to 1}\frac{7(1-x)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-7}{\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}}=\frac{-7}{(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=-\frac{7}{6}.$$

Методи обчислення границь III правило

Приклад 6.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{x^3+8}=\dfrac{\sqrt{2^2+1}-\sqrt{5}}{(-2)^3+8}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}.$

Позбудемось спочатку ірраціональності в чисельнику; для цього чисельник і знаменник домножимо на спряжений вираз і скористаємося властивостями функцій, які мають границю

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{\left(x^3+8\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1-5}{x^3+8}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{5}}\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x^2-2x+4}=\frac{1}{6\sqrt{5}}$$

Методи обчислення границь IV правило

IV правило.

Розкриття невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$,

коли функції тригонометричні.

Застосовується перша важлива границя.

Методи обчислення границь IV правило

Приклад 6.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot tg4x}{1-\cos 8x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot tg4x}{1-\cos 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot tg4x}{2\sin^2 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3x\cdot tg4x\cdot 4x\cdot (4x)^2}{3x\cdot 4x\cdot 2\cdot \sin^2 4x\cdot (4x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(4x)^2}{\sin^2 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 4x}{2\cdot (4x)^2}=$$

$$=1\cdot 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{32x^2}=\frac{3}{8}$$

Методи обчислення границь IV правило

Приклад 6.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x\cdot 4x\qquad 5x}{4x\qquad tg5x\cdot 5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{tg5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{5x}=1\cdot 1\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$$

Методи обчислення границь IV правило

Приклад 6.11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\cos 3x \arcsin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{\arcsin^2 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot 2x \quad \sin 2x\cdot 2x \quad 5x \qquad 5x}{2x\cdot 2x \quad \arcsin 5x\cdot 5x \quad \arcsin 5x\cdot 5x}\cdot 1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\arcsin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\arcsin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{25x^2}=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{8}{25}=\frac{8}{25}|$$

Методи обчислення границь V правило

V правило

Розкриття невизначеності вигляду $\left(1^{\infty}\right)$.

Застосовується друга важлива границя.

Методи обчислення границь V правило

Приклад 6.12.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x}{x^2-3}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+4x}{x^2-3}-1\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+4x-x^2+3}{x^2-3}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x+3}{x^2-3}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x+3}{x^2-3}\right)^{\left(\frac{x^2-3}{4x+3}\cdot\frac{4x+3}{x^2-3}\right)\cdot 3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4x+3}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2-3}{4x+3}}\right)^{\frac{4x+3}{x^2-3}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}(e)^{\frac{4x+3}{x^2-3}\cdot 3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(e)^{\frac{12x^2+9x}{x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}(e)^{\frac{12x^2}{x^2}}=(e)^{12}$$

ВИЩА МАТЕМАТИКА для ЕКОНОМІСТІВ

- Лекція № 7

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

- 1. Означення похідної функції
- 2. Правила диференціювання
- 3. Таблиця похідних елементарних функцій
- 4. Похідні функцій другого та вищих порядків
- 5. Застосування похідних для обчислення границь, правило Лопіталя
- 6. Неперервність функцій

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Похідною функції $y = f(x)$ по фрагменту x називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргумента прямує до нуля і позначають:
$y'(x)$, $\frac{\mathrm{df}(x)}{\mathrm{dx}}$, $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, $f'(x)$, тобто $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

$(C)' = 0$, де $C = \mathrm{const}$

1) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
2) наслідок: $(\mathrm{CU})' = CU'$, де $C = \mathrm{const}$
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай $u = f(x)$, а функція $F = F(u)$, тоді складена функція

$$y = F(u) = F(f(x))$$

В цьому випадку

$$\frac{dy}{dx} = F'_u(u) \cdot u' = F'_u(u) f'(x)$$

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

2) $(a^x)' = a^x \ln a$;

2') $(e^x)' = e^x$;

3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$;

3') $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

4) $(\sin x)' = \cos x$;

5) $(\cos x)' = \sin x$;

6) $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

7) $(\text{ctg}x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$;

8) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

11) $(\text{arcctg}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

ПОХІДНА НЕЯВНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай змінні x та y зв'язані між собою деяким рівнянням $F(x, y) = 0$, тобто функція y задано неявно. Для того щоб знайти похідну неявно заданої функції необхідно знайти похідну від лівої і правої частини по x, враховуючи, що y є функцією x,
а потім виразити y'.

ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Похідну від першої похідної називають похідною ***другого порядку*** або ***другою похідною*** і позначають $y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$.

Похідною n – го порядку від функції $f(y)$ називають похідну від похідної $(n-1)$ –го порядку і позначають $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Диференціалом функції $y = f(x)$ називають величину пропорційну нескінченно малому приросту аргумента Δx , яка відрізняється від відповідного приросту функції на нескінченно малу величину більш високого порядку, ніж Δx.

Таким чином, якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$, то добуток цієї похідної на dx і є диференціалом функції: $dy = f'(x)dx$.

Властивості диференціалу:

1) $d(c) = 0, c = \text{const};$
2) $d(u + v - w) = (u' + v' - w')\text{dx} = \text{du} + \text{dv} - \text{dw};$
3) $d(u \cdot v) = \text{udv} + \text{vdu};$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\text{vdu}-\text{udv}}{v^2}.$

ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

Нехай $f(x)$ та $g(x)$ - дві неперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовані всередині нього функції, причому $g'(x)$ не перетворюється в нуль всередині відрізка і нехай $f(a) = g(a) = 0$, тобто перетворюється на нуль при $x = a$. Тоді, якщо існує границя відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to a$, то існує і границя відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, причому $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Наслідки:

1) Якщо $f'(x)$ і $g'(x)$ задовольняють тим же умовам, які накладались на $f(x)$ і $g(x)$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

2) Теорема має місце і в тому випадку, коли $f(x)$ і $g(x)$ не визначені при $x = a$, але

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ і } \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

3) правило Лопіталя можна застосовувати і в тому випадку, коли

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0 \text{ і } \lim_{x\to \infty} g(x) = 0$$