Модульна контрольна робота № 1

Тема роботи: Елементи теорії матриць та визначників. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії.

Мета роботи: Засвоїти основні означення, теореми, методи розв'язування задач лінійної алгебри. Вміти виконувати операції з матрицями. Вивчити основні поняття векторної алгебри. Вміти розв'язувати типові задачі з векторної алгебри та аналітичної геометрії,

Зміст роботи

1) Виконати дії над заданими матрицями A і B;
2) Знайти і записати загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь.
3) Перевірити, що вектори $\vec{b}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{c}=\{x_2, y_2, z_{21}\}$, $\vec{d}=\{x_3, y_3, z_3\}$ утворюють базис в R^3, та розкласти вектор $\vec{a}=\{x, y, z\}$ за цим базисом.

4) Дослідити взаємне розташування та вказати спільні елементи (точки) двох прямих

Методичні рекомендації та зразок виконання роботи

1). Знайти $A\cdot(3B-2A)-B^2$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

Розв'язування.

1).

а). Знайдемо спочатку матрицю $3B-2A$. Для цього використаємо правила множення матриці на число і віднімання матриць:

$$(3B-2A)=3\cdot\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -12 & 6\\ 6 & 9 & 0\\ 9 & -6 & 3\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 6 & 4 & 2\\ 10 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-4 & -12-0 & 6-(-2)\\ 6-6 & 9-4 & 0-2\\ 9-10 & -6-(-4) & 3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -12 & 8\\ 0 & 5 & -2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

б). Далі знайдемо добуток матриць A і $(3B-2A)$. Щоб знайти добуток двох матриць (згідно з означенням), треба елементи кожного рядка першої матриці помножити на відповідні за номером елементи кожного стовпця другої матриці і ці добутки додати:

$$A\cdot(3B-2A)=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -12 & 8\\ 0 & 5 & -2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+0\cdot 0+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot(-12)+0\cdot 5+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot 8+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 3\\ 3\cdot(-1)+2\cdot 0+1\cdot(-1) & 3\cdot(-12)+2\cdot 5+1\cdot(-2) & 3\cdot 8+2\cdot(-2)+1\cdot 3\\ 5\cdot(-1)+(-2)\cdot 0+0\cdot(-1) & 5\cdot(-12)+(-2)\cdot 5+0\cdot(-2) & 5\cdot 8+(-2)\cdot(-2)+0\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -22 & 13\\ -4 & -28 & 23\\ -5 & -70 & 44\end{pmatrix}.$$

✍ **Пам'ятаємо! Операція множення матриць некомутативна!**

$$\boldsymbol{A\cdot B\neq B\cdot A}$$

в). Щоб знайти квадрат матриці B, треба помножити матрицю B саму на себе:

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-8+6 & -4-12-4 & 2+0+2\\ 2+6+0 & -8+9+0 & 4+0+0\\ 3-4+3 & -12-6-2 & 6+0+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -20 & 4\\ 8 & 1 & 4\\ 2 & -20 & 7\end{pmatrix}.$$

г) Обчислимо остаточний результат:

$$A\cdot(3B-2A)-B^2=\begin{pmatrix}-1 & -22 & 13\\ -4 & -28 & 23\\ -5 & -70 & 44\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -20 & 4\\ 8 & 1 & 4\\ 2 & -20 & 7\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}0 & -2 & 9\\ -12 & -29 & 19\\ -7 & -50 & 37\end{pmatrix}$$

2) Знайти і записати загальний розв’язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-7x_3+3x_4=0,\\ 2x_1-3x_2-3x_3+5x_4=0,\\ 2x_1+9x_2-11x_3+x_4=0,\\ 4x_1+6x_2-14x_3+6x_4=0.\end{cases}$$

Розв'язування.

Знайдемо ранг матриці з коефіцієнтів цієї системи:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -7 & 3\\ 2 & -3 & -3 & 5\\ 2 & 9 & -11 & 1\\ 4 & 6 & -14 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 3 & -7 & 3\\ 0 & -6 & 4 & 2\\ 0 & 6 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 3 & -7 & 3\\ 0 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -7 & 3\\ 0 & 3 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці з коефіцієнтів дорівнює двом, число невідомих дорівнює чотирьом, тому будь-яка фундаментальна система розв'язків даної системи рівнянь складається з двох розв'язків (4-2=2). Розв'яжемо систему, користуючись двома лінійно незалежними рівняннями і вважаючи x_3, x_4 вільними невідомими.

Маємо: $x_2=\dfrac{2}{3}x_3+\dfrac{1}{3}x_4,\qquad x_1=\dfrac{5}{2}x_3-2x_4.$

3) Перевірити, що вектори $\vec{b}=(5;4;3),$, $\vec{c}=(-3;-1;2)$, $\vec{d}=(-3;1;3)$ утворюють базис в R^3, та розкласти вектор $\vec{a}=(12;9;10)$ за цим базисом.

Розв'язування.

Згідно з означенням, вектори $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ утворюють базис в R^3, якщо вони лінійно незалежні в цьому просторі. Вектори $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ будуть лінійно незалежними в R^3, якщо ранг матриці, складений з координат цих векторів, дорівнює трьом.

Таким чином записуємо матрицю, елементами якої є координати векторів, і обчислюємо її визначник:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -31 \neq 0.$$

Отже, $rang(A) = 3 \Rightarrow$ вектори $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – лінійно незалежні і утворюють базис в R^3. Оскільки вектор $\vec{a}$ належить простору R^3, його можна представити таким чином:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{b} + x_2 \cdot \vec{c} + x_3 \cdot \vec{d}\text{, або}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Запишемо цю рівність у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 12, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'завши систему будь-яким методом, знайдемо значення невідомих (x_1, x_2, x_3), які, в свою чергу, будуть координатами вектора $\vec{a}$ у базисі ($\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$).

В результаті отримаємо $(x_1, x_2, x_3) = (3; 2; -1)$ та розклад

$$\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}.$$

4) Дослідити взаємне розташування та вказати спільні елементи (точки) двох прямих:

(1) $\begin{cases} -7x+5y+4z-3=0 \\ 2x+3y+4z-5=0 \end{cases}$ **(2)** $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

Розв'язування базується на Лекціях 5.2; 5.3; 5.4.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі:

Дві прямі у просторі можуть **перетинатися**,

бути **мимобіжними**,

паралельними,

суміщатися.

☻ Умова паралельності двох прямих – колінеарність їх напрямних векторів.

☻ Умова суміщення двох прямих – колінеарність їх напрямних векторів та існування спільної точка.

якщо дві прямі у просторі не паралельні і не суміщаються то вони або перетинаються, або мимобіжні. В обох випадках їх

напрямні коефіцієнти не пропорційні.

☻ Нехай дві непаралельні прямі перетинаються.

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$, який сполучає точку M_1 першої прямої з точкою M_2 другої прямої, і напрямні вектори $\vec{u}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$ і $\vec{u}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$.

Якщо дві прямі у просторі перетинаються, то вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ компланарні: $\left(\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\right)=0$.

☻ умова того, що прямі у просторі **ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ**:

їх ***напрямні коефіцієнти не пропорційні та***

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

☻ умова того, що прямі у просторі **МІМОБІЖНІ**:

їх ***напрямні коефіцієнти не пропорційні та***

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Розв'язування.

Зведемо рівняння **(1)** прямої, що є перетином двох площин, до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} -7x + 5y + 4z - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 4z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 3 + 7x - 5y \\ 2x + 3y + (3 + 7x - 5y) - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4z = 3 + 7x - 5y \\ 2x + 3y + (3 + 7x - 5y) - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 3 + 7x - 5y \\ 2y = (9x - 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4z = 3 + 7x - 5 \cdot 0{,}5 \cdot (9x - 2) \\ y = 0{,}5(9x - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 8 - 15{,}5x \\ y = 0{,}5(9x - 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{9} \cdot (y + 1) \\ x = \frac{2}{31} \cdot (8 - 4z) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{9} \cdot (y + 1) = \frac{2}{31} \cdot (8 - 4z)$$

Канонічне рівняння першої прямої

$$x=\frac{(y+1)}{\frac{9}{2}}=\frac{(8-4z)}{\frac{31}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-0}{2}=\frac{(y+1)}{9}=\frac{(z-2)}{-7,75}$$

Для першої прямої напрямний вектор і точка:

$$\vec{u}_1=\{l_1,m_1,n_1\}=\{2,9,-7.75\} \quad M_1(0;-1;2)$$

Для другої прямої напрямний вектор і точка:

$$\vec{u}_2=\{l_2,m_2,n_2\}=\{3,-1,2\} \quad M_2(5;3;1)$$

Напрямні вектори не колінеарні:

$$\frac{2}{3}\neq\frac{9}{-1}\neq\frac{-7,75}{2}$$

Прямі не паралельні та не суміщаються.

Перевіримо на перетин:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & -7,75 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 17 & 4 & 7 \\ 29 & 9 & 10,25 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{3+2}(17\cdot 10,25-7\cdot 29)=$$

$$=-28,25 \quad \neq \quad 0$$

Прямі мимобіжні.